

# Naturaleza del objeto matemático “Tabla”

Nature of the Mathematical Object “Table”

Nature de l'objet mathématique “tables”

Natureza do objeto matemático “tabela”

Fecha de recepción: 16 DE JUNIO DE 2016/Fecha de aceptación: 20 DE JUNIO DE 2017/Fecha de disponibilidad en línea: 1 DE DICIEMBRE DE 2017

Encuentre este artículo en <http://magisinvestigacioneducacion.javeriana.edu.co/>

doi: 10.11144/Javeriana.m10-20.nomt



Escrito por SOLEDAD ESTRELLA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO  
VALPARAÍSO, CHILE  
soledad.estrella@pucv.cl

ARTURO MENA-LORCA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO  
VALPARAÍSO, CHILE  
arturo.mena@pucv.cl

RAIMUNDO OLFOS-AYARZA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO  
VALPARAÍSO, CHILE  
raimundo.olfos@pucv.cl

## Resumen

El estudio ofrece una visión amplia del proceso de evolución de las ideas sobre tablas, su connotación de herramienta, surgimiento y desarrollo en diversas sociedades y culturas en diferentes momentos de la historia, cuestiones que aportan al conocimiento sobre este objeto y sus alcances didácticos. La reflexión sobre la trayectoria de la tabla y su presencia como herramienta de almacenamiento, como herramienta de cálculo en sistemas de numeración y de metrología, y como herramienta de análisis en ámbitos científicos y matemáticos, ayuda a precisar su origen y naturaleza como objeto matemático.

## Palabras clave

Representación visual; epistemología; datos estadísticos; almacenamiento de la información; matemáticas; estadística

## Para citar este artículo / To cite this article / Pour citer cet article / Para citar este artigo

Estrella, Soledad; Mena-Lorca, Arturo & Olfos, Raimundo (2017). Naturaleza del objeto matemático “Tabla”. *magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 10 (20), 105-122. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.m10-20.nomt>

### Keywords

Visual representation; epistemology; statistical data; storage of information; mathematics; statistics

### Abstract

This article offers a broad vision of the process of evolution of ideas on tables, their connotation of tools, emergence and development in different societies and cultures at different moments in history; questions that contribute to the knowledge about this object and its didactic scope. The reflection on the trajectory of the table and its presence as a storage tool, as a calculation tool in numbering and metrology systems, and as a tool of analysis in scientific and mathematical fields, helps to clarify its origin and nature as a mathematical object.

### Mots clés

Représentation visuelle; épistémologie; données statistiques; stockage de l'information; mathématiques; statistique

### Résumé

Cet article de réflexion fournit un regard ample du processus d'évolution des idées par rapport aux tables, dans leur connotation d'outil, apparition et développement dans les différentes sociétés et cultures aux différents moments de l'histoire, ces questions qui contribuent à la connaissance par rapport à cet objet et ses apports didactiques. La réflexion par rapport au parcours des tables de multiplier et leur présence en tant qu'outil de stockage, en tant qu'outil de calcul dans les systèmes numériques et de métrologie, et en tant qu'outil d'analyse dans les domaines scientifiques et mathématiques, aide à préciser leur origine et nature en tant qu'objet mathématique.

### Palavras-chave

Representação visual; epistemologia; dados estatísticos; armazenamento da informação; matemáticas; estatística

### Resumo

Este artigo de reflexão oferece uma visão ampla do processo de evolução das ideias sobre tabelas, sua conotação de ferramentas, surgimento e desenvolvimento em diversas sociedades e culturas em diferentes momentos da história, questões que contribuem ao conhecimento sobre estes objetos e seus alcances didáticos. A reflexão sobre a trajetória da tabela e sua presença como ferramenta de armazenamento e de cálculo em sistemas de numeração e de metrologia, e como ferramenta de análise em âmbitos científicos e matemáticos, ajuda a precisar sua origem e natureza como objeto matemático.

## Introducción

El proceso de aparición de las tablas es amplio y complejo, y comparte con la generalidad del desarrollo de otros ámbitos del pensamiento el hecho de no ser acumulativo ni continuo. Sin embargo, su origen en las prácticas de las sociedades es tan evidente que aun la reseña forzosamente lineal que hacemos para evidenciar algunos aspectos de interés para su enseñanza, permite mostrar a la vez su avance a lo largo de la historia (y aún más atrás) y las necesidades sociales a las que responden.

En este artículo, inicialmente diferenciamos las listas de las tablas para luego describir su funcionalidad como objeto y su contribución a la emergencia de otros. Posteriormente, precisamos el reconocimiento de la tabla como objeto matemático desde la matemática, y abordamos el objeto matemático tabla como objeto matemático surgido desde la funcionalidad que representa.

Por otra parte, hemos reunido algunos antecedentes relevantes —en especial, numéricos—, que muestran que el uso de tablas en la historia ha apoyado el desarrollo gradual de nuevas convicciones epistemológicas y ha favorecido avances conceptuales en el pensamiento, en particular en matemáticas y en ciencias.

Para el caso de las ciencias experimentales, tal influencia se da ya desde lo protocientífico, aun cuando este se les opone en un sentido tanto histórico como lógico; en la matemática, por el contrario, lo protomatemático termina por ser parte de la disciplina (Rashed, 2003).

La realización de este trabajo requirió la selección de artículos desde las bases de datos en línea, Education Resources Information Center, Scopus y Web of Knowledge, con las palabras: tabla, tablas, table, tableaux, tablet, tabular, para explorar cuatro líneas: artículos de antropología; estadística; informática; e historia de la astronomía, matemática y visualización de datos. El criterio usado para organizar las fuentes seleccionadas fue el levantamiento de categorías acerca de la aparición de las tablas, desde la prehistoria hasta nuestros días, la funcionalidad de las tablas y la tabla como objeto matemático (tabla 1). Los escasos estudios sobre la tabla llevaron a indagar sobre sus usos y emergencia, y por tanto se tratan esencialmente fuentes secundarias. Estas fuentes han permitido identificar cambios y tendencias en cuanto al uso de las tablas, y dejan ver en definitiva la aparición del objeto matemático tabla, tras un largo uso a modo de objeto paramatemático, esto es como herramienta para almacenar y calcular pero no como objeto de estudio.

### Descripción del artículo | Article description | Description de l'article | Artigo descrição

Este artículo de reflexión es derivado del proyecto de investigación *El objeto tabla: un estudio epistemológico, cognitivo y didáctico*. La investigación se enfocó en la tabla como objeto de aprendizaje en los primeros grados de la escuela. Primero, desarrolla un estudio histórico epistemológico que esclarece los elementos constitutivos de la tabla, y examina su estatus en el contexto escolar conforme al análisis exploratorio de datos. El proyecto proveyó lineamientos para el tratamiento de la tabla en el aula manteniendo altas demandas cognitivas, caracterizando de manera detallada representaciones semióticas y estructuras conceptuales teóricas subyacentes que emergen en el proceso de conceptualización de la tabla.

Tabla 1  
 Criterios de organización de las investigaciones y fuentes seleccionadas

Crterios	Fuentes
Aparición histórica de las tablas	Asger Aaboe (1964); Martin Campbell-Kelly, Mary Croarken, Raymond Flood & Eleanor Robson (2003); Jöran Friberg (2007); Jack Goody (1976, 1977); William W. Hallo (1964); Otto Neugebauer & Henry B. van Hoesen (1959); Olaf Pedersen (1974); Christine Proust (2005, 2008, 2009, 2010); Roshdi Rashed (2003); Eleanor Robson (2001, 2003); Dominique Tournès (2011, 2014).
Funcionalidad paramatemática de las tablas	Irving H. Anellis (2012); Domenico Bertoloni-Meli (2004); Innocentius M. Bocheński (1961); Michael Friendly & Daniel J. Denis (2009); Michael Friendly & Ernest Kwan (2003); John S. Garrow & Joan Webster (1984); Dionysius Lardner (1834); Uta C. Merzbach (1977); Karl Pearson (1904); Charles Sanders Peirce (1931, 1931-1958); Lambert Adolphe Jacques Quetelet (1835); Eleanor Robson (2001, 2003); Denis Roegel (2010); Micah T. Ross (2011); Nathan Sidoli (2014); Dominique Tournès (2000).
Tabla como objeto matemático	Zvi Arad, Xu Bangteng, Guiyun Chen, Effi Cohen, Arisha Haj Ihia Hussam & Mikhail Muzychuk (2011); Zvi Arad & Harvey I. Blau (1991); Zvi Arad, Elsa Fisman & Misha Muzychuk (1999); Harvey I. Blau & Paul-Hermann Zieschang (2004); Shin Hitotsumatsu, Yoshio Okada & Shouichiro Machida (2008); David Lorge Parnas, G. J. Kurt Asmis & Jan Madey (1991).

Fuente: elaboración propia.

En este escrito subyace el supuesto de que el desarrollo de conceptos no es universalmente homogéneo en el tiempo y no establecemos un paralelismo entre diferentes culturas (cf. Schubring, 2011). Aun así, una reseña histórica y epistemológica como la que exponemos puede dar algunas luces acerca de la evolución conceptual del objeto tabla.

Compartimos con Gert Schubring (2011) que las rupturas y las nuevas direcciones en la historia de las matemáticas se deben en gran parte a los cambios epistemológicos, que están conectados a cambios en los sistemas de la actividad científica. En este enfoque, la historia es discontinua y provista de interacción entre la experiencia personal y el saber cultural que permiten el desarrollo conceptual.

### *Listas y tablas*

Inicialmente, el recurso para resumir datos se escribía como listas. En este escrito, hemos considerado una lista como aquellas unidimensionales que comprenden enumeración y/o clasificación —de cosas, cantidades...—, tienen una disposición en columnas (lectura vertical) o en filas (lectura horizontal), no poseen encabezado y sus componentes se separan por espacios y/o puntuación. La lista escrita puede ser leída en distintas direcciones, tiene comienzo y final precisos, un límite.

Ahora bien, las representaciones icónicas precedieron a las palabras para representar números. Según Heike Wiese (2003), el lenguaje otorgó al ser humano la capacidad de pasar de las representaciones icónicas, compartidas con otras especies, a un concepto generalizado de número. El concepto de conteo plasmado en la colocación de marcas sobre un objeto (proceso que termina en la obtención del cardinal) juega un rol central en el desarrollo de representaciones numéricas discretas. En esta base icónica del desarrollo del número emergen las tempranas listas de marcas consecutivas.

Por un largo período, los escribas de Mesopotamia utilizaron casi solo listas unidimensionales. Jack Goody (1977) señala que las listas lexicales en *tablets* sumerias proveen “una suerte de inventario de conceptos, un protodictcionario...”, y al devenir en tablas representaron un cambio significativo en los modos de pensamiento en términos de las “operaciones formales, cognitivas y lingüísticas que abría esta nueva tecnología [tabla] del intelecto” (p. 95). Según este autor, los babilónicos presentaban listas complejas, virtualmente tablas, un tipo de recodificación lingüística que activa procesos de pensamiento; ello facilitaba ampliamente la clasificación de los datos: al listar, los datos son descontextualizados de su realidad inmediata y se posibilita su reorganización; la lista incrementa la

visibilidad y definición de clases, facilita el ordenamiento jerárquico en las sociedades con escritura.

Ya desde la prehistoria, el registro en ciertas tablas comienza a configurar características que definen el formato contemporáneo: una ordenación espacial a modo de filas y columnas, con celdas que contienen registros de datos. En el siglo XVIII a.C., emergió el potencial de las tablas como herramienta de manejo de datos cuantitativos, y siguió desarrollándose paulatina pero no continuamente, durante 500 años, al menos en la ciudad de Nippur y sus alrededores. Las tablas aparecieron sobre la mitad del tercer milenio a.C. después la invención de la escritura en el cuarto milenio a.C.; luego se adoptaron parcialmente, desaparecieron y se reinventaron varias veces, para establecerse recién en el siglo XIX a.C. (Hallo, 1964; Robson, 2001).

Al respecto, Eleanor Robson (2001) considera que no es coincidencia que las tablas surgieran solo después de la invención del sistema sexagesimal de valor posicional y la separación conceptual de cuantificador (número) y cuantificado (objeto). Es la etapa de transición paulatina de listas simples, que unían número y objeto, a listas dobles y luego a tablas. En estas últimas, se manifiesta la distinción entre lo cuantitativo y lo cualitativo; mediante el trazado físico de líneas divisorias, es posible ver y explorar datos numéricos y relaciones de una manera hasta entonces inimaginable.

Los documentos que contienen tablas se han encontrado principalmente en los grandes archivos institucionales de administración de Sumeria y Babilonia, en los restos arqueológicos de la educación de los escribas, y en las bibliotecas académicas de los grandes templos (Robson, 2001). Las listas de metrología para memorizar eran el comienzo de la primera etapa de la educación de los escribas; los conocimientos de medidas eran indispensables para la contabilidad y la administración. Luego seguían las tablas metroológicas, que contenían la información relacionada con los sistemas numéricos y metroológicos usados, similares a las listas; ellas establecían una relación entre las medidas y los números (gráfico 1).

El currículo de estas escuelas de escribas —centrado en el número como medida y conteo, y el cálculo en el campo multiplicativo— continuaba con las tablas numéricas, con números abstractos y operaciones multiplicativas (Proust, 2005, 2009, 2010). Solo de 10 a 20% de las *tablets*<sup>1</sup> halladas son de carácter matemático (Proust, 2010). Las tablas ocupaban conjuntamente diferentes sistemas metroológicos y exhibían dos ejes de organización: en el horizontal, se categorizan diferentes tipos de información numérica y, en el vertical,

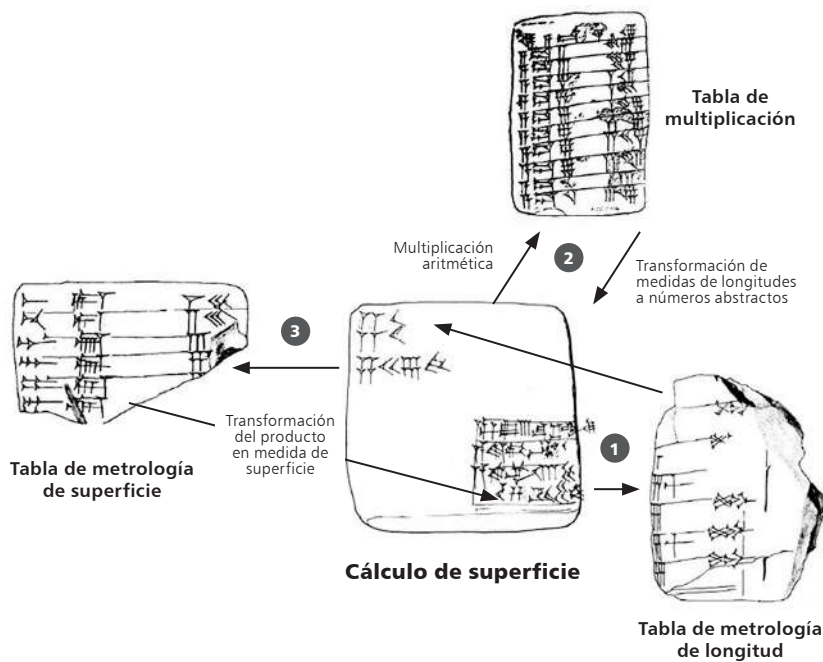
1 En este escrito, usaremos el vocablo *tablet* (cf. Neugebauer & Van Hoesen, 1959) para situar un dispositivo en que se hacían inscripciones, no necesariamente en formato tabular.

los datos de los diferentes individuos o áreas (Proust, 2005, 2008). Cálculo y organización van en general de izquierda a derecha y de arriba abajo, según la dirección de la escritura cuneiforme (Friberg, 2007; Robson, 2001).

El gráfico 2 permite distinguir entre una lista y una tabla, ella muestra una *tablet* de 2050 a.C. (Robson, 2003), que presenta un conteo no tabular en que no hay separación física entre datos numéricos y descriptivos, ni entre diferentes categorías de datos, al modo de una lista. En el gráfico 3, una *tablet* de 2028 a.C., se observa un conteo tabulado con delimitaciones y encabezados laterales en el extremo derecho, y encabezados de columnas en la fila inferior.

Gráfico 1

Ejemplo simulado de ejercicio de cálculo de superficie mediante el uso de tabla como herramienta de cálculo



Fuente: adaptado de Christine Proust (2009, p. 38)

Gráfico 2

Tablets con listas

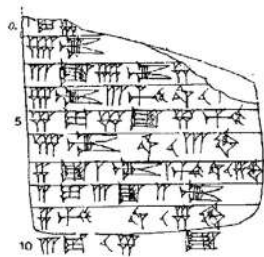
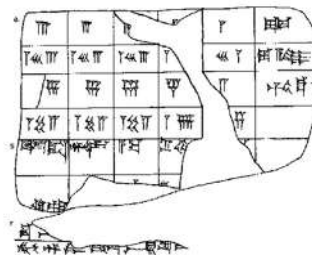


Gráfico 3

Tablets con tablas



Fuente: Eleanor Robson (2003). *Tables and Tabular Formatting in Sumer, Babylonia, and Assyria, 2500 BCE-50 CE.*

La tabla servía como medio para ordenar el conocimiento al activar los esquemas clasificatorios, los sistemas simbólicos y las formas de pensamiento (Goody, 1976). Ahora bien, una tabla datada en el año 2600 a.C. en la ciudad de Shuruppag se considera como la primera tabla matemática de la historia. Ella tiene tres columnas con diez filas, las dos primeras corresponden a la lista de medidas de longitud y la última columna permite calcular el área (Campbell-Kelly, Croarken, Flood & Robson, 2003).

### *Las tablas y el concepto de función*

Si bien el concepto formal de número se desprende de las representaciones icónicas, el de numerosidad proviene solo de ellas: marcas, signos que comparten algunas características con su referente (Peirce, 1931). Por ejemplo, las marcas físicas en objetos —muescas en un hueso— producen representaciones que se basan en una enumeración de elementos, “un objeto, y otro objeto, y otro objeto” en lugar de una asignación de un número al conjunto “3 objetos” (Wiese, 2003, p. 386).

Según se ha venido describiendo, el uso de *tablas* está muy relacionado con la génesis y el desarrollo de la noción de *número*, pero es evidente que ellas no toman cada número por separado, sino que explícitamente le asocian otro número, o una cantidad determinada de masa o de volumen, etc. Más en general, una tabla común asigna a algunos objetos otros objetos. Trátase de un registro de grano, de datos astronómicos o de números, a una posición dada (en una columna) se le asocia un (único) dato (en otra columna) o un conjunto de datos (en varias columnas paralelas, como en las posibles ternas pitagóricas, e. g.). Se percibe allí la idea de función: Una *función* de un conjunto *A* en un conjunto *B* es una correspondencia que asigna a cada elemento de *A* un único elemento de *B* (por ejemplo, una terna de datos); tal correspondencia no requiere una fórmula.

En la antigüedad, puede reconocerse una función en una tabla sujeta a la condición de que esta regla sea definida y que dar un valor a *x* sea suficiente para encontrar *y*. Podemos reconocer una noción protomatemática de función en las reglas para medir áreas de figuras geométricas, y en las tablas que se utilizaron tempranamente para facilitar cálculos complicados (Ross, 2011). Al respecto, hay posiciones encontradas respecto al desarrollo del concepto de función en la matemática de las civilizaciones mesopotámicas. Olaf Pedersen (1974) afirma que estas poseían un cierto sentido de la funcionalidad, pero Adolph-Andrei Pavlovich Youshkevitch (1976) estima que en la antigüedad no había una idea general de relación funcional, puesto que el estudio de casos particulares de dependencias entre dos cantidades aún no se había aislado de las nociones generales de cantidades variables y funciones.

Sin embargo, la noción de función aparece expresada, de manera más o menos precisa, en diversos registros tabulares, gráficos y algebraicos. A pesar del hecho de que la ubicuidad de la idea de función hace difícil separar algunos elementos con el propósito de exponer su desarrollo histórico, procuraremos mostrar cómo la génesis del concepto de función está inextricablemente unida al concepto de tabla. El rol de las tablas en el desarrollo del concepto de función es bastante natural: ellas señalan las correspondencias y los pares que se forman, con la restricción de que si la función se da entre conjuntos grandes, la tabla solo entrega una muestra, que habrá que prolongar, extrapolar y/o interpolar.

Desde esta perspectiva, merece señalarse a Ptolomeo quien hacia 150 d.C. describió en su *Almagesto* el sistema geocéntrico y el movimiento

aparente de estrellas y planetas. Las tablas matemáticas que ocupaba eran conjuntos de valores numéricos de longitudes y arcos obtenidos de modelos geométricos, a partir de objetos geométricos con valores numéricos dados, o bien desde un modelo geométrico dado con parámetros astronómicamente determinados (gráfico 4). Ellas pueden considerarse una representación cuantitativa del modelo y también una herramienta para evaluar valores específicos relativos al modelo (Aaboe, 1964; Sidoli, 2014). Para Olaf Pedersen (1974), en el *Almagesto* está la primera tabla trigonométrica en la historia, con datos y cálculos en 360 filas y tres columnas. Sin embargo, Hiparco, en el siglo II a.C., ya había desarrollado tablas de cuerdas trigonométricas (las lúnulas) y tablas del movimiento solar, aunque más primitivas.

Gráfico 4

Tablas astronómicas desde el *Almagesto*, de Ptolomeo, como herramienta de análisis [traducción árabe de Ishâq b. Hunayn (830-910), revisada por Thâbit b. Qurra (836-901)]. Copiada por Ibrâhîm ibn Muhammad al-Sharfî, Maghreb en España, 1221. Manuscrito sobre papel (131 hojas, 25,5 x 18,5 cm).

Fuente: Nathan Sidoli (2014). *Mathematical Tables in Ptolemy's Almagest*.

Las relaciones funcionales no solo fueron utilizadas en las matemáticas griegas, sino también por los babilonios (Schubring, 2005). Por su parte, Hans Wussing (1998) acota que si bien las tablas de cálculo mesopotámicas o las del *Almagesto* manifiestan etapas previas en la formación del concepto de función, esta requiere el paso de una matemática de magnitudes consideradas de forma estática a una de variables, transición que hicieron expresamente François Viète, Pierre de Fermat y René Descartes en los siglos XVI y XVII.

### *Tablas y registros astronómicos*

Tras la caída de la sociedad antigua surge la ciencia en los países de cultura arábiga. El modelo geocéntrico se había impuesto sobre el heliocéntrico de los pitagóricos y de Aristarco de Samos (310 a.C.). Sobre el modelo geocéntrico, se construyeron las llamadas tablas Alfonsinas (1252) para ofrecer un esquema de uso práctico para calcular la posición del Sol, la Luna y los planetas. Ellas influyeron hasta el Renacimiento y fueron útiles no solo para la geografía al contribuir a la localización de coordenadas terrestres, sino también para la navegación al facilitar la orientación mediante constelaciones y planetas.

Nicolás Copérnico planteó que las apariencias en favor del modelo geocéntrico son también congruentes con el heliocéntrico. Su concepción, con modificaciones, fue plenamente aceptada solo a partir de los desarrollos de Johannes Kepler y Galileo Galilei. Desarrollos sustentados en una amplia base de datos en tablas registrados durante décadas por su mentor Tycho Brahe, ayudaron a Kepler a consolidar sus tres leyes del movimiento de los planetas.

### *Las tablas y cálculos expeditos*

La aparición de la imprenta en 1450 facilitó la creación y difusión de obras escritas. En tiempos en que, con excepción de los ábacos, no había instrumentos mecánicos de cálculo, la tabla ofrecía gran rapidez al computar. Las de logaritmos de John Napier abreviaron, facilitaron y precisaron los cálculos de triángulos y figuras; con ellas se obtenía mayor prontitud, seguridad y exactitud. John Napier (1614) incluye, en su primer libro, 90 tablas de senos y cosenos con sus respectivos logaritmos. Prontamente, Edmund Gunter (1617) y Henry Briggs (1633) publicaron las primeras tablas de logaritmos de funciones trigonométricas, y comenzó una profusión de tablas, derivadas de aquellas (Roegel, 2010; Tournès, 2000, 2014).

Los esfuerzos realizados para lograr un acuerdo sobre el sistema métrico decimal internacional promovieron también la aparición de tablas de conversión. Entre otros, François-Bertrand Barrême, en el siglo XVII, escribió varios libros de tablas matemáticas prácticas, los *baremos*, que evitaban al público la tarea de realizar esos cálculos; fueron reeditadas muchas veces, incluso en tamaño de bolsillo. En 1834, Dionysius Lardner escribió un libro sobre las tablas y sus errores; en este precisó que el parlamento británico elegía a quien tendría el honor de confeccionar las tablas lunares. Y reseñó que el primero, Tobias Mayer, usando una fórmula de Leonhard Euler, publicó sus tablas en 1766. Charles Mason las sustituyó en 1777 y, en 1806, Johann Tobias Bürg divulgó las suyas, usando la teoría de Pierre-Simon Laplace. En 1812, aparecieron las de Johann Karl Burckhardt, las cuales eran más exactas. Otros continuarían construyendo estas tablas mientras que, paralelamente, otras comisiones evaluaban los conocimientos científicos adquiridos para renovar y/o construir tablas lunares más completas. Dionysius Lardner, advirtiendo al público la existencia de errores en las tablas manuales, comenzó a promover el potencial de las máquinas de calcular, como la analítica de Charles Babbage (gráfico 5). Los primeros en construir una máquina capaz de producir tablas matemáticas impresas fueron Georg y Edvard Scheutz, quienes se basaron en el diseño de Babbage. En 1849, apareció la primera tabla hecha automáticamente en la primera máquina calculadora que imprime (Merzbach, 1977). Con el paso a las tablas automatizadas se propagó ampliamente su uso y se ganó aún más en exactitud y en rapidez.



Gráfico 5

Extracto de una tabla de logaritmos para 120 números

**TABLE V.**  
Logarithmes à 19 décimales pour tous les nombres impairs de 1163 à 1501, et pour tous les nombres premiers de 1501 à 10000.

Nota. Cette Table fait suite aux logarithmes à 20 décimales des Tables de Gardiner, édit. d'Avignon. Elle est extraite des grandes Tables du Cadastre, déposées au Bureau des Longitudes, et dont la notice se trouve dans le tome V des Mémoires de l'Institut.

Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.
1163	06557 97147 28448 4114	1243	09447 11286 41644 7635	1323	12155 08441 87500 0733
1165	06632 59253 62037 7709	1245	09516 93514 31755 1459	1325	12221 58780 72806 6552
1167	06707 08960 63370 1735	1247	09586 64534 78542 6137	1327	12287 09208 64435 5119
1169	06781 45111 61810 1107	1249	09656 24383 74135 5120	1329	12352 49809 42731 9975
1171	06855 68950 72303 1209	1251	09725 73096 93419 9551	1331	12417 80554 74075 1223
1173	06929 89121 15570 2447	1253	09795 10709 94440 0998	1333	12483 01104 13251 2061
1175	07003 78006 07755 0740	1255	09864 37258 17056 9441	1335	12548 12657 00501 0768
1177	07077 64628 44344 6816	1257	09933 57776 85957 2472	1337	12613 14072 61981 3683
1179	07151 38050 65089 1354	1259	10002 57301 07862 5975	1339	12678 05770 12008 9744
1181	07224 98976 13514 7991	1261	10071 50865 73081 6210	1341	12743 87778 51598 9129

Fuente: publicado por Adrien-Marie Legendre (1826, Tabla V, p. 260) como herramienta de cálculo

*Matemática de las tablas*

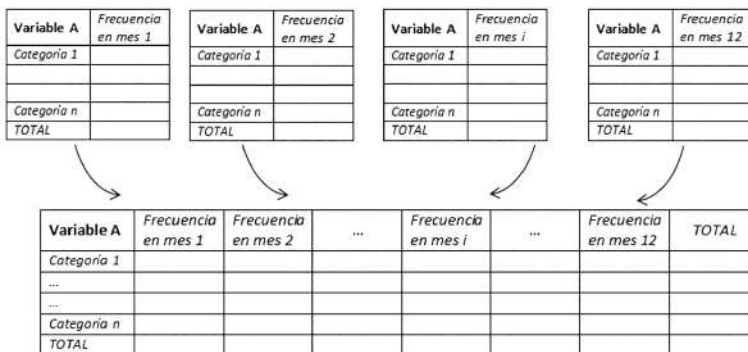
Según lo señalado, en la antigüedad, la tabla fue utilizada principalmente en su presentación en arreglos multidimensionales y en la aplicación de técnicas de interpolación (Tournès, 2011). Aquí precisamos el concepto actual de tabla y damos elementos de la estructura algebraica construible desde ellas, ya que una descripción detallada nos apartaría del propósito del artículo. De acuerdo con David Lorge Parnas, G. J. Kurt Asmis & Jan Madey (1991), las *expresiones tabulares* en el área informática son expresiones matemáticas en formato tabular y han llevado a generalizar las tablas

de dos dimensiones. Se usaron en los años setenta para documentar los requisitos de fabricación de una aeronave y desde entonces, para documentar y analizar sistemas de software. Ellas contribuyen a que la notación matemática sea más simple y comprensible intuitivamente, y son muy útiles en el testeo y verificación.

A partir de motivaciones como las anteriores, la tabla se ha definido como objeto matemático propiamente tal y, al ser introducida en la teoría, ha seguido un derrotero análogo al de otros objetos matemáticos —estructura teórica y utilización en otras ramas de la Matemática—, y su estatus es hoy el de una estructura matemática cualquiera (e.g., gráfico 6).

Gráfico 6

Ejemplo de operaciones con tablas en su rol de objeto matemático [tabla de frecuencia como resultado de concatenaciones de la tabla, y operaciones lógicas y matemáticas entre tablas de frecuencias: unión de tablas, intersección de encabezados y adición de las frecuencias]



Fuente: elaboración propia

Las álgebras tabla se están utilizando en otras áreas de la Matemática, en principio alejadas de la informática: se las usa en teoría de grafos (Arad, Bangteng, Chen, Cohen, Hussam & Muzychuk, 2011); para el caso de un grupo finito  $G$ , se construyen álgebras-tabla a propósito de  $CG$  álgebras (Arad & Blau, 1991); se han generalizado a álgebras-tabla los teoremas de Sylow [noruego Ludwig Sylow] de grupos finitos (Blau & Zieschang, 2004). Adicionalmente y como cabría esperar, se han generalizado las propias álgebras-tabla (Cf. Arad, Fisman & Muzychuk, 1999).

### *La tabla como objeto matemático*

El estudio del proceso de evolución histórica de las ideas sobre tablas y su connotación de herramienta que acompaña el desarrollo del pensamiento humano, entrega conocimiento sobre la trayectoria de la tabla y su presencia en diferentes culturas como herramienta de almacenamiento, de cálculo y de análisis en ámbitos administrativos, económicos, científicos y/o matemáticos. Las tablas promueven la creación de conocimiento (números, funciones, e.g.) y forjan herramientas para formularlo, transmitirlo y utilizarlo de manera expedita. La revisión de antecedentes del decenio permitió relevar las tablas como un objeto matemático de desarrollo independiente y que incide en otras áreas de la disciplina; su rápido desarrollo como objeto matemático en la actualidad, manifiesta la importancia que tienen las tablas para la Matemática.

La evolución de las tablas permite observarlas como un *objeto protomatemático*, luego, como una herramienta para estudiar otros objetos matemáticos, por tanto, un *objeto paramatemático*, y solo recientemente ha tomado el estatus de *objeto matemático*, uno de estudio en sí mismo. El estudio permitió vislumbrar la evolución epistémica de la tabla en su doble rol de herramienta y de objeto.

### *La definición de los objetos matemáticos surge desde la expresión de su funcionalidad*

En el siglo XVII, John Graunt cambió el uso de la tabla y el desarrollo del pensamiento estadístico al usar las tablas de datos para analizar y clasificar y crear otras nuevas tablas. Estas tablas surgen desde un modelo basado en datos previamente tabulados, para predecir y a la vez documentar científicamente la toma de decisiones gubernamentales. Coincidimos con Cristina Pecharromán-Gómez (2013), cuando sostiene que la definición de los objetos matemáticos surge desde la expresión de su funcionalidad, las propiedades que permiten su discriminación de otros objetos y las relaciones que la ubican en el conocimiento existente. La expresión de estos aspectos crea y permite definir el objeto matemático. Aunque encontramos el álgebra-tabla tratada como objeto matemático recién en este decenio, el objeto matemático tabla se perfilaba como tal desde varios siglos atrás. Pecharromán-Gómez (2013) sostiene que el conocimiento matemático se desarrolla por medio de los nuevos usos dados al objeto desde la funcionalidad que él representa, cuando “se amplía su significado” (p. 130).

Al respecto, podemos considerar las escuelas de escribas, donde las tablas sirvieron como una extensión de la memoria humana individual, y en la misma cultura y zona geográfica, las tablas se transformaron en repositorio de la circulación del saber entre comunidades de escribas. De modo similar, podemos considerar el uso de tablas con roles diferenciados para el trabajo con datos astronómicos, según repositorio de datos, medio de cálculo o herramienta de análisis, funcionalidades de la tabla que

posiblemente permitieron a Ptolomeo utilizar la tabla como representación cuantitativa del modelo, y así mismo como herramienta para evaluar valores específicos del modelo.

Las tablas constituyeron una herramienta útil para registrar datos empíricos, para ordenarlos y para generar información a partir de ellos. Han sido un medio para plasmar y promover la creación de conocimiento, y forjar herramientas que lo formulan, transmiten y utilizan (tabla 2 anexa). Tablas como las del *Almagesto* y las de logaritmos exhiben claramente su condición de aporte al desarrollo de la teoría. Hoy, las tablas mismas son un objeto matemático de desarrollo independiente y que incide en otras áreas de la disciplina; su rápido desarrollo como objeto matemático en la actualidad manifiesta una vez más la importancia que tienen las tablas para la Matemática —al actuar ahora desde el interior de la disciplina—.

En esta trayectoria epistémica lineal de las tablas, podemos observarlas desde su funcionalidad, como registros de memoria, herramientas de cálculo y de análisis. Las tablas originariamente servían para almacenar datos de los censos, o para evitar guardar cálculos en la memoria (tablas de equivalencias de medidas). Aquellas tablas que registraban los datos de ciertos períodos, permitieron avanzar más allá de solo almacenarlos, pues fue posible observar regularidades en los datos a través del tiempo (Friendly & Denis, 2009). La impresión de extensas tablas matemáticas durante un largo período permite dimensionar la exigencia de cálculos más exactos previo al advenimiento de las máquinas de calcular. Las tablas de datos de movimientos astronómicos o de mortalidad son tablas de datos que permitieron analizar comportamientos, conjeturar causas y apoyar la toma de decisiones. Las actuales aplicaciones de tablas responden a la necesidad de realizar cálculos pero sobre todo posibilitan analizar los comportamientos de los datos o los resultados.

Entre las funcionalidades de la tabla, están las computacionales (tablas de multiplicar, baremos), mnemotécnicas (tabla periódica de elementos químicos) y heurísticas (tablas de verdad). Al respecto, las tablas de verdad de Charles Sanders Peirce son tablas para analizar y razonar, al igual que las tablas de contingencia ocupadas por Karl Pearson en 1904, que permiten inferir respecto de la distribución y asociación de dos variables. Principalmente, hoy se utilizan las tablas como herramienta y/o como objeto de conocimiento, y aparecen por doquier —a veces, transparentes, como en periódicos, estados de cuentas, facturas, páginas web, entre otros—.

Aunque algunas funcionalidades de las tablas ostentan más de un rol, los usos de las tablas admiten conjeturar períodos distintivos de funcionalidades de la tabla. Al inicio, y principalmente, como repositorio de memoria; luego, un período de uso mixto, la tabla con la funcionalidad de memoria pero también de cálculo; posteriormente, la tabla con la funcionalidad de memoria y de análisis; y un último período de la tabla usada primordialmente para la funcionalidad de análisis en distintos ámbitos científicos (Estrella, 2014).

### *El conocimiento matemático se desarrolla a partir de la reinterpretación del objeto*

También concordamos con Cristina Pecharromán-Gómez (2013) en que el conocimiento matemático se desarrolla a partir de la reinterpretación del objeto (o creación de uno nuevo) cuando se percibe la funcionalidad que representa en otros contextos. Al respecto, podemos considerar las tablas de medidas antropométricas producidas por Lambert Adolphe

Jacques Quetelet en 1835, que le permitieron inferir un índice que asociaba con sencillez las variables peso y estatura; tal índice fue difundido en un artículo científico de 1984 y notablemente citado<sup>2</sup>, que divulgó el buen comportamiento del índice de Quetelet (o IMC o índice de masa corporal), y desde el cual se crean las tablas antropométricas en la actualidad.

Los estudios sobre el *Almagesto* (Sidoli, 2014) muestran siete tipos de textos. Entre ellos, el tipo *tabla* (lista de valores numéricos derivados del modelo y en general, para uso en cálculos posteriores) y el tipo *algoritmo* (descripción de cómo podemos usar los valores en la tabla para ciertos cálculos, para determinados problemas o para las posiciones aparentes de los astros). Tales tablas no funcionan de forma independiente, sino que trabajan con otros tipos de texto al formar un “nexo tabular”: dadas las propiedades geométricas del modelo y algunos parámetros, los números en la tabla están determinados; en el *Almagesto*, una tabla o serie de tablas entregan una representación numérica de todas las componentes clave del modelo geométrico; un algoritmo describe cómo las diferentes entradas en las tablas pueden utilizarse para calcular los fenómenos que realmente se ven.

Nathan Sidoli (2014) señala que las tablas de Ptolomeo son herramientas y a la vez objetos, esto es, facilitan el cálculo y se organizan con el fin de revelar patrones subyacentes que se evidencian por los números, y que los textos de Hiparco, Diodoro y Menelao contienen tablas matemáticas de un tipo similar: tablas para catalogar información cuantitativa, para facilitar y/o posibilitar el cálculo y desarrollar un algoritmo (desplazándose entre las columnas), para representar la regularidad subyacente entre dos (o más) magnitudes.

Así mismo, al estudiar el rol de las tablas numéricas en Galileo Galilei y Marin Mersenne, Domenico Bertoloni-Meli (2004) observa que ellas se ajustan a diferentes propósitos. Un tipo de tablas presenta datos empíricos pero sin teoría (pesos de materiales que no están relacionados con predicciones y cálculos hechos sobre una teoría). Otro tipo relaciona datos observados con implicaciones teóricas (análisis de las posiciones de 1.572 novae realizado por Galileo, o funciones trigonométricas en astronomía). Un último tipo tendría “propósitos didácticos, filosóficos y estéticos” (Bertoloni-Meli, 2004, p. 188): en algunas tablas de Mersenne la intención no es facilitar el cálculo sino poner de relieve la simetría y la regularidad de ciertos fenómenos (cuerpos que caen) o encontrar una altura a partir del momento de la caída, o invitar a reflexionar sobre las regularidades de la naturaleza.

<sup>2</sup> John S. Garrow y Joan Webster (1984), citado 1.469 veces a mayo de 2016.

### *El conocimiento matemático se desarrolla a partir de la modificación del objeto*

Adicionalmente, coincidimos también con Cristina Pecharrmán-Gómez (2013) en que el conocimiento matemático se desarrolla a partir de la modificación del objeto (o creación de otros), debido al descubrimiento de errores. En cuanto a ello, podemos considerar que el astrónomo danés Tycho Brahe fue tanto usuario como productor de tablas astronómicas, y es considerado el último de los grandes astrónomos antes del telescopio. En 1563, ocurrió una conjunción de planetas predicha por las tablas existentes, pero Brahe observó que todas las predicciones sobre la fecha de la conjunción estaban equivocadas, y se percató de la necesidad de compilar nuevas y precisas observaciones planetarias que le permitieran construir tablas más exactas. Cuando Johannes Kepler sucede a Brahe como matemático imperial en Praga, se basó en los datos de Brahe para finalizar sus propios cálculos, y publicó las tablas Rudolfinas (1627), que superan las inexactitudes de las Alfonsinas y de las Prusianas (elaboradas por Erasmus Reinhold en 1551), y contienen las posiciones de alrededor de mil estrellas medidas por Brahe, 400 más que las registradas por Ptolomeo.

También podemos considerar el momento en que Charles Babbage, 1829, comunicó algunos errores comunes en muchas tablas de logaritmos y comenzó a promover el potencial de las máquinas de calcular; así, desde 1849, se crearon tablas automatizadas obtenidas que proveyeron más exactitud y rapidez. Pensamos que una manera distinta de aquilatar la importancia del uso de tablas es considerar el caso de la *ausencia* de tablas. Tal ejercicio es hipotético en general, pero hay, sin embargo, un ejemplo que se podría invocar: la escuela megárico-estoica definió en el siglo IV a.C. la negación, la conjunción y la implicación en los mismos términos en que se las usa hoy, pero sin el uso de *tablas de verdad*<sup>3</sup>, definidas por Charles Sanders Peirce en 1902 (Anellis, 1995). Parece claro que el uso de esas tablas podría haber simplificado notoriamente la discusión (y posiblemente habría evitado la incompreensión de esa escuela por parte de los historiadores del siglo XIX (Cf. Bocheński, 1961).

<sup>3</sup> La tabla de 1893 de Charles Sanders Peirce es considerada el primer ejemplo conocido de un dispositivo de tabla de verdad en la forma familiar atribuible a un autor identificado, y es anterior no solo las tablas de Emil Post, Ludwig Wittgenstein, y Jan Łukasiewicz de 1920 a 1922, sino a la tabla de Bertrand Russell de 1912, e incluso a las tablas previamente identificadas por Peirce para la lógica triádica del período 1902-1909 (Anellis, 2012).

## Conclusiones: orientaciones didácticas

El tránsito de listas a tablas tomó milenios, lo que según la visión epistemológica genética piagetana podría dar una idea de la dificultad del proceso cognitivo implícito, y desde una visión interaccionista social podríamos considerar que el conocimiento específico “tabla” llega a reconocerse —con períodos de aceptación y de resistencia— como un conocimiento común, desde la interacción y comunicación de las escuelas de escribas de Mesopotamia hasta las comunidades académicas científicas y matemáticas en nuestros días.

Las tablas, aunque generalmente usadas solo como representaciones auxiliares que ayudan al uso de otros registros, poseen sus propias reglas de tratamiento y, como hemos descrito, posibilitan organizar los datos, obtener y relacionar información y producir nuevo conocimiento. Las nuevas tecnologías permiten producir tablas con las que se opera en ellas y entre ellas, ya con una estructura definida y propiedades. Sin embargo, es importante recordar que las tablas han sido un vehículo para plasmar y promover la creación de conocimiento, formularlo, transmitirlo y utilizarlo de manera más expedita.

Yves Chevallard (1991) precisa las *nociones protomatemáticas* y *paramatemáticas* en relación con la enseñanza y el aprendizaje como aquellas que no son enseñadas por el profesor, ni directamente evaluadas, pero, si un alumno carece de ellas, no puede (re)construir el conocimiento y/o utilizarlo, y es incapaz de progresar realmente. Las *paramatemáticas* son aquellas exigidas como herramientas (idea de demostración, e. g.), que se deben utilizar conscientemente como instrumentos para describir otros objetos, pero no son consideradas como objeto de estudio en sí mismo; las *protomatemáticas* se usan para resolver problemas, pero no se las reconoce como instrumento de estudio ni herramienta para este (noción de simplicidad, por ejemplo, indispensable para tratar variados objetos matemáticos; reconocer patrones, necesaria para muchos otros). Por su parte, las *nociones matemáticas* son objetos de conocimiento construidos, enseñables y utilizables en la escuela, y que sirven para el estudio de otros objetos matemáticos.

Una de las contribuciones de este estudio ha sido dar evidencia de la trayectoria de un objeto, la tabla, y de visibilizarla para mostrarla como herramienta y como objeto. Hemos presentado la tabla como objeto protomatemático, luego útil para estudiar otros objetos matemáticos, por tanto, un objeto paramatemático, y recientemente su estatus de objeto matemático, como estudio en sí mismo. La tabla como sistema de signos integra las formas gráficas con la economía de espacio y de texto, y permite diversas lecturas y flujos de las mismas. A su vez, ello permite establecer diversas relaciones entre los objetos tratados, encontrar patrones y regularidades, por lo que activa el ordenamiento de los conocimientos que poseemos de los esquemas clasificatorios y de los sistemas simbólicos. Ello comporta un cambio significativo en los modos de pensamiento, y en la complejidad del mismo. Ahora bien, tal complejidad repercute en los procesos cognitivos involucrados en su uso, lo cual sugiere a su vez la dificultad que presenta el aprendizaje de las tablas.

La investigación aún es escasa en relación con la pertinencia de estas propuestas de enseñanza, son necesarias más investigaciones sobre el aprendizaje y enseñanza de la tabla en su estructura semántica, física y lógica, para considerar los procesos de lectura y escritura y las relaciones que surgen en su interior. Futuras investigaciones desde lo cognitivo, por ejemplo, desde la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990,

2013), podrían reconocer los teoremas en acción que sustentan la conceptualización de la tabla, cuestión que permitiría entregar conocimiento para conformar caminos de aprendizaje que potencien las continuidades y permitan afrontar las rupturas del concepto.

El estudio muestra que las tablas con contenido pictórico preceden al uso de la escritura de números y palabras en la historia de la humanidad, ante lo cual sostenemos que el tratamiento de las tablas puede iniciarse con el aprendizaje escolar exploratorio desde la educación infantil. La enseñanza escolar de las tablas puede integrar su funcionalidad —almacenamiento, cálculo y análisis— con los diferentes tratamientos del objeto —paramatemático y/o matemático—, al incluir, por ejemplo, tareas de concatenación de tablas y operaciones entre ellas.

Enfatizamos que el conocimiento sobre la naturaleza de las tablas recabado en este artículo propicia que la tabla sea considerada como objeto de aprendizaje y de enseñanza en los primeros años de escolaridad, de modo que los estudiantes se apropien paulatinamente de ella como herramienta cognitiva y, que por su parte, los profesores y desarrolladores de currículo y de textos escolares aborden su configuración, sus propiedades, operaciones y diferentes exigencias cognitivas.

### Agradecimientos

Los autores agradecen el financiamiento de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, CONICYT, por medio del Proyecto Fondecyt No. 11140472, *Análisis de datos estadísticos y sus representaciones en los niveles kínder a cuarto grado: el caso de las tablas*, y el del Proyecto Basal FB0003 del Programa de Investigación Asociativa de CONICYT.

### Sobre los autores

**Soledad Estrella** es académica de pregrado y posgrado del Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Investigadora asociada del Centro de Investigación Avanzada en Educación, CIAE.

**Arturo Mena-Lorca** es director de programa de doctorado en didáctica de la matemática. Académico de pregrado y posgrado del Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Investigador del Centro de Investigación Avanzada en Educación, CIAE.

**Raimundo Olfos - Ayarza** es académico de pregrado y posgrado del Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Investigador del Centro de Investigación Avanzada en Educación, CIAE.

### Referencias

- Aaboe, Asger (1964). *Episodes from the Early History of Mathematics*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- Anellis, Irving H. (1995). Peirce Rustled, Russell Pierced: How Charles Peirce and Bertrand Russell Viewed Each Other's Work in Logic, and an Assessment of Russell's Accuracy and Role in the Historiography of Logic. *Modern Logic*, 5 (3), 270-328. Disponible en: <http://www.iu.pui.edu/~arisbe/menu/library/aboutcsp/ANELLIS/csp&br.htm>
- Anellis, Irving H. (2012). Peirce's Truth-functional Analysis and the Origin of the Truth Table. *History and Philosophy of Logic*, 33 (1), 87-97.
- Arad, Zvi; Bangteng, Xu; Chen, Guiyun; Cohen, Effi; Hussam, Arisha Haj Ihia & Muzychuk, Mikhail (2011). *On Normalized Integral Table*

- Algebras (Fusion Rings): Generated by a Faithful Non-real Element of Degree 3*. London: Springer.
- Arad, Zvi & Blau, Harvey I. (1991). On Table Algebras and Applications to Finite Group Theory. *Journal of Algebra*, 138 (1), 137-185.
- Arad, Zvi; Fisman, Elsa & Muzychuk, Misha (1999). Generalized Table Algebras. *Israel Journal Mathematics*, 114 (1), 29-60.
- Bertoloni-Meli, Domenico (2004). The Role of Numerical Tables in Galileo and Mersenne. *Perspectives on Science*, 12 (2), 164-190. Disponible en: <https://pdfs.semanticscholar.org/7b83/70eb76988606f2b0307799a1a5f56caf8927.pdf>
- Blau, Harvey I. & Zieschang, Paul-Hermann (2004). Sylow Theory for Table Algebras, Fusion Rule Algebras, and Hypergroups. *Journal of Algebra*, 273 (2), 551-570. Disponible en: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869303007087>
- Bocheński, Innocentius M. (1961). *A History of Formal Logic*. South Bend, Indiana: University of Notre Dame Press.
- Campbell-Kelly, Martin; Croarken, Mary; Flood, Raymond & Robson, Eleanor (eds.) (2003). *The History of Mathematical Tables. From Sumer to Spreadsheets*. Oxford: Oxford University Press.
- Chevallard, Yves (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor S. A.
- Estrella, Soledad (2014). El formato tabular: una revisión de literatura. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 14 (2), 1-23. Disponible en: <http://www.redalyc.org/pdf/447/44731371016.pdf>
- Estrella, Soledad; Mena-Lorca, Arturo & Olfos, Raimundo (2014). Desarrollo de una taxonomía de comprensión tabular. En Patricia Lestón (ed.). *ALME, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27, 1041-1048. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C., Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Disponible en: <http://www.clame.org.mx/documentos/alme27.pdf>
- Euler, Leonhard (1748/1988). *Introduction to Analysis of the Infinite*. Book I. Berlin: Birkhäuser.
- Friberg, Jöran (2007). *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts. Manuscripts in the Schøyen Collection: Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*. New York: Springer.
- Friendly, Michael & Denis, Daniel J. (2009). *Milestones in the History of Thematic Cartography, Statistical Graphics, and Data Visualization*. Natural Sciences and Engineering Research Council. Canada: Grant OGP0138748. Disponible en <http://www.math.yorku.ca/SCS/Gallery/milestone/milestone.pdf>, <http://www.datavis.ca/milestones/>
- Friendly, Michael & Kwan, Ernest (2003). Effect Ordering for Data Displays. *Computational Statistics & Data Analysis*, 43 (4), 509-539. Disponible en: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.445.2938&rep=rep1&type=pdf>
- Garrow, John S. & Webster, Joan (1984). Quetelet's Index (W/H<sup>2</sup>) as a Measure of Fatness. *International Journal of Obesity*, 9 (2), 147-153.
- Goody, Jack (1976). Civilisation de l'écriture et classification ou l'art de jouer sur les tableaux. *Actes de la Recherche en Sciences Sociales*, 2 (1), 87-101. Disponible en: [http://www.persee.fr/doc/arss\\_0335-5322\\_1976\\_num\\_2\\_1\\_3384](http://www.persee.fr/doc/arss_0335-5322_1976_num_2_1_3384)
- Goody, Jack (1977). *La domesticación del pensamiento salvaje*. Madrid: Ediciones Akal.
- Hallo, William W. (1964). The Road to Emar. *Journal of Cuneiform Studies*, 18 (3), 57-88.
- Hitotsumatsu, Shin; Okada, Yoshio & Machida, Shouchiro (eds.) (2008). *Study with Your Friends Mathematics for Elementary School, 3<sup>rd</sup> grade*, vol. 1, 65-66. Tokyo: Gakko Tosho Co.
- Lardner, Dionysius (1834). Babbage's Calculating Engine. *Edinburgh Review*, 120, 263-327.
- Merzbach, Uta C. (1977). Georg Scheutz and the First Printing Calculator. *Smithsonian Studies in History and Technology*, 36, 1-74. Disponible en <http://hdl.handle.net/10088/2435>
- Neugebauer, Otto & Hoesen, Henry B. van (1959). Greek Horoscopes. En *Memoirs of the American Philosophical Society*. Baltimore, Maryland: J. H. Furst Company.
- Parnas, David Lorge; Asmis, G. J. Kurt & Madey, Jan (1991). Assessment of Safety-Critical Software in Nuclear Power Plants. *Nuclear Safety*, 32 (2), 189-198. Disponible en: [https://www.researchgate.net/publication/242413466\\_Assessment\\_of\\_safety-critical\\_software\\_in\\_nuclear\\_power\\_plants](https://www.researchgate.net/publication/242413466_Assessment_of_safety-critical_software_in_nuclear_power_plants)
- Pearson, Karl (1904). *On the Theory of Contingency and its Relation to Association and Normal Correlation; on the General Theory of Skew Correlation and Non-linear Regression*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Pecharromán-Gómez, Cristina (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *Enseñanza de las Ciencias, Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 31 (3), 121-134. Disponible en: <http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/285795/373798>
- Pedersen, Olaf (1974). Logistics and Theory of Function: An Essay in the History of Greek Mathematics. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences, ARIHS*, 24 (94), 29-50.
- Peirce, Charles Sanders (1931). Division of Signs. En Charles Hartshorne & Paul Weiss (eds.). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, Volume II,

- Chapter 2. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- Peirce, Charles Sanders (1931-1958). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- Proust, Christine (2005). Le calcul sexagésimal en Mésopotamie. Disponible en [http://culturemath.ens.fr/histoire%20des%20maths/pdf/Calcul%20sexa\\_Proust.pdf](http://culturemath.ens.fr/histoire%20des%20maths/pdf/Calcul%20sexa_Proust.pdf)
- Proust, Christine (2008). Quantifier et calculer: usages des nombres à Nippur. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 14 (2), 143-209. Disponible en: [http://smf4.emath.fr/Publications/RevueHistoireMath/14/pdf/smf\\_rhm\\_14\\_143-209.pdf](http://smf4.emath.fr/Publications/RevueHistoireMath/14/pdf/smf_rhm_14_143-209.pdf)
- Proust, Christine (2009). Numerical and Metrological Graphemes: From Cuneiform to Transliteration. *Cuneiform Digital Library Journal*, 1, 1-27. Disponible en: [http://cdli.ucla.edu/files/publications/cdlj2009\\_001.pdf](http://cdli.ucla.edu/files/publications/cdlj2009_001.pdf), [http://www.cdli.ucla.edu/pubs/cdlj/2009/cdlj2009\\_001.html](http://www.cdli.ucla.edu/pubs/cdlj/2009/cdlj2009_001.html)
- Proust, Christine (2010). Mesopotamian Metrological Lists and Tables: Forgotten Sources. En Florence Bretelle-Establet (ed.). *Looking at it from Asia: The Processes that Shaped the Sources of History of Science*, 245-276. New York: Springer.
- Quetelet, Lambert Adolphe Jacques (1835). *Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou Essai de physique sociale*. Paris: Bachelier. Disponible en <https://archive.org/stream/surlhommeetled00quet#page/n5/mode/2up>
- Rashed, Roshdi (2003). History of Science and Diversity at the Beginning of the 21st Century. En *Proceedings of the XXI International Congress of History of Science*, vol. I, 15-29. Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM, Sociedad Mexicana de Historia de la Ciencia y la Tecnología.
- Robson, Eleanor (2001). The Tablet House: A Scribal School in Old Babylonian Nippur. *Revue d'assyriologie et d'archéologie orientale*, 93 (1), 39-66.
- Robson, Eleanor (2003). Tables and Tabular Formatting in Sumer, Babylonia, and Assyria, 2500 BCE-50 CE. En Martin Campbell-Kelly, Mary Croarken, Raymond Flood & Eleanor Robson (eds.). *The History of Mathematical Tables. From Sumer to Spreadsheets*, 19-48. Oxford: Oxford University Press.
- Roegel, Denis (2010). A Reconstruction of the Tables of Briggs and Gellibrand's. *Trigonometria Britannica* (1633). En *The LOCOMAT Project: Recomputing Mathematical and Astronomical Tables. Technical Report*. Nancy, France: LOCOMAT, The LORIA Collection of MAThematical Tables. Disponible en: <http://locomat.loria.fr/briggs1633/briggs1633doc.pdf>
- Ross, Micah T. (2011). Survey of Graphical and Numerical Tables in Egypt. *Oberwolfach Reports*, 12, 650-652. Disponible en: [http://www.academia.edu/7451497/Survey\\_of\\_Graphical\\_and\\_Numerical\\_Tables\\_in\\_Egypt](http://www.academia.edu/7451497/Survey_of_Graphical_and_Numerical_Tables_in_Egypt)
- Schubring, Gert (2005). *Conflicts between Generalization, Rigor and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century France and Germany*. New York: Springer. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, SHMP.
- Schubring, Gert (2011). Conceptions for Relating the Evolution of Mathematical Concepts to Mathematics Learning - Epistemology, History, and Semiotics Interacting. *Educational Studies in Mathematics*, 77 (1), 79-104.
- Sidoli, Nathan (2014). Mathematical Tables in Ptolemy's Almagest. *Historia Mathematica*, 41 (1), 13-37. Disponible en: [http://individual.utoronto.ca/acephalous/Sidoli\\_2014b.pdf](http://individual.utoronto.ca/acephalous/Sidoli_2014b.pdf)
- Tournès, Dominique (2000). Pour une histoire du calcul graphique. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 6, 127-161. Disponible en: [http://www.numdam.org/article/RHM\\_2000\\_\\_6\\_1\\_127\\_0.pdf](http://www.numdam.org/article/RHM_2000__6_1_127_0.pdf)
- Tournès, Dominique (2011). What is a Numerical Table? Milestones for a Historical Research Project. *Oberwolfach Reports, European Mathematical Society*, 8 (1), *Mini-Workshop: History of Numerical and Graphical Tables*, 643-645. Disponible en: [https://www.academia.edu/30940430/What\\_is\\_a\\_numerical\\_table\\_Milestones\\_for\\_a\\_historical\\_research\\_project](https://www.academia.edu/30940430/What_is_a_numerical_table_Milestones_for_a_historical_research_project)
- Tournès, Dominique (2014). Mathematics of Engineers: Elements for a New History of Numerical Analysis. En *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. 4, 1255-1273. Disponible en: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01479456/document>
- Vergnaud, Gérard (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, RDM*, 10 (23), 133-170.
- Vergnaud, Gérard (2013). Pourquoi la théorie des champs conceptuels? *Infancia y Aprendizaje*, 36 (2), 131-161. Disponible en: <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1174/021037013806196283>
- Wiese, Heike (2003). Iconic and Non-iconic Stages in Number Development: the Role of Language. *Trends in Cognitive Sciences*, 7 (9), 385-390.
- Wussing, Hans (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas*. Madrid: Siglo XXI.
- Youshkevitch, Adolph-Andrei Pavlovich (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *Archive for History of Exact Sciences*, 16 (1), 37-85.



## Anexo

Tabla 2

Algunos hitos importantes de las tablas y sus posibles funcionalidades

(M = almacenamiento de memoria C = herramienta de cálculo A = herramienta de análisis)

Años	Creador (es)	Desarrollo	Funcionalidad
4500 a. C.	Babilonios	Censo de población a escala nacional	M
2600 a. C.	Babilonios	Primera tabla matemática de datos en Shuruppag, tiene tres columnas con diez filas: con lista de medidas de longitud y otra para el área	M
2000 a.C.	Egipcios	Tablets de Akhmim, o de El Cairo, contienen listas y algunos problemas numéricos de equivalencia de medidas de capacidad	M
1800 a.C.	Babilonios	Tabla conocida como Plimpton 322, con 4 columnas y 15 filas de números	M
366-335 a.C.	Desconocido	Tabla de Peutinger: mapa de ruta del conjunto del mundo romano con distancias	M
100 a.C.	Griegos	Tabla de Keskintos, una tabla con cálculos de movimientos de planetas	M-A
2 d.C.	Chinos	Primer registro completo del número de familias y población del Imperio	M
100 d.C.	Egipcios	Tablets Stobart, cuatro tablas con los registros anuales de los movimientos de cinco planetas	M-A
150 d.C.	Ptolomeo	Primera tabla trigonométrica con datos y cálculos en 360 filas y tres columnas	M-A
267 o 276 d.C.	Desconocido	Tablas de barro de Astorga: contienen vías de caminos y distancias en el noroeste de la península Ibérica	M
1252	Astrónomos islámicos	Tablas Alfonsinas son tablas astronómicas realizadas por iniciativa de Alfonso X el Sabio, para actualizar las Tablas de Toledo	M-A
1494	Luca Pacioli	Primer sistema de registro contable integral, organizado por cuentas y todas ellas equilibradas	M-C
1551	Erasmus Reinhold	Tablas Prusianas son tablas astronómicas que trataron de actualizar a las Alfonsinas y que diseminaron los métodos de cálculo de Copérnico	M-C-A
1600	Alemania	Tablas de datos empíricos, publicaciones de tablas de números comienzan a aparecer. "Die Tabellen-Statistik", como una rama de la estadística dedicada a la descripción numérica de los hechos	M-A
1614	John Napier	Tablas de senos y cosenos con sus respectivos logaritmos	C-A
1627	Tycho Brahe – Johannes Kepler	Tablas Rudolfinas, tablas astronómicas que contienen las posiciones de alrededor de mil estrellas medidas por Tycho Brahe, 400 más que Ptolomeo	M-A
1660	John Graunt	Primera tabla de vida (life table) con las cifras de mortalidad de Londres	A
1671	François Barrême	Libro de tablas matemáticas prácticas, destinadas a evitar cálculos engorrosos en el ámbito monetario ( <i>barrême</i> devino en <i>baremo</i> )	C
1671	Jan de Witt	Tablas de mortalidad para determinar científicamente el precio de compra de rentas vitalicias	C-A
1693	Edmond Halley	Primeras tablas de mortalidad reales, que contienen las edades de muerte de una muestra de individuos bajo condiciones estables	C-A

Continúa

1766	Tobias Mayer	Tablas de distancias lunares para determinar con precisión las posiciones en el suelo, usando una fórmula de Leonhard Euler	C-A
1767	Nevil Maskelyne	Tablas de distancias lunares con la distancia de la Luna desde el Sol y las estrellas nuevas. Luego se convirtió en el almanaque estándar para los navegantes de todo el mundo, ya que llevó a la adopción internacional del Tiempo Medio de Greenwich como estándar internacional	C-A
1779	Johann Lambert	Primera visualización semigráfica que combina formatos tabulares con gráficos	A
1797	Louis Pouchet	Primer intento sistemático de construcción de tablas gráficas de doble entrada	A
1835	Lambert Adolphe Jacques Quetelet	Tablas de frecuencia sobre datos de población en las cuales basa su concepto de "hombre promedio" (pero sin considerar las características marginales)	A
1844	Charles Minard	Tabla-gráfica para mostrar el tráfico comercial	A
1846	Augustus de Morgan	Tabla con columnas que representaban entradas de dinero (débito) y las filas salidas de dinero (crédito) de tal manera que la primera fila y la primera columna correspondían entre sí	C-A
1856	Florence Nightingale	Tablas con datos de estadística para tomar decisiones respecto a epidemiología e higiene sanitaria	A
1860	Ramón Picarte	Tabla de logaritmos a 10 decimales (superior a la Tabla de Jerome de Lalande)	C-A
1869	Dmitri Mendeléyev	Tabla periódica de los elementos	A
1883	Ramón Picarte	Grandes tablas de logaritmos con doce decimales	C-A
1883	Toussaint Loua	Primera tabla semigráfica que muestra una tabla de datos con niveles de sombreado	A
1893	Charles Sanders Peirce	Primera tabla de verdad, o tabla de valores de verdad, que muestra el valor de verdad de una proposición compuesta	A
1898	Ladislaus von Bortkiewicz	Tablas de clasificación cruzada de las muertes de soldados por patadas de caballos de la caballería prusiana, para argumentar la Ley de los pequeños números (Poisson distribution)	A
1904	Karl Pearson	A partir —y con— las tablas de contingencia desarrolla la teoría para distribuciones de frecuencia multivariadas	A
1912	Bertrand Russell	Tabla de verdad (su versión desde el atomismo lógico)	A
1921	Ludwig Wittgenstein	Tabla de verdad, o tabla de valores de verdad (se torna más popular, con el aspecto actual)	A
1979	Daniel Bricklin y Bob Frankston	VisiCalc, el primer programa de hoja de cálculo moderno que manipula datos numéricos y alfanuméricos dispuestos en forma de tablas compuestas por celdas	A
1982	Microsoft	Aplicaciones en formato tabla, conocidas como hojas de cálculo, para realizar cálculos matemáticos, financieros y contables mediante fórmulas	A
2004	Edward Tufte	Sparklines son diferentes y diminutos gráficos insertados en tablas con información condensada en menos espacio y más intuitiva "datos intensos, diseño simple, gráficos del tamaño del texto"	A

Fuente: Soledad Estrella (2014), Soledad Estrella, Arturo Mena-Lorca & Raimundo Olfos (2014)