

# ESTADO DE LA CUESTIÓN ACERCA DEL USO DE LA LÓGICA DIFUSA EN PROBLEMAS FINANCIEROS\*

*Santiago Medina Hurtado\*\**

---

\* Artículo de revisión producto del desarrollo de la tesis de doctorado. El artículo se recibió el 19-10-2006 y se aprobó el 05-12-2006.

\*\* Candidato a doctor en Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad Complutense de Madrid, España. Especialista en Finanzas, Preparación y Evaluación de Proyectos, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia, 1995. Ingeniero industrial, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, Colombia, 1993. Coordinador de posgrados de la EIO, Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín. Pertenece al Grupo de Investigación en Finanzas Computacionales y al Grupo de Investigación en Inteligencia Artificial. Correo electrónico: smedina@unalmed.edu.co

## RESUMEN

Este trabajo recopila el estado actual de las aplicaciones de la teoría de conjuntos difusos y los sistemas de inferencia difusos en la solución de problemas financieros, específicamente en el campo de la teoría de portafolios, la evaluación de proyectos, el análisis de crédito, el análisis técnico y el análisis financiero de la firma, lo cual permite incorporar la incertidumbre en el análisis de manera distinta a como la hace la teoría de probabilidades. Además, se realiza una crítica de los modelos tradicionales de toma de decisiones financieras, que no captan de forma clara las dinámicas del comportamiento de los mercados. Con este enfoque es posible recoger los fenómenos económicos y financieros con toda su imprecisión y tratarlos matemáticamente; además, incorporar en el análisis el criterio experto, lo que hace que los modelos desarrollados sean una verdadera herramienta de apoyo a la toma de decisiones. Sin embargo, los desarrollos teóricos actuales tienden a fusionar tecnologías basadas en conocimiento para solucionar múltiples problemas de ingeniería y esto abre todo un campo de investigación para su aplicación a las ciencias sociales y económicas.

**Palabras clave:** conjuntos difusos, sistemas de inferencia difusos, sistemas expertos difusos, análisis financiero.

## ABSTRACT

***Reviewing the Status of the Art of Using Diffuse Logic in Financial Problems***

This paper discusses the current status of the use of diffuse set theory applications and diffuse inference systems in solving financial problems, specifically in the areas of company portfolio theory, project assessment, credit analysis, technical analysis, and financial analysis. They enables incorporating uncertainty into the analysis in a different manner from the one used in the theory of probabilities. The paper also includes a critique of traditional financial decision-making models, which do not clearly capture market behavior dynamics. Using this new approach, it is possible to gather economic and financial phenomena along with all of their inaccuracies and treat them mathematically. Furthermore, expert criteria may be incorporated into the analysis, thus making the models developed true support tools for decision making. However, present-day theoretical developments tend to merge knowledge-based technologies to solve many engineering problems and that opens a whole new area of research to apply them to Social Sciences and Economic Sciences.

**Key words:** Diffuse sets, diffuse inference systems, diffuse expert systems, financial analysis.

## Introducción

Los procesos del pensamiento que se desarrollan en el cerebro humano son originados por las sensaciones que llegan a través de nuestros sentidos. Mediante el lenguaje, el hombre expresa, traduce y representa los fenómenos naturales y humanos; sin embargo, el lenguaje presenta vacíos de precisión o excesos de sobreentendimiento, por lo cual se necesitan técnicas que precisen y depuren la información para llegar al conocimiento. Dichas técnicas se basan en la aplicación del método científico, expresado en un lenguaje matemático. Este es el método que el ser humano utiliza para aproximarse al mundo desde que Arquímedes lo estrenó en la física (287-212 a. C.), fundamentado en la lógica del pensamiento aristotélico (384-322 a. C.), que formalizó los principios del pensamiento humano.

La mayoría de los procedimientos y herramientas que se utilizan actualmente para manipular la información se basan en los principios de la lógica aristotélica formalizada de manera matemática por las leyes de Boole y de Morgan, durante el siglo XIX; campo que se conoce como *lógica matemática*. Uno de sus principios fundamentales es la ley de la no contradicción o del tercero excluido, lo cual define un sistema de lógica binaria (la pertenencia completa o no a un conjunto) y que posibilitó todo el desarrollo científico y tecnológico de la sociedad.

Tanto la lógica moderna como la clásica asumen en sus formas más corrientes que cualquier proposición bien elaborada puede ser o verdadera o falsa. En años recientes se han desarrollado sistemas de la denomi-

nada lógica combinatoria: una afirmación puede tener un valor distinto a verdadero o falso. En algunos supuestos es sólo un tercer valor neutro; en otros, un valor de probabilidad expresado como una fracción que oscila entre 0 y 1 o entre -1 y +1.

El origen de la lógica difusa se encuentra en el análisis de la vaguedad y su relación con la lógica clásica, que realizaron a comienzos del siglo XX Jan Lukasiewicz y Max Black. Posteriormente, Lofti Zadeh, a mediados de la década de los sesenta, sienta las bases de la lógica polivalente y del cálculo de la incertidumbre, mediante la definición de conjunto difuso a partir de la idea de pertenencia gradual, denominada por el propio Zadeh *teoría de la posibilidad*, lo cual proporciona una base matemática para modelar el razonamiento humano. Durante más de 15 años, los investigadores hicieron hincapié en la teoría de los conjuntos difusos e incluyeron en el análisis la aritmética, el álgebra, la programación lineal, la programación multiobjetivo, la topología, el cálculo diferencial e integral, la geometría, etc., como un preámbulo a las aplicaciones industriales.

Desde el punto de vista de los fenómenos socioeconómicos, es necesario contar con modelos que capturen de una manera más precisa la realidad, ya que ésta involucra imprecisión, falta de definición, inexistencia de bordes, subjetividad, clasificaciones no definidas, etc., es decir, se manipulan conceptos y variables que no encuadran con la lógica clásica y, sin embargo, para su análisis es preciso utilizar la matemática.

Los modelos matemáticos desarrollados poseen simplificaciones importantes, lo cual

significa reducir las cosas a un lenguaje determinado y codificado de reglas rígidas con lo cual tratamos de entender la realidad. Estos modelos pueden trabajar bien bajo determinadas parcelas del conocimiento; sin embargo, la aplicación del método científico, el avance de la técnica y la existencia de paradigmas nos recuerdan que tarde o temprano un modelo se volverá obsoleto y debe sustituirse por otro, tal como ha ocurrido con el desarrollo del conocimiento científico.

En el campo de la toma de decisiones, las relaciones entre los conceptos o variables que definen el problema bajo estudio no están definidas en forma precisa, y esto se debe a la imprecisión del lenguaje natural, a la naturaleza del fenómeno o a la calidad de la información utilizada. En este sentido, en muchas ocasiones no se cuenta con la información suficiente para aplicar modelos matemáticos convencionales, lo que ha obligado a la búsqueda de modelos alternativos.

Actualmente, en el modelado de problemas de decisión se busca que el instrumental analítico sea consistente con los sistemas de valoración humanos y su percepción, más que con el formalismo y exactitud matemática, ya que los sistemas de valoración humanos son imprecisos, vagos (*fuzzy*-difuso) y tienen el problema de que no pueden ser capturados de forma directa por la precisión matemática convencional.

Precisamente, en la búsqueda de modelos que tengan en cuenta estas realidades surge la *lógica difusa* como un modelo matemático que permite utilizar conceptos relativos a la realidad siguiendo patrones de comportamiento similares al pensamiento humano.

En el campo de la toma de decisiones (y en general en la vida real) existen hechos que no se pueden definir como totalmente verdaderos o totalmente falsos, sino que tienen un grado de verdad o falsedad que puede variar de 0 a 1. La lógica clásica no es la más adecuada para tratar este tipo de razonamientos, ya que excluye por completo una tercera posibilidad (o más) entre estos dos valores. La lógica difusa rompe con el principio de la no contradicción o del tercero excluido, es decir, un objeto de estudio puede pertenecer a la vez a conjuntos contrarios en cierto grado (ser y no ser al tiempo).

Un sistema de lógica difusa o lógica borrosa convierte variables de entrada (cuantitativas y cualitativas) en variables lingüísticas a través de funciones de pertenencia o conjuntos difusos, los cuales son evaluados mediante un conjunto de reglas difusas del tipo *si-entonces*. Luego las salidas del sistema se convierten en valores nítidos (*crisp*) mediante un proceso de concreción (*defuzzification*), que permiten brindar información para la toma de decisiones. Un sistema de lógica difusa utiliza cualquier tipo de información y la procesa de manera similar que el pensamiento humano; por ello, los sistemas de lógica difusa son adecuados para tratar información cualitativa, inexacta e incierta, que permiten, además, tratar con procesos complejos, lo que la hace una alternativa interesante para modelar problemas de toma de decisiones.

Los sistemas de lógica difusa se han utilizado exitosamente en un gran número de aplicaciones como controladores para equipos industriales, negocios, economía, sistemas de soporte a la decisión, medicina, psicología,

etc. Los mayores progresos en la implementación de aplicaciones industriales se lograron cuando a los sistemas de lógica difusa se integraron otras técnicas como las redes neuronales artificiales y los algoritmos genéticos, los cuales permiten la optimización del sistema difuso. Actualmente, todas estas técnicas se combinan en lo que se conocen como sistemas híbridos, conexionistas o, en general, técnicas de *soft computing*.

Las redes neuronales artificiales imitan el comportamiento de las células nerviosas del cerebro y son utilizadas en muchos tipos de problemas. El proceso es llevado a cabo por una red formada por unidades de procesamiento de información llamadas *neuronas artificiales*, conectadas entre sí mediante enlaces (conexiones sinápticas) que especifican la dirección del flujo de la señal desde una neurona hasta otra; además, tienen asociado un peso (peso sináptico) que determina la fuerza de la conexión entre neuronas. El desarrollo teórico de las redes neuronales artificiales data de 1943, cuando McCulloch y Pitts proponen su modelo neuronal. Actualmente existe una gran cantidad de modelos de redes propuestos como solución a problemas específicos. Para una revisión de modelos de redes neuronales artificiales consúltese a Simon Haykin (1994).

El progreso en la implementación exitosa de las redes neuronales artificiales en procesos industriales a partir de los años ochenta permitió la integración con los sistemas difusos, ya que en ambas técnicas se realiza un procesamiento paralelo de la información. Se pretendía aprovechar las características que tienen las redes neuronales artificiales, como la tolerancia a datos inexactos, la capacidad

de aprender y adaptarse mediante algoritmos simples y la capacidad de generalización en la optimización de los sistemas difusos.

La utilización de conceptos evolutivos, como la selección, el apareamiento y la mutación para resolver problemas complejos de optimización fue introducida por Jhon Hollan en los años sesenta. Los algoritmos genéticos le permiten a una población evolucionar a través de la competencia (supervivencia del más fuerte) bajo condiciones controladas (recombinaciones y mutación). El interés del uso de *algoritmos genéticos* en aplicaciones industriales se ha incrementado debido a las siguientes características:

- Considera muchos puntos en el espacio de soluciones y tiene poca probabilidad de converger en un mínimo local.
- Trabaja con cadenas de caracteres que representan el conjunto de parámetros y no los parámetros en sí mismos, lo que le da mayor flexibilidad que otros métodos de búsqueda.
- Usa reglas probabilísticas para guiar la búsqueda en vez de reglas determinísticas.
- Algunas de las aplicaciones de algoritmos genéticos reportadas en la literatura incluyen: diseño de controladores de lógica difusa, programación de trabajos, aprendizaje de la topología y los pesos de redes neuronales y reconocimiento de patrones de comportamiento.

En los años setenta, la lógica difusa fue combinada con sistemas expertos para producir sistemas que luego fueron implementados exitosamente en el ámbito industrial. Ambas técnicas se basan en reglas del tipo *si-en-*

*tonces*; sin embargo, la lógica difusa permitió tratar las reglas de una manera diferente a como lo hacían los sistemas expertos tradicionales, los cuales evalúan el cumplimiento de cada regla de manera completa, es decir, cada regla se cumple o no de manera completa, en el sentido de la lógica binaria. Con la lógica difusa, en cambio, las reglas pueden cumplirse de manera parcial, lo que amplía el abanico de respuesta del sistema y se acerca más al modo de razonamiento humano. En general, los sistemas expertos difusos han permitido el desarrollo de sistemas de soporte para la toma de decisiones con aplicaciones en los sectores industrial, de negocios, de diagnóstico, entre otros.

Este artículo se centra en realizar una revisión del estado de la cuestión de la teoría de los conjuntos difusos y los sistemas de inferencia difusos en la solución de problemas financieros. Primero se hace una pequeña explicación de la lógica difusa y de los sistemas de inferencia difusos y, posteriormente, se describen algunas aplicaciones específicas en portafolios de inversión, matemática financiera y presupuesto de capital, análisis técnico, análisis de crédito y análisis financiero, las cuales están acompañadas de amplia bibliografía.

## **1. Conjuntos difusos y sistemas de lógica difusa (FIS)**

La creciente necesidad de dar solución apropiada a problemas de índole político, económico, social, administrativo y financiero, que parten de percepciones estrictamente humanas y que como tal no cuentan con la suficiente información para aplicar modelos matemáticos convencionales, ha obligado a la

búsqueda de modelos alternativos que permitan llegar a valores numéricos a partir de variables expresadas en términos lingüísticos. La lógica difusa aparece como una de las herramientas que permite hacer esta transformación y que proporciona una visión diferente a la que se da en la lógica formal o clásica.

La lógica clásica, o lógica bivaluada, no resulta adecuada cuando se trata de describir hechos que no son totalmente verdaderos o totalmente falsos, ya que excluye por completo posibilidades entre estos dos valores. La lógica difusa, en cambio, permite utilizar conceptos relativos de la realidad, definiendo grados variables de pertenencia y siguiendo patrones de razonamiento similares a los del pensamiento humano (Kosko, 1995).

El concepto de conjunto difuso fue originalmente propuesto por Zadeh, en 1965, y luego Mandani (1977) extendió el concepto a sistemas de lógica difusa que actualmente son un importante tema de investigación y desarrollo de aplicaciones en muchas áreas del conocimiento y la técnica.

La lógica difusa está relacionada y fundamentada en la teoría de los conjuntos difusos, según la cual el grado de pertenencia de un elemento a un conjunto está determinado por una función de pertenencia que puede tomar todos los valores reales comprendidos en el intervalo (0, 1) (Jang, Mizutani y Sun, 1997; Kulkarni, 2001; Kasabov, 1998; Kosko, 1995). De esta manera, mientras que en el marco rígido de la lógica formal la utilidad de una empresa, por ejemplo, es baja y le da un valor de cero, o es alta y le da un valor de uno, para la lógica difusa son posibles también todas las condiciones intermedias de utili-

dad como “muy baja”, “relativamente alta”, “media”, “ligeramente baja”, etc.

Las condiciones extremas o absolutas asumidas por la lógica formal son sólo un caso particular dentro del universo de la lógica difusa. Esta última permite ser relativamente imprecisa en la representación de un problema y aun así llegar a la solución correcta (Kosko, 1995).

Con la lógica difusa se abre la posibilidad de solucionar problemas expresados desde la perspectiva humana y que por esta simple condición no pueden tener una solución única desde lo falso o verdadero, sino que pueden tomar condiciones intermedias para dar respuestas satisfactorias a los problemas bajo estudio.

Actualmente existe una amplia literatura sobre la teoría de los conjuntos difusos aplicada a todos los campos de la matemática, como la aritmética, el álgebra, el cálculo diferencial e integral, los sistemas de ecuaciones, la topología, la econometría, la programación lineal, la programación multiobjetivo, la programación dinámica, las desigualdades, las funciones, la geometría plana, la trigonometría, la teoría probabilística (Zadeh, 1968), etc. Para una introducción a la matemática difusa consúltese Buckley (2002). Para un tratado completo de la fundamentación matemática de los conjuntos difusos puede consultarse a Kaufman y Gil Aluja (1990), Trillas (1980), Kaufman (1982) o Jang et al. (1997).

Los sistemas de inferencia difuso tipo Mandani (1977; Mandani y Gaines, 1981) fueron los primeros sistemas en ser probados de manera práctica como aproximador universal de funciones. Posteriormente

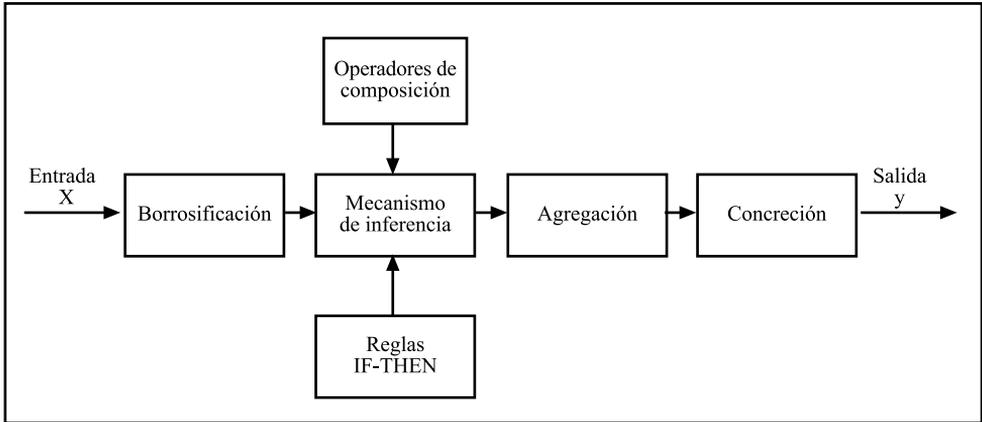
(Kosko, 1994; Wang, 1992) se estableció de manera formal que cualquier relación entre variables de entrada y salida puede ser aproximada por medio de un sistema difuso construido en términos lingüísticos con alto grado de exactitud también llamado aproximador universal (Kosko, 1994; Wang, 1992).

Un sistemas de inferencia difuso (FIS) es una forma de representar conocimientos y datos inexactos en forma similar a como lo hace el pensamiento humano (Jang et al., 1997). Un FIS define una correspondencia no lineal entre una o varias variables de entrada y una variable de salida; esto proporciona una base desde la cual pueden tomarse decisiones o definir patrones. Las etapas que constituyen el desarrollo de un FIS se muestran en el Gráfico 1 y se explican a continuación.

Los pasos esenciales para el diseño de un sistema difuso son (Jang et al., 1997; Kasavov, 1998; Kosko, 1994):

- i) Identificación del tipo de problema y el tipo de sistema difuso que mejor se ajusta a los datos.
- ii) Definición de variables de entrada y salida, sus valores difusos y sus funciones de pertenencia (borrosificación o parametrización de variables de entrada y salida).
- iii) Definición de la base de conocimiento o reglas difusas.
- iv) Obtención de salidas del sistema mediante la información de las variables de entrada utilizando el sistema de inferencia difuso, el cual utiliza operadores de composición.
- v) Traslado de la salida difusa del sistema a un valor nítido o concreto mediante un sistema de *defusificación*.
- vi) Ajuste del sistema validando los resultados.

Gráfico 1  
**Sistema de inferencia difuso (FIS)**



Fuente: adaptado de Kulkarni (2001).

La aplicación de modelos basados en lógica difusa permite abordar de manera efectiva la creación de sistemas soporte para la toma de decisiones, ya que brinda la capacidad de extraer datos de forma práctica, y a través de las capacidades analíticas y la experiencia de los evaluadores descubrir relaciones significativas entre ellos. Los modelos de lógica difusa son altamente flexibles, más tolerantes a la imprecisión de los datos y pueden trabajar con funciones no lineales de diversa complejidad; así mismo, no están obligados por presunciones estadísticas acerca de las características de los datos y sus distribuciones de probabilidad y se les puede modificar fácilmente, dependiendo de la solución requerida del problema.

Cuando se cuenta con información imprecisa e insuficiente, usar instrumentos estadísticos no es suficiente para obtener resultados significativos. La lógica difusa surge precisamente para tratar con este tipo de problemas y lograr darles una solución

óptima. De esta forma, una combinación entre un sistema de lógica difusa y la experiencia o conocimiento que tienen los encargados de tomar las decisiones es una excelente manera de obtener buenos resultados (Kosco, 1995). A continuación se explican los pasos que integran un FIS:

### 1.1 Proceso de borrosificación o fusificación

En esta primera etapa se definen las variables tanto de entrada como de salida del sistema (variables lingüísticas), sus valores lingüísticos y sus funciones de pertenencia. Este proceso también es llamado parametrización. La expresión *variables lingüísticas* se refiere a conceptos o variables que pueden tomar valores ambiguos, inexactos o poco claros –por ejemplo, la variable lingüística *rentabilidad* puede tomar los valores lingüísticos “baja, media y alta”, que tienen un significado semántico y que se pueden expresar numéricamente por medio de funciones de pertenencia–.

De esta manera, se puede hablar formalmente de conjunto difuso como:

Sea:  $X$  el universo de valores que puede tomar la variable  $x$ , un elemento cualquiera de  $X$

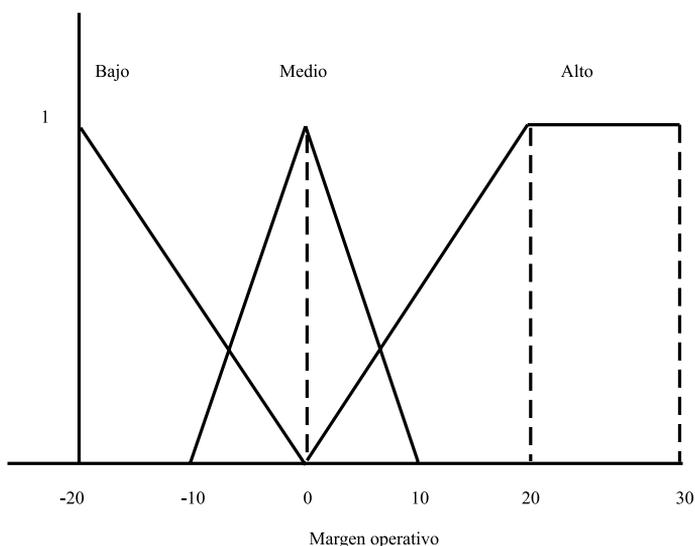
$A \subset X$ : colección de elementos  $x$  pertenecientes a  $X$

Si  $X$  es una colección de objetos denotados genéricamente por  $x$ , entonces el conjunto difuso  $A$  en  $X$  es definido como el conjunto de pares ordenados:

$$A = \{[x, \mu_A(x)] / x \in X\}$$

Donde  $\mu_A(x)$  se denomina función de pertenencia del conjunto difuso  $A$ . Dicha función de pertenencia otorga a cada elemento de  $X$  un grado de membresía entre 0 y 1. Los tipos de funciones de pertenencia comúnmente utilizados son: la función triangular, la trapezoidal, la gaussiana, la sigmoïdal y la generalizada de Bell. Éstas se escogen de forma tal que se consiga una adecuada correspondencia entre los espacios de entrada y salida de un sistema. El Gráfico 2 presenta tres conjuntos difusos con valores lingüísticos bajo, medio, alto para la variable margen operativo.

Gráfico 2  
Conjuntos difusos y funciones de pertenencia



Fuente: elaboración propia.

El proceso de parametrización consiste en definir funciones de pertenencia para cada uno de los valores lingüísticos definidos para las variables de entrada y salida del sistema. En general, los valores lingüísticos son de-

finidos con base en la opinión de expertos, quienes se distribuyen a lo largo del universo del discurso (rango posible de valores que puede tomar la variable).

Cuando hay información previa de la variable de interés, la distribución de los conjuntos difusos en el universo del discurso puede basarse en un análisis estadístico previo de la serie histórica conjugada con la opinión de los expertos, mientras que para aquellas variables que caracterizan posiciones subjetivas (por ejemplo, propensión a tomar riesgos, calidad del equipo administrativo, etc.) puede definirse una escala de calificación donde los expertos ubican los niveles o valores lingüísticos de la variable y a los que se le asocian los conjuntos difusos.

## 1.2 Reglas difusas *si-entonces*

Estas reglas especifican el vínculo entre las variables de entrada y salida del sistema. Las relaciones difusas determinan el grado de presencia o ausencia de asociación o interacción entre los elementos de dos o más conjuntos. La regla *si-entonces* tipo Mandani asume la forma:

Si  $X_1$  es  $A_1$  y  $X_2$  es  $A_2$  y... y  $X_k$  es  $A_k$ , entonces Y es B

Donde  $A_1, A_2, \dots, A_k, B$  son valores lingüísticos definidos mediante conjuntos difusos para las variables lingüísticas en el universo del discurso  $X_1, X_2, \dots, X_k$  y Y respectivamente. La parte de la regla " $X_1$  es  $A_1$ " es llamada el antecedente o premisa y la parte "Y es B" es llamada el consecuente o conclusión.

La regla anterior define una relación borrosa en el espacio  $k+1$  dimensional caracterizada por una función de pertenencia  $\mu_{A_k \rightarrow B}(X_1, X_2, \dots, X_k, Y) \in [0, 1]$ .

La base de las reglas borrosas, en general, se obtiene del conocimiento de expertos median-

te entrevistas, cuestionarios o técnicas de panel; sin embargo, en muchas ocasiones no se tiene acceso a dichos expertos, pero se cuenta con una base de datos de las variables de entrada-salida. En situaciones como ésta, es posible generar reglas borrosas que definan una adecuada correspondencia entre las variables de entrada y salida.

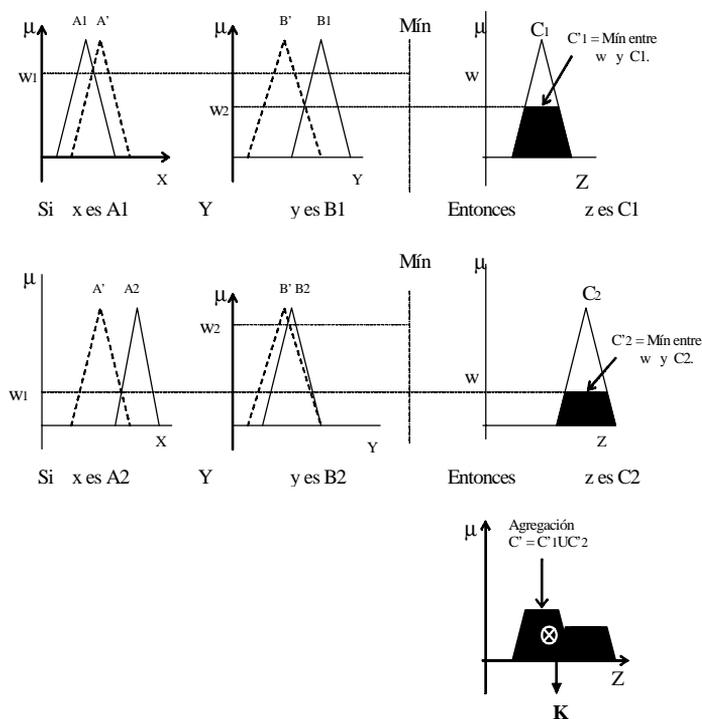
La interpretación de una regla *si-entonces* involucra dos pasos: (1) evaluar el antecedente mediante la aplicación de cualquier operador difuso y (2) implicar o aplicar el resultado del antecedente al consecuente. Esto se hace evaluando la función de pertenencia  $\mu_{A \rightarrow B}(X_1, X_2, \dots, X_k, Y)$ . Es decir, se trata de evaluar la activación de una regla (activación del consecuente) en función del grado de cumplimiento del antecedente. Para realizar dicha tarea se usan operadores de composición de conjuntos difusos y se aplica un sistema de inferencia (también llamado razonamiento difuso o razonamiento aproximado), el cual puede verse para el caso de dos reglas en el Gráfico 3.

## 1.3 Operaciones de composición

Las operaciones básicas realizadas con conjuntos difusos son la unión, la intersección, la complementación, el producto cartesiano y el coproducto cartesiano. Dichas operaciones se llevan a cabo mediante la aplicación de algún operador binario clasificado como T-normas (para operaciones de intersección) o S-normas (para operaciones de unión). (Kaufman y Gil Aluja, 1990; Trillas, 1980; Jang et al., 1997; Kulkarni, 2001; Kasabov, 1998).

Debido a que las reglas difusas definen una relación difusa en el espacio  $k+1$ -dimensio-

**Gráfico 3**  
**Sistema de inferencia difuso**



Fuente: adaptado de Jang (1997).

nal, caracterizado por una función de pertenencia  $\mu_{A_k \rightarrow B}(X_1, X_2, \dots, X_k, Y) \in [0; 1]$ , las operaciones básicas con conjuntos difusos son relaciones de implicación utilizadas para derivar las funciones de pertenencia de conjuntos difusos n-dimensionales. Por otra parte, también permiten definir operaciones de composición para derivar relaciones difusas entre diferentes espacios producto, es decir, si tenemos relaciones para los espacios producto  $X \times Y$  y  $Y \times Z$ , podemos a través de operaciones de composición obtener la relación del espacio producto  $X \times Z$ .

Se han sugerido diferentes operaciones de composición para las relaciones difusas, las

más conocidas son la composición Max-Min, propuesta por Zadeh, y la composición Max-producto (Kasabov, 1998).

### 1.5 Mecanismos de inferencia (razonamiento aproximado)

El razonamiento aproximado es un procedimiento de inferencia usado para derivar conclusiones desde un conjunto de reglas difusas tipo *si-entonces* y los datos de entrada al sistema mediante la aplicación de relaciones de composición Max-Min o Max-producto. Es decir, es un mecanismo que permite inferir un valor difuso  $B'$  cuando se

tienen unas entradas difusas en el espacio k-dimensional  $A'_k$  y se ha definido una relación de implicación  $R: A'_k \rightarrow B$ , esto es:

$$B' = A'_k \circ (A'_k \rightarrow B)$$

Por ejemplo, considerando las dos reglas siguientes:

Regla 1: si  $x$  es  $A_1$  y  $y$  es  $B_1$ , entonces  $z$  es  $C_1$ , si no,

Regla 2: si  $x$  es  $A_2$  y  $y$  es  $B_2$ , entonces  $z$  es  $C_2$ .

Se trata de inferir el resultado  $C'$  a partir de las entradas:  $x$  es  $A_i$  y  $y$  es  $B_j$  y el grupo de reglas anteriores.

Donde:

$i$  = valores lingüísticos de la variable  $x$ .

$j$  = valores lingüísticos de la variable  $y$ .

Se puede expresar cada regla en forma general como  $R_1=(A_1 \times B_1) \rightarrow C_1$  y  $R_2=(A_2 \times B_2) \rightarrow C_2$ . Si se usa la composición Max-Min para inferir  $\mu_{C'}(z)$ , el operador de composición  $\circ$  se distribuye sobre el operador unión ( $U$ ) como sigue:

$$C' = (A_i \times B_j) \circ (R_1 \cup R_2)$$

$$C' = \{(A_i \times B_j) \circ R_1\} \cup \{(A_i \times B_j) \circ R_2\}$$

$$C' = C_1' \cup C_2'$$

Donde  $C_1'$  y  $C_2'$  (véase Gráfico 3) son conjuntos borrosos inferidos de la regla 1 y de la regla 2, respectivamente. Este resultado puede extenderse para el caso de  $n$ -reglas.

### 1.6 Agregación

En esta etapa del proceso, las salidas de cada una de las reglas se combinan para obtener un único conjunto difuso. Las entradas del

proceso de agregación son las funciones de pertenencia truncadas obtenidas de la etapa de inferencia para cada una de las  $n$ -reglas. En el Gráfico 3 el conjunto  $C' = C_1' \cup C_2'$  agrega las funciones truncadas de cada regla.

El método de agregación es conmutativo, es decir, no importa el orden en el que la salida de cada regla es agregada. Este proceso define un método para hallar  $C' = (C_1' \cup C_2' \cup \dots \cup C_n')$ , donde  $C_1', C_2', \dots, C_n'$  son los conjuntos difusos inferidos de la regla 1, 2, ...,  $n$ , y  $C'$  es un conjunto difuso de salida con función de pertenencia igual a  $\mu_{C'}(z)$ , dadas las condiciones de entrada del sistema y la base de reglas. El operador de agregación más utilizado es máximo, por lo tanto:

$$C' = \{(z, \mu_{C'}(z)) / z \in Z\}$$

Donde  $Z$  = universo del discurso de la variable de salida y

$$\mu_{C'}(z) = \text{Max}(C_1', C_2', \dots, C_n')$$

### 1.7 Proceso de desborrosificación o concreción

En esta última etapa se obtiene un valor nítido o concreto ( $K$ ) a partir del conjunto difuso de salida  $C'$ , el cual proporciona la solución del sistema planteado (véase Gráfico 3). Entre los métodos de concreción más utilizados se encuentran: centroide, bisectriz, media de los máximos, más pequeño de los máximos y más grande de los máximos.

### 2. Aplicaciones de la lógica difusa

En las siguientes secciones se presentan algunas aplicaciones de la lógica difusa en la

solución de problemas financieros entre los que se encuentran problemas de selección de portafolios, matemática financiera análisis técnico, análisis de crédito y análisis financiero. Se analizan las características que en cada tema justificarían el uso de los conjuntos difusos para incorporar la incertidumbre y cómo diferentes autores han planteado su tratamiento.

## 2.1 Problemas de selección de portafolios

La lógica difusa se aplica actualmente para resolver el problema de selección óptima de un portafolio de inversión. El modelo clásico de selección planteado por Markowitz es extendido para tratar la incertidumbre en los coeficientes del problema de optimización; en general, el modelo de selección de carteras de Markowitz se utiliza para gestionar activos financieros que cotizan en algún mercado (para ello se utilizan datos históricos como entradas del modelo), basándose en la relación riesgo-rendimiento y utilizando técnicas de optimización paramétrica.

Una versión más general del problema de estructuración del portafolio puede aplicar técnicas de optimización multiobjetivo o programación dinámica, para lo cual es necesario conocer información histórica que permita determinar los coeficientes del modelo.

En la modelación del problema clásico de portafolio es necesario tener suficiente información de las rentabilidades y desviaciones de los activos considerados. Esto implica conocer los valores de los coeficientes que intervienen tanto en la función objetivo como en las restricciones, así como cuáles son

las limitaciones técnicas o de cantidad de los recursos a las que el analista debe ajustarse. Es evidente que todos estos datos no siempre van a ser fáciles de conocer y pueden llegar a situaciones en las que esta insuficiencia de información sea irresoluble. Una manera de resolver esta situación es modelar el desconocimiento mediante coeficientes que son tratados como variables aleatorias o como números difusos.

En el caso de la función objetivo, el modelo puede verse desde dos ópticas: (1) maximizar el retorno esperado, sujeto a un determinado riesgo, o (2) minimizar el riesgo, sujeto a un cierto rendimiento esperado. En el caso uno, la meta puede expresarse como la obtención de una rentabilidad suficiente a fin de alcanzar un equilibrio en todos los elementos que afectan la rentabilidad –por ejemplo, evitando tomar riesgos altos, es decir, el objetivo no es necesariamente incrementar la rentabilidad al máximo posible, sino aumentarla en una cuantía lo suficientemente grande con respecto a la competencia o al desempeño pasado–. Por lo tanto, tiene sentido plantearse modelos con funciones objetivo difusas (Gráfico 4).

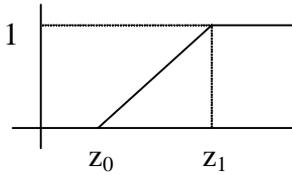
Cuando la rentabilidad alcanza un valor por encima de  $z_1$ , se tiene un grado de pertenencia al conjunto difuso  $\tilde{A}$  de 1. Cuando la rentabilidad alcanza un valor por debajo de  $z_0$ , se tiene un grado de pertenencia al conjunto difuso  $\tilde{A}$  de 0. El incumplimiento máximo de la función objetivo definida por el conjunto difuso  $\tilde{A}$  estará dado por  $z_1 - z_0$ .

También es posible, por ejemplo, que las restricciones de disponibilidad de capital de la

compañía, la política de crédito a un sector o la limitación del riesgo de pérdidas no estén restringidas a un valor específico, sino que se encuentren dentro de un rango; es decir,

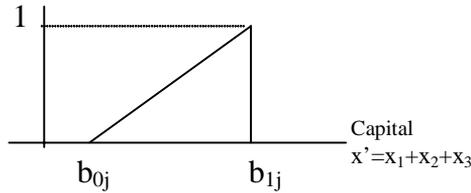
en muchas ocasiones al decisor le bastará con exigir un cumplimiento aproximado de la restricción, lo que podría implementarse mediante restricciones de tipo difuso (Gráfico 5).

**Gráfico 4**  
**Conjunto difuso para la función objetivo**



Fuente: interpretación gráfica de las relaciones presentadas por Chanas (1983) y Luhandjula (1983).

**Gráfico 5**  
**Función de pertenencia asociada a la disponibilidad de capital**



Fuente: interpretación gráfica de las relaciones presentadas por Chanas (1983) y Luhandjula (1983).

Por otro lado, puede haber desconocimiento de los coeficientes tanto de la función objetivo como de las restricciones, y esto se debe a que existe información imprecisa y vaga sobre éstos, y en este caso es más coherente la representación de los coeficientes como números difusos, en lugar de variables aleatorias. En caso de que sea posible realizar análisis estadísticos de los valores de los coeficientes, éstos podrían ser modelados mediante variables aleatorias, pero en caso contrario, sería más ventajoso tratarlos mediante distribuciones de probabilidad para capturar la incertidumbre.

En la literatura se plantean varias soluciones al problema de optimización que pueden mezclar tanto variables estocásticas como difusas. Para tal efecto pueden consultarse los trabajos de Luhandjula (1983); Vadja (1972); Zimmermann (1976); Rommelfalger, Hanuschek y Wolf (1989); Chanas (1983); Lai y Hwang (1996); Medina (2003), y Delgado, Verdegay y Vila (1989).

En el modelo de optimización también es posible incorporar el conocimiento experto sobre el comportamiento de las rentabilidades de los activos del portafolio o de cual-

quier otro parámetro del modelo. En este caso, son representativos los trabajos realizados por Tanaka, Guo y Turksen (2000), así como por Inuiguchi y Tanino (2000). La versión completa de un problema de optimización difuso puede ser representada mediante:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & \tilde{c} x \\ \text{s.a.} & \tilde{A}x \tilde{\leq} \tilde{b} \quad x \geq 0 \end{array}$$

Donde  $\tilde{c}$  es un vector  $1 \times n$  de rentabilidades que tienen asociados conjuntos difusos;  $x$ , un vector  $n \times 1$  de pesos;  $\tilde{A}$ , una matriz de coeficientes difusos  $m \times n$ ;  $\tilde{b}$ , un vector de coeficientes técnicos difusos  $m \times 1$ , y  $\tilde{\leq}$  denota una relación difusa para la desigualdad. La solución de este problema se basa en la aplicación de la aritmética difusa o la teoría de comparación de números difusos (Chen y Hwang, 1992), lo cual permite tratar la incertidumbre y reducirla de forma tal que el problema pueda solucionarse.

## 2.2 Matemática financiera y presupuesto de capital

La idea que subyace a la incorporación de la lógica difusa en el problema del presupuesto de capital o problema de inversión es incorporar la incertidumbre de una manera diferente a como lo hace la teoría de probabilidad en la evaluación de proyectos.

Como es sabido, mediante la teoría de probabilidad es posible estimar el riesgo de los proyectos mediante la asignación de distribuciones a las variables aleatorias del proyecto y mediante un proceso de simulación determinar la distribución de probabilidad del criterio de decisión –valor presente neto (VPN), tasa inter-

na de retorno (TIR), valor anual equivalente (VAE), etc.–, lo cual permite calcular tanto el valor esperado como las probabilidades asociadas; sin embargo, esta metodología parte de algunos supuestos sobre la asignación de las distribuciones de probabilidad a las variables aleatorias del problema.

Su adecuada utilización exige conocer información histórica que permita ajustar la distribución de probabilidad o utilizar un criterio experto que posibilite definir probabilidades subjetivas a los escenarios de las variables consideradas. En este último caso se incorpora criterio experto dentro del análisis probabilístico. En algunos problemas se hace difícil contar con información histórica de la variable para formalizar el enfoque probabilístico, pero puede utilizarse la información de los expertos para formalizar el enfoque difuso del problema.

Otra dificultad que encara la teoría de probabilidades está en determinar las probabilidades objetivas para los eventos o escenarios, cuya estimación obliga a conocer los casos favorables y los casos posibles. Lo anterior implica que se dispusiera de una serie de observaciones del fenómeno que por lo general no se tienen. Esto dio lugar a que se planteara la posibilidad de incorporar las probabilidades subjetivas (es decir, aquellas que parten de axiomas psicológicos) en el análisis.

Estas dificultades metodológicas no impidieron el empleo sistemático del cálculo de probabilidades en los análisis de riesgo de proyectos; sin embargo, la lógica difusa permite tratar el problema de la incertidumbre de una manera más flexible, lo que po-

dría llamarse una *aproximación posibilística*.

El tránsito hacia la incertidumbre desde la teoría de la probabilidad ha ido produciéndose de manera paulatina. Los primeros esfuerzos en formalizar una matemática financiera difusa fueron realizados por J. J. Buckley (1987), a finales de los años ochenta. Sus contribuciones metodológicas abren la posibilidad de incluir la incertidumbre en los flujos de caja, la tasa de interés y el período de evaluación mediante conjuntos difusos, lo cual permite hallar una versión difusa de los criterios de decisión como el VPN, el VAE o la TIR. Para tal fin utiliza la aritmética de conjuntos difusos, que puede ser consultada en Buckley y Eslami (2002).

Sea  $P$  el valor presente en el momento inicial;  $r$ , la tasa de interés por período;  $n$ , el número de períodos;  $F$ , el valor futuro después de  $n$  períodos, y sean éstos una versión determinista o nítida del problema. Una versión difusa de los anteriores términos puede ser representada por  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{r}$ ,  $\tilde{n}$ ,  $\tilde{F}$ , los cuales tienen asociados conjuntos difusos que son expresados mediante funciones de pertenencia.

Si representamos la suma y multiplicación de números difusos por  $\oplus$  y  $\otimes$  respectivamente, la versión difusa de la relación de equivalencia fundamental  $F = P*(1+r)^n$  podrá ser expresada por:

$$\tilde{F} = \tilde{P} \otimes (1 \oplus \tilde{r})^{\tilde{n}}$$

Para cuya solución deberá aplicarse aritmética difusa. La versión difusa del VPN podrá ser expresada como:

$$V\tilde{P}N = \tilde{P}_0 \oplus \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{P}_i}{(1 \oplus \tilde{r})^i}$$

Donde  $\Sigma$  es sumatoria difusa.

Por otra parte, Buckley (1985) también utiliza métodos de comparación de flujos de caja netos con el fin de clasificar varias alternativas de inversión con características difusas. Para ello calcula los VPN, y mediante la teoría de comparación de conjuntos difusos (Chen y Hwang 1992) ordena las alternativas.

Los trabajos de Calzi (1990), Chiu y Park (1994) y, posteriormente, Kuchta (2000) formalizan los equivalentes difusos de todos los métodos clásicos de presupuesto de capital, los cuales pueden ser utilizados para evaluar y comparar proyectos en forma práctica. Su contribución extiende y relaja los supuestos de los trabajos que Buckley planteó casi una década atrás.

En los últimos años, los estudios relativos al proceso de inversión han experimentado un cambio profundo en la incorporación de nuevos elementos matemáticos que han servido para introducir un cambio metodológico del problema. Como se deduce de los párrafos anteriores, los modelos inicialmente establecidos para un ambiente de certeza son adaptados para que sean válidos en un contexto de incertidumbre; en este sentido, los elementos fundamentales continúan siendo los mismos que en los estudios clásicos, pero su generalización permite cubrir un espectro más amplio de situaciones, es decir, la incertidumbre y la indeterminación.

El nuevo marco decisional de las inversiones ha pasado de la aleatoriedad al campo difuso (borrosidad). Como se ha indicado, la teoría de los conjuntos difusos es una parte de la matemática que se adapta bien al estudio de lo subjetivo y de lo incierto; sin

embargo, como acota Gil Aluja: “si bien es cierto que la reformulación de los conceptos tradicionales permiten ciertas soluciones, quedan todavía demasiados puntos oscuros”; además, “la aparición de nuevos conceptos y el desplazamiento de los ya existentes a nuevos lugares, están permitiendo cubrir una amplia gama de problemas de decisiones de inversión” (2002, p. 25).

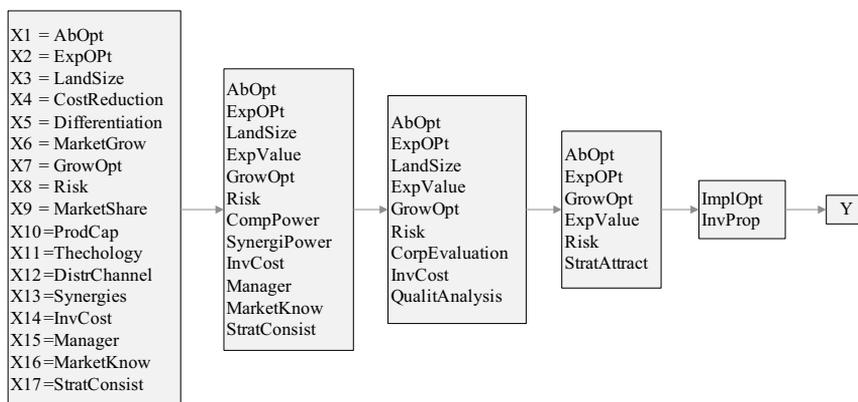
Uno de estos nuevos enfoques que incorporan conocimientos y percepciones del analista en el problema de la inversión es el modelado de elementos mediante la lógica difusa como la capacidad administrativa, las sinergias que genera el proyecto, el conocimiento del mercado, la tecnología, la actitud hacia el riesgo, la consistencia estratégica del proyecto, la diferenciación, etc., cuyas percepciones y evaluaciones por parte del analista permiten modificar la decisión de inversión, sobrepasando aun los resultados obtenidos con el criterio de decisión (VPN, TIR o la valoración mediante opciones reales). Magni (2002) y Chen y Hwang (1995) puntualizan los problemas e inconsistencias

de la teoría de inversión clásica y plantean nuevos enfoques.

Una aplicación de este nuevo enfoque, que mezcla tanto los conceptos tradicionales de evaluación de proyectos con la lógica difusa como los sistemas expertos, puede encontrarse en Magni, Mastroleo y Facchinetti (2001). Una descripción detallada del montaje de sistemas expertos difusos puede encontrarse en Kandel (2002) y Leondes (1998).

El Gráfico 6 muestra el sistema experto para evaluar inversiones estratégicas mediante opciones reales considerando variables cualitativas definidas a partir de los expertos. El modelo fue propuesto por Magni, Mastroleo, Vignola y Facchinetti (2001), donde la salida del sistema Y es definida como el valor de la inversión. El modelo considera 16 variables de entrada, entre las cuales se cuentan: el valor de las opciones, la diferenciación, el tamaño del mercado, el riesgo, la capacidad de producción, los canales de distribución, las sinergias que produce el proyecto, la consistencia estratégica del proyecto y el equipo administrativo.

**Gráfico 6**  
**Sistema experto difuso para evaluación de inversiones**



Fuente: Magni (2001).

Mediante sistemas de lógica difusa, las variables de entrada se agrupan con ayuda del criterio experto y definen variables de mayor nivel, con un significado lingüístico claro. El proceso se repite hasta que la variable de salida es alcanzada.

Otro importante enfoque del problema de inversión puede encontrarse en Gil Aluja (2002), quien incorpora la incertidumbre mediante conjuntos difusos en los modelos financieros tradicionales para la evaluación de inversiones. Algunos problemas tratados por el autor son:

- El riesgo financiero.
- El análisis de productos financieros.
- La selección de los productos financieros.
- El desgaste en el proceso de inversión.
- La distribución de recursos financieros mediante programación dinámica difusa.
- La renovación de equipos.
- El mantenimiento de equipos.

### **2.3 Análisis técnico**

El análisis técnico es un intento de predecir el movimiento futuro de los precios de las acciones analizando los movimientos pasados de los precios. No considera de manera explícita factores como las políticas fiscales, el entorno económico, las tendencias de la industria y los eventos políticos; en cambio, tiene en cuenta que en los precios está contenida toda la información, y se preocupa por descubrir patrones de los movimientos históricos de los precios y las fuerzas de oferta y demanda que los afectan.

El análisis técnico confía en los gráficos y busca patrones particulares para predecir el comportamiento futuro. El estudio se enfoca en la psicología y la respuesta del inversor ante la información de los movimientos de los precios.

El precio al cual un inversor está dispuesto a comprar o vender depende de su expectativa, es decir, si espera que los precios suban, entonces comprará; mientras que si espera a que bajen, venderá. Los participantes del mercado anticipan futuras tendencias de los precios y toman acciones que derivan a su vez en el movimiento de los precios del mercado. Debido a que este último es altamente no lineal, muchas investigaciones se han enfocado en el análisis técnico con el fin de mejorar la rentabilidad de las inversiones (Azoff, 1994; Gately, 1996; Refenes, Burgess y Bentz, 1997; Trippi y Turban, 1993).

Recientes aplicaciones exitosas de la inteligencia artificial al análisis técnico, confirmado por pruebas estadísticas, han generado gran interés por las investigaciones en esta área. Tecnologías como las redes neuronales artificiales, los algoritmos genéticos (Franklin y Karjalainen, 1999), la lógica difusa, los patrones de reconocimiento y el aprendizaje de máquinas contribuyen actualmente a realizar una asistencia computacional en el descubrimiento del conocimiento de una manera más eficiente. Esto último se refiere a encontrar patrones no triviales y útiles en los datos, tal y como éstos se presentan en los gráficos de precios, que permitan realizar predicciones o respaldar las decisiones de compra, venta o mantener las posiciones.

Existen muchos tipos de indicadores para el análisis técnico y una de las cuestiones más difíciles es determinar cuál indicador utilizar; no obstante, utilizar varios de éstos pueden mejorar los resultados. En la mayoría de los casos, la evolución de los indicadores no da una respuesta definitiva sobre la evolución del precio, la cual depende de la experiencia y de la interpretación del analista.

Con el uso de técnicas de lógica difusa pueden crearse modelos computarizados óptimos para evaluar el movimiento del precio de las acciones. En general, se analizan los gráficos de diferentes indicadores técnicos con los que pueden crearse nuevas variables de entrada que alimenten el sistema difuso y cuya salida permite sustentar las decisiones de compra, de venta o mantener la posición.

El razonamiento difuso es muy útil en este problema de inversión, ya que los expertos interpretan los indicadores técnicos de manera diferente y las respuestas al comportamiento de estos indicadores no son obvias y concluyentes. Las respuestas no son completamente verdaderas o falsas. En lógica difusa, la verdad de cualquier afirmación es cuestión de grado, por ello esta técnica se complementa bien con el análisis técnico.

En la literatura consultada se encontraron pocos estudios de la aplicación de la lógica difusa combinada con el análisis técnico, específicamente en la combinación con indicadores técnicos (osciladores, estocásticos y de volumen) para predecir comportamientos de precios o en el descubrimiento de los patrones de comportamiento tipo cabeza-hombros, etc. (Deboeck, 1996; Francis, 1993;

Lam, Chiu y Chan, 1996; O'Neil, 1995; Simutis, 2000; Choobineh y Behrens, 1992; Dourra y Siy, 2002). En este sentido, este campo promete una gran área de investigación. Todavía queda un largo camino por recorrer para que los computadores simulen los juicios humanos. Con la lógica difusa se incorpora el proceso cognoscitivo humano en la detección automática de patrones, mucho mejor que lo que lo hace el análisis técnico tradicional.

El método propuesto por Dourra y Siy (2002) puede resumirse en los siguientes pasos que, en su parte fundamental, contienen todos los elementos conceptuales de un sistema de inferencia difuso:

- Se parte de los indicadores y se generan nuevas variables que son parametrizadas mediante conjuntos difusos. Los indicadores fundamentales se utilizan para establecer los planes de inversión de largo plazo, y los indicadores técnicos, para establecer los planes de inversión de corto plazo.
- Se asocian las variables de entrada y salida mediante reglas difusas.
- Se calcula a partir del conjunto difuso de salida un valor nítido que permita hacer la recomendación de negociación.

Mientras que el método anterior se enfoca en determinar reglas generales de negociación o base de conocimiento, generadas a partir del comportamiento de los indicadores –asociadas al conocimiento experto–, otras técnicas se centran en examinar los patrones gráficos (Levy, 1971; Dong y Zhou, 2002), como las formaciones cabeza-hombros.

Las investigaciones se centran en dos áreas: la primera es la detección automática de patrones técnicos en forma similar a como lo hace el experto inversor. En este sentido, Lo y Repin anotan: “El trader más exitoso negocia basándose en su intuición acerca de la fluctuación de los precios y la dinámica del mercado, sin necesidad de articular un algoritmo cuantitativo para tomar sus decisiones complejas”. Luego dicen: “las reglas de negociación están basadas en la relación y asociación de información y formadas a nivel subconsciente” (2001, p. 15).

Debido a la forma en que los *traders* toman sus decisiones, una sutil diferencia en un patrón técnico puede parecer no significativa para uno poco experimentado, pero muy significativa para uno experimentado. Los programas de cómputo de reconocimiento de patrones deben ser diseñados para capturar esas pequeñas diferencias y extraer información importante desde el ruido, y en este punto la lógica difusa ha impulsado las investigaciones y mejorado los resultados, ya que permite incorporar la incertidumbre del proceso cognoscitivo humano en el análisis técnico (Lo, Mamaysky, Wang, 2000; Dong y Zhou, 2002; Becker y Seshadri, 2003).

La segunda área de interés se centra en las pruebas estadísticas del grado de efectividad del análisis técnico. Al respecto existe controversia y confusión, puesto que diferentes métodos de prueba generan resultados conflictivos.

## 2.4 Análisis de crédito

Para evaluar la solvencia y la capacidad de pago de solicitantes de crédito, se utilizan varias téc-

nicas, como el análisis discriminante, la regresión logística, el sistema de puntos o, simplemente, el juicio subjetivo y la experiencia. Este análisis debe realizarse de forma objetiva y eficiente, adaptándose a las características particulares de cada cliente y muchas veces partiendo de información imprecisa e insuficiente, especificada tanto en términos cuantitativos como cualitativos. Aparece entonces la lógica difusa como una herramienta alternativa para realizar esta tarea de una manera ágil, objetiva y fácil de entender.

Facchinetti y Mastroleo (2000) y Facchinetti, Bordoni, Mastroleo (2000) muestran las ventajas de utilizar un sistema difuso para el análisis de crédito respecto a los métodos clásicos. Los autores señalan que la aplicación de modelos basados en lógica difusa es una manera competitiva de abordar la evaluación de los créditos de los clientes, ya que permite capturar todo tipo de información y tratarla matemáticamente. Las ventajas se ven incrementadas cuando es posible aplicar métodos de optimización al FIS (por ejemplo, las redes neuronales artificiales o los algoritmos genéticos), como es el caso de la aplicación de los sistemas de inferencia difusa adaptativos o el sistema de inferencia difusa basado en redes (ANFIS) (Malhotra y Malhotra, 2002).

Cuando se cuenta con información imprecisa e insuficiente, como es el caso de muchas situaciones del análisis de crédito, usar instrumentos estadísticos no es suficiente para obtener resultados significativos. La lógica difusa surge precisamente para tratar con este tipo de problemas y lograr darles una solución óptima. De esta forma, un modelo basado en la lógica difusa, combinado con la

experiencia y conocimiento de los encargados de tomar decisiones, es una excelente manera de obtener buenos resultados en la evaluación de créditos (Facchinetti, Cosma, Mastroleo y Ferretti, 2001).

El procedimiento utiliza información de tipo cuantitativo, derivado del análisis de los indicadores financieros, y de tipo cualitativo, derivado del análisis de las cualidades personales y administrativas del solicitante, con el fin de construir un modelo basado en lógica difusa (sistema experto difuso) que permita evaluar su solvencia o capacidad financiera y, posteriormente, definir el monto del crédito y el plazo que otorgará la entidad.

El análisis puede incorporar variables de entrada que traten alguno de los siguientes aspectos:

- La actividad económica del solicitante.
- La evaluación financiera del solicitante.
- La estructura de propiedad de la firma.
- Las características del mercado en el cual trabaja.
- Su posición en el mercado.
- Los factores críticos del sector.
- La evaluación de la calidad administrativa.
- La presencia de factores de riesgo en el pasado y en el presente.
- Los factores explicativos de la actual situación financiera.

Algunos de los aspectos considerados pueden ser objetivos; por ejemplo, “la evaluación financiera y la estructura de propiedad” mientras que otros son subjetivos; por ejemplo, la

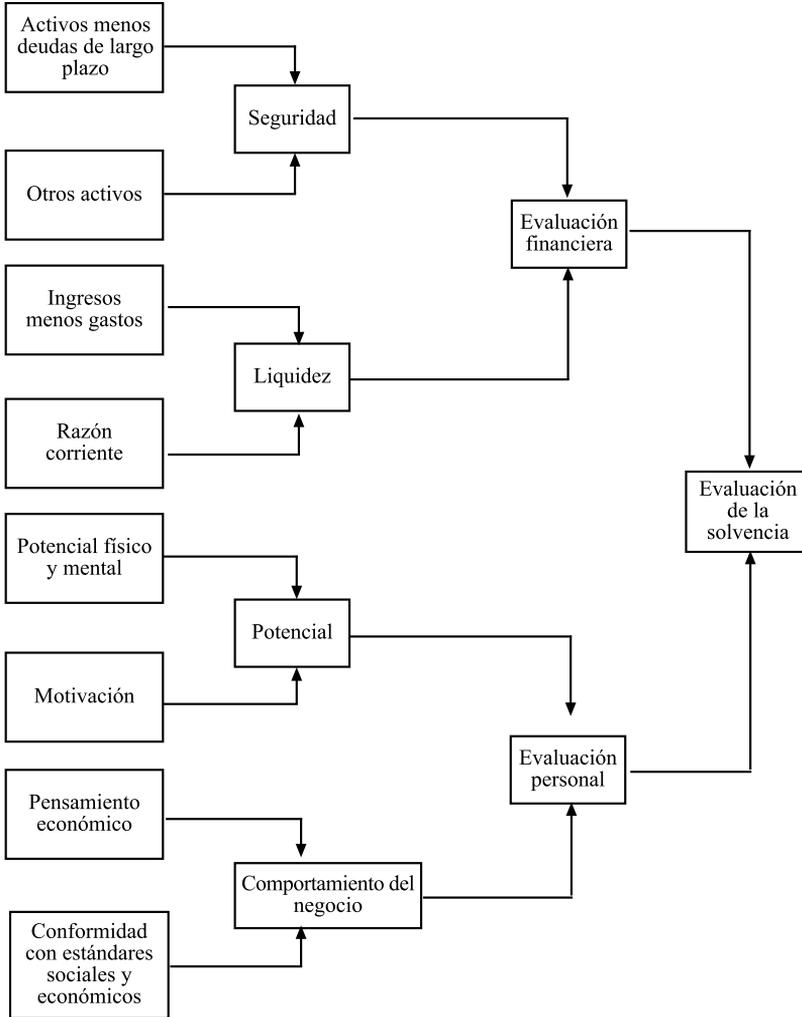
“evaluación administrativa” es un aspecto cualitativo y trata con una evaluación basada en la reputación, credibilidad u organización que le da a la firma el propietario o administrador. En general, la información se recopila mediante la elaboración de encuestas y análisis de los estados financieros de los solicitantes.

El sistema experto difuso (Facchinetti, 2001; Bojadziev y Bojadziev, 1997) está representado por un árbol de decisión cuya complejidad depende del número de variables de entrada y del número de variables intermedias creadas (variables de mayor nivel o agrupamiento de pocas variables que tienen un significado importante) como se muestra en el Gráfico 7.

Con los valores específicos de cada una de las variables de entrada al sistema, el resultado de la evaluación de cada uno de los bloques o variables de mayor nivel hasta llegar a la variable de salida del sistema experto es obtenido mediante un conjunto de reglas difusas del tipo si-entonces, las cuales son obtenidas por medio de diferentes procedimientos.

Una aproximación para obtener la base de conocimiento es entrevistar a los expertos, con el fin de determinar las relaciones implícitas entre las variables del modelo. Otros métodos más sofisticados y que requieren el uso de bases de datos consisten en utilizar procesos de aprendizaje automáticos. Técnicas como las redes neuronales artificiales o los algoritmos genéticos permiten definir las funciones de pertenencia y las reglas difusas. Las dos aproximaciones son diferentes: la primera no utiliza datos históricos del problema y deja que se establezca un contacto real con los expertos, que pue-

Gráfico 7  
Sistema experto para análisis de solvencia



Fuente: Facchinetti (2001).

den transmitir toda la experiencia de años de trabajo en el campo. La segunda aproximación se basa en datos históricos y transfiere al futuro la estructura del pasado. En este caso se supone que toda la información necesaria está contenida en los datos.

Aplicaciones de los sistemas de inferencia difusa en el análisis de crédito pueden encontrarse en Malhotra y Malhotra (2002), Facchinetti y Mastroleo (2000); Facchinetti et al. (2000) y Bojadziev y Bojadziev (1997).

Por otra parte, los sistemas expertos difusos tienen amplia aplicación en el diseño de sistemas de respaldo para la toma de decisiones y pueden ser aplicados a una multitud de problemas. Algunas de las aplicaciones referenciadas en la literatura son:

- Evaluación de proyectos (Bojadziev y Bojadziev, 1997; Magni et al., 2001; Von Altrock, 1997; Magni, 2002).
- Detección de fallas o fraudes.
- Evaluación de riesgos operativos.
- Sistemas de diagnóstico en aplicaciones médicas.
- Sistemas de diagnóstico en psicología y sociología.
- Control de calidad.
- Evaluación sociopolítica.
- Aplicaciones en mercadeo.
- Controladores de equipos industriales.

## 2.5 Análisis financiero

En este aspecto se recogen una serie de trabajos que están orientando el análisis financiero de las empresas en el siglo XXI y que permiten dotar al analista de instrumentos o modelos aptos para la toma de decisiones bajo un contexto caracterizado por cambios sociales y económicos extremadamente rápidos y profundos. Los entes económicos están inmersos en un mundo en el cual todo acontecimiento se produce y desarrolla con tal rapidez que hace prácticamente imposible saber con exactitud lo que el futuro deparará. Todos los acontecimientos y circunstancias posibles llevan una fuerte carga de incertidumbre.

Las decisiones financieras tienen gran efecto en el desempeño de la empresa, y un error puede provocar la desaparición de la empresa del mercado o tener consecuencias negativas sobre la liquidez o la rentabilidad. Las decisiones de inversión, financiación y dividendos tocan todos los aspectos de la empresa, como el recurso humano, la calidad, la tecnología, el mercado, la producción, etc., y reviste cada vez más complejidad debido a las circunstancias cambiantes relativas a disposiciones legales, influencias de otros sectores y países, cambios en el sistema monetario, tendencias, situación sociopolítica, etc.

Los problemas financieros varían a lo largo del tiempo y con ellos se constata una evolución de las técnicas utilizadas para su solución. En los últimos años se ha observado que estas variaciones se han ido produciendo cada vez con mayor rapidez.

Para poder abordar los problemas de índole económico o empresarial bajo un contexto de cambio e incertidumbre, ya no son suficientes los conocimientos basados en la lógica formal, cuya matemática se basa en un esquema mecanicista. La lógica booleana también se queda corta e impotente ante esta nueva forma de actuación de la sociedad. A fin de atender las exigencias que muchas veces se formulan –relativas a algún tipo de predicción u opinión acerca de un acontecimiento futuro– se ha hecho imprescindible utilizar un nuevo conjunto de técnicas basadas en la incertidumbre, cuyo objetivo es plasmar en los resultados obtenidos toda la sutileza y subjetividad que caracteriza el pensamiento humano.

Por otro lado, para que la empresa consiga sus objetivos es necesario, cada vez con más frecuencia, disponer de la ayuda de expertos. Ellos, con base en su conocimiento y experiencia, deberán ser capaces de orientar la actividad empresarial y estrechar el abanico de posibilidades de decisiones erróneas. Fundamentar los estudios del análisis financiero en la opinión de los expertos, que incluyan la incertidumbre, constituye un avance en el marco metodológico financiero de dicho análisis (cambio que va más allá de sustentar las decisiones basadas en datos del pasado o en estimaciones probabilísticas).

La opinión de expertos no está exenta de un cierto grado, más o menos elevado de subjetividad; por ello muchos trabajos plantean el problema de la agregación de la opinión de expertos conocido como *expertones* (Kaufmann, 1987), con los objetivos de limitar, en lo posible, el componente subjetivo de las opiniones y de conseguir que las decisiones tengan la mejor garantía en orden a la obtención de las metas deseadas.

Según lo anterior, el núcleo central sobre el que gira la vida económica y sobre el que se desenvuelve la actividad financiera está conformado por dos aspectos: por una parte, los razonamientos lógicos que permiten calcular, medir y elegir; por la otra, un conjunto de sensaciones, intuiciones y experiencias sobre el problema. El primer aspecto permitió la formalización de la ciencia económica mediante instrumentos basados en la matemática mecanicista, cuya máxima expresión exigía la consideración del ser como un *Homo economicus* desprovisto de toda sensación y que le impedía conferir a sus actos cualquier atisbo de subjetividad. Las nuevas realidades han permitido superar este paradigma.

Las nuevas técnicas han tocado cada uno de los aspectos del análisis financiero tradicional y han incorporado en el análisis las condiciones de incertidumbre y vaguedad de los problemas, así como el criterio experto. El instrumental de análisis para este nuevo enfoque se basa en la lógica difusa, los conjuntos difusos e intervalos de confianza, la matemática, el álgebra difusa y los *expertones*, que se han incorporado a la mayoría de modelos utilizados para el análisis financiero de la firma; en este sentido, los siguientes problemas son replanteados:

- Estructura financiera óptima.
- Política de dividendos.
- Presupuesto de efectivo y flujo de caja.
- Capital de trabajo.
- Índices del desempeño financiero.
- Nivel de inventarios.
- Fuentes de financiación.
- Costo del capital.
- Determinantes de la tasa de interés.
- Análisis de la liquidez, la rentabilidad y el endeudamiento.
- Valor de la empresa.
- Punto de equilibrio.
- Colocación de recursos financieros.
- Riesgo de mercado y riesgo operativo.

Pueden consultarse las aplicaciones de la lógica difusa en diferentes temas del análisis financiero numerados anteriormente en Lafuente (1990 y 2001), Carlsson (1980), Kaufmann y Gil Aluja (1986 y 1995) y Lafuente, Gil Aluja, Teodorescu y Tacu (1992).

## Conclusiones

La lógica difusa abre un nuevo campo de exploración en muchas áreas del conocimiento en nuestro medio. La importancia y uso creciente de los nuevos modelos basados en la lógica multivalente (de la cual la lógica borrosa es la mayor exponente), por parte de la comunidad científica, representa la inmersión en un nuevo mundo, donde la incertidumbre no impide un eficaz tratamiento de los problemas de decisión financiera. Los nuevos paradigmas permiten recoger los fenómenos económicos y empresariales con toda su incertidumbre con el fin de realizar aproximaciones más cercanas a la realidad, es decir, permite la adaptación de los modelos a la realidad y no al contrario.

En el ámbito de formalización de los modelos de decisión basados en lógica difusa –sustentados en las hipótesis basadas en la certeza y en la aleatoriedad, comunes hasta no hace mucho en los modelos económicos y financieros– éstos se ha ido completando a partir de las investigaciones sobre el tratamiento de la incertidumbre y su incorporación en la mayoría de modelos de la teoría financiera. El instrumental de análisis se basa en los conceptos de la matemática difusa, y emplea entre otros elementos, los conjuntos difusos y los FIS, sustentados en el conocimiento adquirido a lo largo del tiempo por los expertos. Lo anterior constituye una gran fortaleza para llevar a cabo análisis socioeconómicos, puesto que existen factores externos al sistema que proporcionan información adicional para la evaluación y que son evaluados implícitamente por los expertos, quienes conocen y entienden su sistema. De esta manera, la

lógica difusa se perfila como una alternativa importante para el desarrollo de sistemas expertos, que constituyen una verdadera herramienta de apoyo a la toma de decisiones económicas.

Los comentarios de las aplicaciones realizadas en el campo financiero muestran sólo una pequeña parte de las aplicaciones desarrolladas. En general, las matemáticas de la incertidumbre cubren todo el abanico de áreas del conocimiento que van desde aplicaciones prácticas hasta la formalización y extensión de los modelos de la matemática clásica, como el cálculo integral, las probabilidades, la trigonometría, la geometría, la topología, la econometría, etc.

Por otro lado, queda por fuera de este artículo un importante campo de investigación de la lógica difusa, la cual se combina con otras técnicas de la inteligencia artificial, como las redes neuronales artificiales, los algoritmos genéticos, el caos, los fractales, etc., que pueden ser aplicados para resolver problemas financieros o de cualquier otra índole. En términos generales, la combinación de estas técnicas permite crear sistemas robustos conocidos como sistemas conexionistas o sistemas híbridos, aplicados con éxito en muchos campos del conocimiento. En Kasabov (1998), Jain y Jain (1997) o Leondes (1998) puede encontrarse una recopilación de trabajos, en la cual se proponen diversos tipos de interrelación entre estas técnicas y la capacidad de resolver muchos problemas de ingeniería. A partir de este momento, una gran cantidad de problemas parecen encontrar una salida mucho más acorde con las necesidades actuales y futuras.

## Lista de referencias

- Azoff, M. E. (1994). *Neural network time series forecasting of financial markets*. New York: Wiley.
- Becker, L. A. y Seshadri, M. (2003). *Genetic programming: Evolved technical trading rules can outperform buy and hold*. Recuperado en febrero de 2006, de <http://citeseer.ist.psu.edu>
- Bojadziev, G. y Bojadziev, M. (1997). *Fuzzy logic for business, finance and management*. Singapore: World Scientific Publishing.
- Buckley, J. J. (1985). Ranking alternatives using fuzzy numbers. *Fuzzy Set and Systems*, 15, 21-31.
- (1987). The fuzzy mathematics of finances. *Fuzzy Set and Systems*, 21, 257-273.
- y Eslami, E. (2002). *An introduction to fuzzy logic and fuzzy sets*. New York: Physica-Verlag.
- Carlsson, C. (1980). *Fuzzy set and management methodology: Process in cyber & syst* (vol. 8). New York: Hemisphere Pub.
- Chanas, S. (1983). The use of parametrics programming in fuzzy linear programming. *Fuzzy Set and Systems*, 11, 243-251.
- Chen, S. (1995). An empirical examination of capital budgeting techniques: impact of investment types and firm characteristics. *The Engineering Economist*, 40 (2), 145-170.
- y Hwang, C. L. (1992). *Fuzzy multiple attribute decision making: Methods and applications*. Berlin: Springer-Verlag.
- Chiu, C. Y. y Park, C. S. (1994). Fuzzy cash flow analysis using present worth criterion, *The Engineering Economist*, 39 (2), 113-138.
- Choobineh, F. y Behrens, A. (1992). Use of intervals and possibility distributions in economic analysis. *The Journal of the Operational Research Society*, 43 (9), 907-918.
- Deboeck, G. J. (1994). *Trading on the edge: Neural, genetic, and fuzzy systems for chaotic financial markets*. New York: John Wiley & Sons.
- Delgado, M., Verdegay, J. L. y Vila M. A. (1989). A general model for fuzzy linear programming. *Fuzzy Set and Systems*, 29, 21-29.
- Dong, M. y Zhou, X. S. (2002). *Exploring the fuzzy nature of technical patterns of U. S. stock market*. Singapore: IEEE.
- Dourra, H. y Siy, P. (2002). Investment using technical analysis and fuzzy logic. *Fuzzy Set and Systems*, 127, 221-240.
- Facchinetti, G. (2001). Fuzzy expert systems: Economic and financial applications. En J. Soldek y J. Pejas (Eds.), *Advanced computer system* (pp. 3-26). Norwell, Massachussets: Kluwer Academic Publishers.
- Facchinetti, G., Bordoni, S., Mastroleo, G. (2000). *Bank creditworthiness using fuzzy systems: A comparison with a classical analysis technique*. Recuperado en noviembre de 2005, de <http://citeseer.ist.psu.edu>
- Facchinetti, G., Cosma, S., Mastroleo, G. y Ferretti, R. (2001). *A fuzzy credit rating approach for small firm creditworthiness evaluation in bank lending*. Recuperado en septiembre de 2005, de <http://citeseer.ist.psu.edu>

- Facchinetti, G. y Mastroleo, G. A. (2000, abril). *Comparison between a score card and a fuzzy approach for granting personal credit*. Documento presentado en el Spanish-Italian Meeting on Financial mathematics, Bilbao, España.
- Francis, J. C. (1993). *Management of Investment* (3rd ed.). New York: McGraw-Hill.
- Franklin, A. y Karjalainen, R. (1999, February). Using genetic algorithms to find technical trading rules. *Journal of Financial Economics*, 51 (2), 245-271.
- Gately, E. (1996). *Neural networks for financial forecasting*. New York: Wiley.
- Gil Aluja, J. (2002). *Invertir en la incertidumbre*. Madrid: Pirámide.
- Haykin, S. (1994). *Neural networks: A comprehensive foundation*. Piscataway: IEEE Press.
- Inuiguchi, M. y Ramik, J. (2000). Possibilistic linear programming: A brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem. *Fuzzy Set and Systems*, 111, 3-28.
- Inuiguchi, M. y Tanino, T. (2000). Portfolio selection under independent possibilistic information. *Fuzzy Set and Systems*, 115, 83-92.
- Jain, L. C. y Jain, R. K. (1997). *Hybrid intelligent engineering systems: Advances in fuzzy systems-applications and theory*. Singapore: World Scientific Publishing.
- Jang, J., Mizutani, E. y Sun, C. (1997). *Neuro-fuzzy and soft computing: A computational approach to learning and machine intelligence*. New York: Prentice Hall.
- Kandel, A. (2002). *Fuzzy expert systems*. Boca Ratón: CRC Press.
- Kasabov, N. (1998). *Foundations of neural networks, fuzzy systems and knowledge engineering*. Cambridge: The MIT Press.
- Kaufman, A. (1982). *Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos: elementos teóricos de base*. México: CECSA
- (1987). *Les experts*. Paris: Hermes.
- Kaufmann, A. y Gil Aluja, J. (1986). *Introducción de la teoría de conjuntos borrosos a la gestión de empresas*. Santiago de Compostela: Milladoiro.
- (1990). *Las matemáticas del azar y la incertidumbre: elementos básicos para su aplicación en economía*. Madrid: Ramón Areces.
- (1995). *Grafos neuronales para la economía y la gestión de empresas*. Madrid: Pirámide.
- Kosko, B. (1994). Fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions on Computers*, 43 (11), 1329-1333.
- (1995). *Pensamiento borroso: la nueva ciencia de la lógica borrosa*. Barcelona: Crítica.
- Kuchta, D. (2000). Fuzzy capital budgeting. *Fuzzy Set and Systems*, 111, 367-385.
- Kulkarni, A. (2001). *Computer vision and fuzzy-neuronal systems*. New York: Prentice Hall.
- Lafuente G., A. M. (1990). *Análisis financiero en la incertidumbre*. Barcelona: Ariel.

- Lafuente G., A. M. (2001). *Nuevas estrategias para el análisis financiero de la empresa*. Barcelona: Ariel.
- , Gil Aluja, J., Teodorescu, N. H. y Tacu, A. P. (1992). *Chaotic fuzzy model in economy*. Documento presentado en el 2nd. International Conference on Fuzzy Logic Systems and Neural Network. Lizuka, Japan.
- Lai, Y. J. y Hwang, C. L. (1996). *Fuzzy multiple objective decision making: Methods and applications*. Berlin: Springer-Verlag.
- Lam, K. P., Chiu, K. C. y Chan, W. G. (1996). *Neural network in financial engineering in an embedded fuzzy knowledge base for technical analysis of stocks*. Singapore: World Scientific Publishing.
- Leondes, C. T. (1998). *Fuzzy logic and expert systems applications: Neural network systems techniques and applications*. San Diego: Academic Press.
- Levy, R. A. (1971, July). The predictive significance of five-point chart patterns. *Journal of Business*, 44 (3), 316-323.
- Li Calzi, M. (1990). Towards a general setting for the fuzzy mathematics of finance. *Fuzzy Sets and Systems*, 35, 265-280.
- Lo, A. W. y Repin, D. V. (2001). *The psychophysiology of real-time financial risk processing* (working paper 8508). Cambridge: National Bureau of Economic Research, <http://www.nber.org/papers/w8508>.
- Lo, A. W., Mamaysky, H. y Wang, J. (2000, August). Foundations of technical analysis: Computational algorithms, statistical inference, and empirical implementation. *The Journal of Finance*, 55 (4), 1705-1765.
- Luhandjula, M. K. (1983). Linear programming under randomness and fuzziness. *Fuzzy Set and Systems*, 10, 45-55.
- Magni, C. A. (2002). Investment decisions in the theory of finance: Some antinomies and inconsistencies. *European Journal of Operational Research*, 137(1), 206-217.
- Magni, C. A., Mastroleo, G. y Facchinetti, G. (2001). A fuzzy expert system for solving real option decision processes. *Fuzzy Economic Review*, 6 (2), 51-73.
- Magni, C. A., Mastroleo, G., Vignola, M. y Facchinetti, G. (2001). *Strategic options and expert systems: A fruitful marriage*. Recuperado en octubre de 2003, de <http://citeseer.ist.psu.edu>
- Malhotra, R. y Malhotra, D. K. (2002). Differentiating between good and bad credits using neuro-fuzzy systems. *European Journal of Operational Research*, 136, 190-211.
- Mandani, E. H. (1977). Application on fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis. *IEEE Transactions on Computers*, 26, 1182-1191.
- y Gaines, B. R. (1981). *Fuzzy reasoning and its applications*. San Diego: Academic Press.
- Medina, S. (2003). Uso de la programación lineal estocástica difusa en la definición de la política de créditos. *EITI*, 7-12.
- O'Neil, W. J. (1995). *How to make money in stocks* (2nd ed.). New York: McGraw-Hill.

- Refenes, A. N., Burgess, N., Bentz, Y. (1997). Neural networks in financial engineering: A study in methodology. *IEEE Trans. Neural Networks*, 8 (6), 1222-1267.
- Rommelfanfer, H., Hanuscheck, R. y Wolf, J. (1989). Linear programming whit fuzzy objectives. *Fuzzy Set and Systems*, 29, 31-48.
- Simutis, R. (2000). *Fuzzy logic based stock trading system*. Documento presentado en la IEEE/IAFE Conference on Computational Intelligent of Financial Engineering, New York, USA.
- Tanaka, H., Guo, P. y Turksen, B. (2000). Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibility distributions. *Fuzzy Set and Systems*, 111, 387-397.
- Trillas, E. (1980). *Conjuntos borrosos*. Madrid: Vicens Vives.
- Trippi, R. R. y Turban, E. (1993). *Neural Network in Finance and Investing*. Chicago: Probus Publishing Company.
- Vadja, S. (1972). *Probabilistic programming*. New York: Academic Press.
- Von Altrock, C. (1997). *Fuzzy logic and neurofuzzy applications in business and finance*. New York: Prentice-Hall.
- Wang, L. (1992). *Fuzzy systems are universal approximators*. Documento presentado en la International Conference on Fuzzy Engineering.
- Zadeh, L. A. (1968). Probability measures of fuzzy events. *J. Math. Anal. Appl.*, 23, 421-427.
- Zimmermann, H. J. (1976). Description and optimization of fuzzy systems. *Int. Journal Gen. Syst.*, 2, 209-215.