

# LA EFICIENCIA RELATIVA EN LOS COLEGIOS DISTRITALES DE BOGOTÁ: UNA APLICACIÓN DEL ANÁLISIS ENVOLVENTE DE DATOS\*

*Yezid Orlando Pérez Alemán\*\**  
*David Ricardo Araque Quijano\*\*\**  
*John Freddy Lancheros\*\*\*\**

---

\* Este artículo presenta los resultados del trabajo de Araque, Lancheros y Murcia (2002), que hace parte de la Línea de Investigación de Medición de la Eficiencia Relativa en Diferentes Sectores Económicos mediante el empleo de DEA adelantada por el Departamento de Procesos Productivos de la Facultad de Ingeniería. Se recibió 03/09/03 y se aprobó 30/10/03.

\*\* Doctor en Economía, Technische Hochschule Darmstadt, 1995. Ingeniero industrial, Pontificia Universidad Javeriana, 1988. Profesor titular y director del Departamento de Procesos Productivos, Facultad de Ingeniería, Pontificia Universidad Javeriana. Correo electrónico: yperez@javeriana.edu.co.

\*\*\* Ingeniero industrial, Pontificia Universidad Javeriana, 2003. Correo electrónico: draq@tutopia.com.

\*\*\*\* Estudiante de Ingeniería industrial, Pontificia Universidad Javeriana. Correo electrónico: j\_f@tutopia.com.

## RESUMEN

En el artículo se presentan los resultados de un estudio conducente a determinar la eficiencia relativa de los colegios distritales de educación básica secundaria y media en Bogotá, mediante la utilización del análisis envolvente de datos. Se trata de una técnica de optimización lineal, no paramétrica, que construye una frontera eficiente de producción, donde se ubican las unidades más efectivas a través de la combinación de múltiples insumos y productos. Se aplicaron modelos CCR, BCC y SBM, que tienden a definir el impacto en la eficiencia, al reducir los insumos o al incrementar los productos que se basan en diferentes supuestos sobre los retornos de escala de la actividad objeto de estudio. Acorde con la técnica, se definieron las eficiencias técnica, de escala y de mezcla, que permiten determinar los factores explicativos de la eficiencia relativa de cada plantel; adicionalmente, se plantearon escenarios para el análisis de los resultados en función del número de estudiantes y de la jornada de los planteles y se identificaron los colegios que hacen un uso comparativamente más eficiente de los recursos, produciendo una mayor cantidad de resultados.

**Palabras clave:** frontera de producción, medición de eficiencia, eficiencia relativa, análisis eficiente de datos, sector educativo.

## ABSTRACT

***The relative efficiency of the public secondary schools in Bogotá by using Data envelopment Analysis***

This article presents some of the results of a study about the determination of the relative efficiency of the public secondary schools in Bogotá by using Data Envelopment Analysis (DEA). DEA is a non-parametric optimization procedure, which defines an efficient production frontier with the relative efficient firms within an industry by means of the construction of a multiple-input, multiple-output relationship. CCR, BCC and SBM DEA-models were carried out in order to determine the impact on efficiency due to the reduction of the inputs or the increase of the outputs. The models used are based on different assumptions about the returns to scale in the industry. According to the DEA assumptions technical efficiency, scale efficiency and mix efficiency were defined for each school with the objective to explain the relative efficiency of each one of them. Additionally, different scenarios in terms of the number of students and other variables were analyzed. The relative efficient schools, that means, those schools that use the available resources in a better form obtaining better results, were identified.

**Key words:** production frontier, efficiency measurement, relative efficiency, data envelopment analysis, educational sector.

## 1. El concepto de eficiencia técnica y su medición mediante DEA

En virtud del objetivo de incrementar al máximo las utilidades, una firma busca usualmente producir tanto como le sea posible con los recursos o insumos disponibles, o visto de otra manera, busca usar la menor cantidad de recursos posibles para alcanzar un determinado índice de producción. Esta idea contiene implícitamente el concepto de eficiencia, que involucra tanto los insumos requeridos como los productos obtenidos, de tal forma que un conjunto de insumos y productos resulta ineficiente si la cantidad de producto puede ser aumentada, así como si los insumos requeridos pueden ser disminuidos. Se puede entonces deducir que un punto eficiente debe estar situado en la frontera del conjunto de posibilidades de producción.

Desde hace varias décadas han surgido múltiples enfoques acerca de la formulación y el cálculo de fronteras de producción y costos, como una aproximación a la estimación de la eficiencia económica de las firmas en una industria. Farrell (1957) separó en el concepto de eficiencia el componente de eficiencia técnica del de eficiencia de la asignación de precios. El trabajo pionero del mencionado autor se centra en el análisis de la eficiencia técnica, que aduce que la eficiencia de asignación de precios está sumamente determinada por la influencia que ejercen las firmas mismas en los precios del mercado. Según Farrell, una firma es técnicamente eficiente si no existe ninguna otra combinación (convexa) menor de insumos de los que ésta requiere.

Es posible plantear diferentes métodos para calcular los diferentes tipos de eficiencia.

Así, se puede optar por una aproximación econométrica, que estima la eficiencia desde el supuesto de funciones de producción o de costos conocidas o mediante funciones translogarítmicas (Resti, 2000).

Una solución alternativa al problema de eficiencia técnica es el análisis envolvente de datos (DEA, por sus nombre en inglés). Esta técnica, por el contrario, no hace suposiciones a priori de las funciones de producción y de costos, de tal manera que la eficiencia relativa es calculada solamente a partir de la información de producción y costos observados. La técnica DEA supone la generalización del concepto de eficiencia técnica de Farrell, mediante la construcción de un cociente ponderado de forma endógena, entre los productos obtenidos y los insumos utilizados por las firmas en el interior de una industria.

La aplicación de modelos DEA ha permitido evaluar los supuestos de retornos a escala en casos de industrias con múltiples insumos o múltiples productos. Su aplicación se dio inicialmente en el caso de unidades decisoras en sectores públicos, donde el desempeño de sus unidades no está sujeto a una estructura gobernada por precios de mercado y no se persigue el objetivo de incrementar al máximo las utilidades. En el sector educativo se cuenta con diversos estudios y casos de aplicación de la técnica para la determinación de la eficiencia relativa en los diferentes subsectores (Mancebon y Mar Molinero, 2000; Sarrico y Dyson, 2000).

El modelo DEA (Charnes, Cooper y Rodhes, 1978) calcula la eficiencia de unidades organizacionales homogéneas—denominadas

*decision making units* (DMU)— que usan los mismos insumos para producir los mismos resultados. DEA toma los valores observados de insumos y productos para conformar un espacio de posibilidades de producción, contra el cual las unidades individuales son comparadas, con el fin de determinar su eficiencia. Se trata, entonces, de una técnica de optimización lineal no paramétrica, construida para medir el comportamiento relativo de diferentes firmas multiproducto.

La técnica DEA convierte los diversos insumos y productos a un solo insumo y a un solo producto equivalentes, mediante la asignación de pesos con respecto a la importancia relativa de cada uno de dichos insumos o productos, que son determinados de manera endógena. Si se convoca a los representantes de cada una de las unidades organizacionales objeto de comparación y se les solicita que determinen dichos pesos para su propia firma, así como para sus competidores, es muy probable que los criterios que cada uno de ellos tenga en cuenta difieran significativamente y sea difícil llegar a un consenso al respecto, debido al sesgo particular de cada uno de ellos, derivado de su mayor conocimiento de las fortalezas y debilidades de su firma y la consecuente inclinación a establecer criterios que los favorezcan. Adicionalmente, puede ocurrir que a pesar de ser totalmente objetivos en dicho análisis, existan serias diferencias conceptuales o de valoración entre los individuos sobre la importancia relativa de los productos o los insumos para las firmas.

La ineficiencia de una firma específica es determinada por la distancia desde el punto que representa la combinación de los

insumos utilizados y los productos obtenidos hasta un punto de referencia en la frontera de producción. Además, se puede determinar el camino óptimo que deben seguir las firmas menos eficientes para superar su ineficiencia relativa, bien sea aumentando uno o todos los productos, manteniendo los insumos constantes, reduciendo los insumos, manteniendo constantes los productos, reduciendo los insumos o aumentando simultáneamente los productos. Pero tal camino óptimo que deben seguir las firmas ineficientes hacia la frontera de eficiencia dependerá del modelo DEA escogido.

La denominación de envolvente proviene del hecho de que es posible definir un conjunto de posibilidades de producción que contiene a todas las DMU que se comparen. Esto es, una DMU<sub>k</sub> es (pareto)eficiente si no existe ninguna otra DMU que pueda producir más que ella en por lo menos uno de los productos, sin producir más en algún otro o requiriendo más de por lo menos uno de los insumos empleados. En general, cualquier combinación lineal de DMU eficientes sirve como punto de referencia para la medida de la ineficiencia relativa de cualquier otra DMU<sub>k</sub> ineficiente.

## 2. El sector educativo en Bogotá

De acuerdo con la ley general de educación (República de Colombia, Congreso, 1994), la estructura de la educación en el país comprende tres diferentes niveles, que se imparten en establecimientos educativos aprobados, en una secuencia regular de ciclos lectivos, con sujeción a pautas curriculares progresivas y conducente a grados y títulos. El nivel

de educación básica secundaria y la educación media corresponde a los seis últimos años de la formación. Este servicio puede ser prestado por el Estado o por una entidad privada, en diferentes jornadas y en respuesta a diferentes especialidades de la educación media.

La Secretaría de Educación del Distrito Capital es la entidad rectora de la educación preescolar, básica y media en Bogotá. Sus funciones principales, definidas en la Ley 115 de 1994 en su artículo 151, son, entre las más importantes, las de velar por la calidad y cobertura de la educación, establecer la política educativa en el Distrito y definir los planes de desarrollo sectorial. Igualmente, la Secretaría organiza y supervisa el servicio educativo prestado por entidades oficiales y particulares, y aprueba la creación y funcionamiento de las instituciones de educación formal de preescolar, básica y media de la ciudad.

Bogotá concentra aproximadamente el 15% de la matrícula total del país, el 10% de la

matrícula pública y alrededor del 28% de la privada. En la ciudad, la población de 15 años y más tiene en promedio 9,6 años de educación, frente a 7,3 del promedio nacional. Las mujeres registran un promedio de años en educación de 9,4 años, inferior al de los hombres que asciende a 9,9 años (Secretaría de Educación, 2002).

En el año 2001, el sector educativo de Bogotá atendió a 1'475.847 niños y jóvenes, con una cobertura bruta del 97,7% respecto a una población en edad escolar de 1'510.126. La población atendida con recursos del Distrito fue de 773.230 estudiantes y la correspondiente a los establecimientos privados fue de 702.617 estudiantes (Secretaría de Educación, 2002); de la matrícula en establecimientos públicos 84.857 estudiantes correspondieron a estudiantes que perciben un subsidio para estudiar en planteles privados. La distribución de la matrícula en el Distrito Capital, de acuerdo con el nivel de escolaridad se presenta, en el Cuadro 1.

**Cuadro 1**  
**Cobertura de las instituciones públicas y privadas según nivel de escolaridad**  
**Bogotá. 2001**

| Nivel / Sector    | Público        | Privado        | Total            |
|-------------------|----------------|----------------|------------------|
| Preescolar        | 53.084         | 66.596         | 119.680          |
| Básica primaria   | 379.011        | 323.432        | 702.443          |
| Básica secundaria | 252.884        | 217.332        | 470.216          |
| Media             | 88.250         | 95.258         | 183.508          |
| <b>Total</b>      | <b>773.230</b> | <b>702.617</b> | <b>1.475.847</b> |

Fuente: Cálculos de la Subdirección de Análisis Sectorial de la SED, basándose en el Sistema de Matrícula y en la Encuesta Nacional de Hogares.

En el año 2000, de cada 1.000 niños que iniciaron el año lectivo en algún grado de básica primaria en establecimientos del sector oficial, en promedio 899 obtuvieron los logros establecidos, 68 no los obtuvieron y 33 se retiraron durante el año; por cada 1.000 jóvenes que iniciaron el año lectivo en algún grado de básica secundaria, en promedio 734 obtuvieron los logros establecidos, 201 no los obtuvieron y 65 se retiraron durante el año (Secretaría de Educación, 2002).

Dentro de la oferta de establecimientos oficiales de propiedad del Distrito están aquellos que administra directamente la Secretaría de Educación del Distrito (SED) y aquellos entregados en concesión a particulares para su administración. En la modalidad de concesión, la SED selecciona a los jóvenes beneficiarios, con focalización en los estratos 1 y 2, y adjudica los recursos para su atención.

En el año 2001 existían en Bogotá 3.612 establecimientos educativos, de los cuales 2.924 eran no oficiales y 688, oficiales distritales. Dentro de estos últimos, 22 fueron entregados en concesión.

La eficiencia en la gestión de planteles educativos ocupa, al lado de la ampliación de la cobertura y la calidad de los servicios educativos, un lugar preponderante en las prioridades del sector educativo. Esta importancia se ha manifestado especialmente en los últimos tiempos, cuando los recursos de presupuesto asignados a los planteles públicos se están supeditando cada vez más a una gestión eficiente; por otro lado, los planteles privados basan cada vez más su supervivencia en ofrecer una educación de calidad mediante el empleo eficiente de los recursos disponibles.

Así las cosas, puede decirse que existe una estrecha relación entre la eficiencia en la gestión de los recursos y los resultados educativos académicos alcanzados por los planteles y, por ende, en su calidad. Durante el año 2002 la SED adelantó 18 proyectos en torno a las tres áreas estratégicas de su plan sectorial, discriminados así: 11 proyectos orientados al acceso y permanencia de los niños en el sistema educativo, a los que se destinaron el 98% de los recursos de inversión; 6 proyectos orientados a reforzar la calidad de la educación, que cuentan con un 1,6% del presupuesto de inversión, y un proyecto adicional, encaminado a mejorar la eficiencia de la institución (0,3% del presupuesto de inversión).

La SED ha adoptado en los últimos años diversos mecanismos para medir no solamente la calidad de la educación impartida en los planteles educativos distritales, sino también la eficiencia con que dichos planteles llevan a cabo su función educativa (República de Colombia, Alcaldía Mayor de Bogotá, 2000). Los resultados de este estudio son de especial importancia para la adopción de políticas de financiación de la educación de los planteles distritales, así como para la definición de perfiles de colegios distritales que sean comparativamente eficientes y, por lo tanto, punto de referencia para todos los demás.

### 3. Los modelos DEA utilizados

La técnica DEA determina para cada DMU la razón máxima de la suma de sus productos ponderados con respecto a la suma de los insumos ponderados, donde dichos pesos ponderados son determinados por el modelo mismo (Ecuación 1).

$$\text{Razón de eficiencia} = \frac{\sum_{r=1}^s y_r * u_r}{\sum_{i=1}^m x_i * v_i} \quad (1)$$

Donde:

- $y_r$ : cantidad de producto  $r$
- $u_r$ : peso ponderado para el producto  $r$
- $x_i$ : insumo  $i$
- $v_i$ : peso ponderado del insumo  $i$

La anterior razón de eficiencia es un modelo de optimización fraccionaria que necesita ser transformado en una formulación lineal, que puede ser resuelta mediante las técnicas clásicas de programación lineal. La técnica provee diferentes tipos de modelos en función del objetivo perseguido.

### 3.1 El modelo CCR desde supuestos de retornos a escala constantes

Un primer modelo, basado en el supuesto de retornos constantes a escala, es el denominado CCR —por Charnes, Cooper y Rhodes— (1978), cuyo objetivo es maximizar la suma ponderada de los resultados de cada DMU, manteniendo la suma ponderada de los insumos igual a uno y forzando a que la razón de eficiencia sea inferior a la unidad, de acuerdo con la definición clásica de eficiencia. La formulación del modelo CCR se muestra en las ecuaciones 2 a 6 (Cooper, Seiford, Tone, 2000).

$$\max \theta = \mu_1 y_{1o} + \dots + \mu_s y_{so} \quad (2)$$

Sujeto a:

$$v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1 \quad (3)$$

$$\mu_1 y_{1j} + \dots + \mu_s y_{sj} \leq v_1 x_{1j} + \dots + v_m x_{mj} \quad (4)$$

$$v_1, v_2, \dots, v_m \geq 0 \quad (5)$$

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s \geq 0 \quad (6)$$

Donde:

- $j$ : número de unidades organizacionales  $j = 1, 2, \dots, n$
- $s$ : número de productos
- $m$ : número de insumos
- $y_{sj}$ : cantidad de producto  $s$  de la unidad organizacional  $j$
- $x_{mj}$ : cantidad del insumo  $m$  de la unidad organizacional  $j$
- $u_s$ : peso ponderado dado al producto  $s$
- $v_m$ : peso ponderado dado al insumo  $m$

Las restricciones en el modelo CCR para cada una de las DMU consideradas son idénticas y expresan, en primer lugar, que la eficiencia de cada una de las firmas debe ser inferior o igual a la unidad; es decir, existe una cota superior a la medida de la eficiencia. El segundo conjunto de restricciones expresa que la cantidad de productos no puede llegar a ser mayor que la cantidad de insumos utilizada. Las variables de decisión del modelo son entonces los pesos de los insumos y los productos necesarios para la maximización de la eficiencia de cada DMU. El resultado de eficiencia del modelo CCR puede interpretarse como el factor por el cual deben afectarse los insumos de una DMU particular, para que ésta pueda situarse en la frontera eficiente.

El modelo dual correspondiente del anterior problema de programación lineal permite decidir sobre el potencial de una reducción proporcional de todos los insumos de la DMU<sub>o</sub>, que busca garantizar por lo menos su nivel de actividad y minimizar los insumos proporcionalmente al menor valor posible. Es decir, la función objetivo encuentra el punto de referencia con el peor indicador de eficiencia de la función de producción empírica que representa a la DMU<sub>o</sub>. El modelo dual permite entonces determinar los excesos de los insumos y los déficits de los productos.

En términos del modelo dual, la DMU<sub>o</sub> es eficiente si  $\theta^* = 1$  y, además, los vectores de excesos de insumos y déficits de productos son iguales a cero. El cumplimiento de las dos condiciones anteriores se denomina eficiencia total. En este sentido, la DMU<sub>o</sub> es totalmente eficiente si y sólo si no es posible mejorar ningún insumo o producto sin desmejorar algún otro.

Si la primera condición no se cumple, significa que todos los insumos pueden ser simultáneamente reducidos sin alterar las proporciones en que son utilizados. Esta condición se denomina *eficiencia técnica pura* o *eficiencia radial* (también denominada eficiencia débil o de Farrell). Las ineficiencias asociadas a la segunda condición se denominan, por el contrario, ineficiencias de mezcla, esto es, aquella que está representada por los excesos de insumos o los déficits de productos. Asimismo, es también posible definir el conjunto de referencia de DMU eficientes para cada DMU ineficiente.

Una variación del modelo básico anterior consiste en maximizar los productos man-

teniendo los insumos constantes. Este modelo, denominado *orientación a los productos (output-oriented)*, en contraposición al anterior *–orientación a los insumos (input-oriented)–* se puede formular como:

$$\max \eta \quad (7)$$

Sujeto a:

$$\mathbf{x}_o - \mathbf{X}\boldsymbol{\mu} \geq 0 \quad (8)$$

$$\eta \mathbf{y}_o - \mathbf{Y}\boldsymbol{\mu} \leq 0 \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\mu} \geq 0 \quad (10)$$

Dada la relación inversa del modelo *output-oriented*, entre mayor sea el valor de la función objetivo  $\eta^*$ , se tiene una menor eficiencia de la DMU.

### 3.2 El modelo BCC y la descomposición de la eficiencia

El supuesto de retornos a escala constantes de los modelos CCR puede ser modificado, y dar así surgimiento a otros modelos (Cooper, Seiford, Tone, 2000). Así, el denominado modelo BCC (por Banker, Charnes y Cooper) supone retornos variables a escala y transforma el modelo CCR mediante la adición de una restricción de convexidad a los requerimientos envolventes de las restricciones; esto supone que el punto de referencia de la función de producción para la DMU<sub>o</sub> es una combinación convexa de las DMU eficientes observadas.

Las expresiones 11 a 15 presentan el modelo BCC (*input-oriented*) para evaluar la eficiencia de una DMU<sub>o</sub>:



$$\min \theta_{BCC} \quad (11)$$

Sujeto a:

$$\theta_{BCC} \mathbf{x}_o - \mathbf{X}\lambda \geq 0 \quad (12)$$

$$\mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y}_o \quad (13)$$

$$\mathbf{e}\lambda = 1 \quad (14)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (15)$$

El modelo BCC dual se expresa como:

$$\max z = \mu \mathbf{y}_o - \mu_o \quad (16)$$

Sujeto a:

$$\mathbf{v}\mathbf{x}_o = 1 \quad (17)$$

$$-\mathbf{v}\mathbf{X} + \mu \mathbf{Y} - \mu_o \mathbf{e} \leq 0 \quad (18)$$

$$\mathbf{v} \geq 0, \mu \geq 0 \quad (19)$$

La eficiencia en el modelo BCC se obtiene cuando para una DMU la función objetivo arroja  $\theta_o^* = 1$  y el exceso de sus holguras, tanto por uso en exceso de los insumos como por déficit, en los productos son iguales a cero.

Los resultados de eficiencia BCC siempre resultan mayores o iguales que la eficiencia obtenida por el modelo CCR, debido a que la distancia de referencia a la frontera BCC es mayor o igual que la distancia de referencia a la frontera del modelo CCR. Ahora bien, dado que se cumple que  $\theta_{BCC}^*$  es siempre

mayor o igual que  $\theta_{CCR}^*$ , entonces es posible plantear la denominada *eficiencia de escala* (EE) como:

$$EE = \frac{\theta_{CCR}^*}{\theta_{BCC}^*} \quad (20)$$

La eficiencia técnica del modelo CCR, denominada *eficiencia técnica global* (ET), se puede expresar como el resultado del producto de la eficiencia de escala y la eficiencia técnica pura o local (ETP), dada por el modelo BCC. A partir de la *eficiencia basada en las holguras* (EBH) (Cooper, Seiford, Tone, 2000), se deduce el concepto de eficiencia de mezcla (EM), como:

$$EM = \frac{EBH}{\theta_{CCR}^*} \quad (21)$$

Con lo cual:

$$EBH = EM * ET = EM * ETP * EE \quad (22)$$

La anterior relación permite explicar la ineficiencia no radial de una DMU en sus componentes de eficiencia de escala, eficiencia de mezcla y eficiente técnica pura.

### 3.3 El modelo SBM

El modelo SBM permite estimar un valor de eficiencia de mezcla a partir de la relación de las holguras, es decir, de la relación entre los déficits de producto y los superávits en el uso de los insumos. La bondad del uso de este modelo está representada en que cumple con la mayoría de las características de los modelos aditivos,

es invariante en las unidades y es además monótono decreciente. El modelo de programación lineal correspondiente se presenta en las expresiones 23 a 27.

$$\min \tau = 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{x_{io}} \tag{23}$$

s..a :

$$1 = 1 + \frac{1}{a} \sum_{r=1}^a \frac{s_r^+}{y_{ro}} \tag{24}$$

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{s}^- = \mathbf{x}_o \tag{25}$$

$$\mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{s}^+ = \mathbf{y}_o \tag{26}$$

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}; \mathbf{s}^- \geq \mathbf{0}; \mathbf{s}^+ \geq \mathbf{0} \tag{27}$$

Para la aplicación de este modelo se debe tener en cuenta que para que un insumo particular ( $x_{io}$ ) tenga el valor de cero, se debe eliminar el cociente entre la holgura y el insumo (expresión  $s_i^-/x_{io}$ ), y en segundo lugar que si el valor de una salida para una DMU particular es negativa ( $y_{io}$ ), se necesita reemplazar este valor por medio de un arquimediano, con el fin de que el cociente ( $s_i^+/y_{io}$ ) se pueda calcular y actúe como expresión penalizante. En el Cuadro 2 se presenta la comparación entre los diferentes modelos utilizados.

**Cuadro 2**  
**Comparación de los modelos DEA utilizados**

| Variables                        | CCR-input oriented | CCR-output oriented | BCC-input oriented | BCC-oriented | SBM                  |
|----------------------------------|--------------------|---------------------|--------------------|--------------|----------------------|
| Naturaleza variables de insumo   | Semipositiva       | Semipositiva        | Semipositiva       | Libre        | Semipositiva         |
| Naturaleza variables de producto | Libre              | Libre               | Libre              | Semipositiva | Libre                |
| Translación variables de insumo  | No                 | No                  | No                 | Sí           | No                   |
| Invarianza variables de producto | No                 | No                  | Sí                 | No           | No                   |
| Unidades invariables             | Sí                 | Sí                  | Sí                 | Sí           | Sí                   |
| $\theta^*$                       | [0,1]              | [0,1]               | [0,1]              | [0,1]        | [0,1]                |
| Eficiencia                       | Técnica            | Técnica             | Técnica pura       | Técnica      | Mezcla               |
| Retornos a escala                | Constantes         | Constantes          | Variables          | Variables    | Constantes variables |

Fuente: Cooper, Seiford y Tone (2000).

#### 4. Desarrollo del estudio

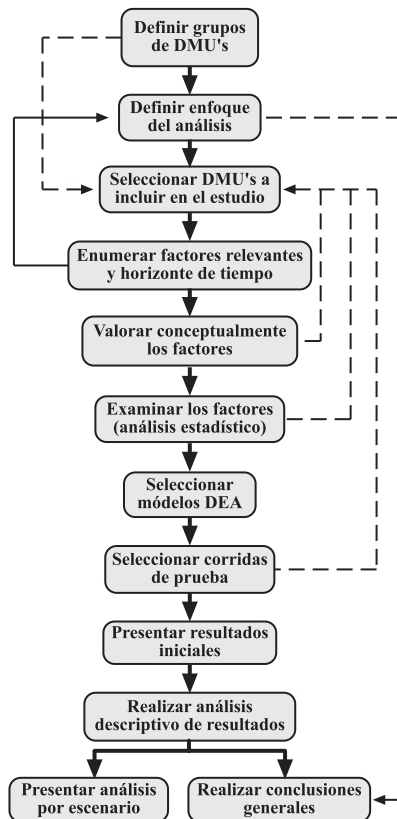
Golany y Roll (1989) plantean las tres principales fases que se deben seguir en el desarrollo de un modelo DEA, cada una de las cuales comprende a su vez diferentes pasos. Estas fases son:

- Definición y selección de cada una de las DMU que van a ser incluidas en el análisis.

- Determinación de los insumos y productos relevantes y accesibles en el análisis.
- Aplicación de los modelos DEA determinados y análisis de los resultados.

En el Gráfico 1 se muestra el diagrama de flujo que se va a seguir en el planteamiento y en el análisis de la eficiencia relativa de un conjunto de firmas dentro de una industria, donde se aprecian las diferentes fases y pasos por seguir.

Gráfico 1  
Diagrama de flujo de la técnica DEA



Fuente: adaptado por los autores, de Golany y Roll (1989).

Adicionalmente, se deben tener en cuenta las siguientes consideraciones al momento de aplicar un modelo DEA:

- Propiedad de no negatividad de las variables. En caso de presencia de valores negativos de las variables, éstas deben ser transformadas en valores no negativos.
- Propiedad de isotonicidad. Señala que un incremento en una entrada debe verse reflejado en el aumento proporcional en una salida y no al contrario (Charnes, Clark, Cooper y Golany, 1985). Si los datos no cumplen esta característica, se pueden transformar usando el complemento o recíproco (Bowlin, 1998).
- Independencia entre las variables, tanto entre insumos como entre productos. Garantiza que a una variable no se le esté dando una mayor importancia o peso más que proporcional al nivel de correlación.
- Selección en cuanto a la orientación del modelo. Refleja el tipo de resultados que se quieren conseguir, es decir, esta selección define de antemano cuál de los dos grupos de variables, insumos o productos es determinante para explicar la eficiencia relativa de las DMU.
- Finalmente, es necesario que las DMU sean homogéneas en cuanto a su funcionamiento, de tal forma que se puedan establecer comparaciones en igualdad de condiciones.

#### **4.1 Definición del universo de las DMU**

Como DMU para el estudio se escogieron aquellos planteles públicos en Bogotá de educación básica y media, de los cuales se disponía

información acerca de las variables definidas en el estudio para el 2001. Éste es el último año del que se tiene información más completa reportada por los planteles educativos distritales a la SED, toda vez que los resultados de las pruebas de competencias básicas, una de las variables de producto escogidas para el estudio, son obtenidos cada dos años y que se presentan problemas de no reporte de información confiable con anterioridad a ese año.

Cada plantel educativo puede llegar a tener diferentes características en cuanto a especialidad, jornada, ubicación u otros aspectos determinantes al momento de una comparación. La escogencia de los planteles educativos distritales seleccionados para este estudio tuvo en cuenta la heterogeneidad, así como la incidencia en los resultados de factores de entorno no controlables por parte de sus responsables. El universo de DMU se determinó como los colegios distritales de calendario A, de educación formal de las veinte localidades, que para el año 2001 hubieran dictado el nivel de educación básica secundaria y media, sin importar su carácter o especialización ni su jornada; sin embargo, dadas las diferencias académicas y administrativas de una jornada a otra en un mismo plantel, cada jornada constituye una DMU diferente. Asimismo, se incluyeron solamente los planteles educativos ubicados en la zona urbana del Distrito, ante el número poco representativo de planteles en zona rural y las grandes diferencias estructurales entre los planteles de zona urbana y los de zona rural, que harían aparecer a los planteles de esta última como ineficientes. En el Cuadro 3 se muestran las DMU contempladas en el estudio, de acuerdo con los criterios de tipo de educación ofrecida, el género del plantel, el nivel educativo, la jornada, el calendario y la zona.

**Cuadro 3**  
**Criterios de escogencia de las DMU**

| Tipo de educación | Formal     |                 | No Formal         |          |
|-------------------|------------|-----------------|-------------------|----------|
| Género            | Oficial    |                 | No Oficial        |          |
| Nivel educativo   | Preescolar | Básica primaria | Básica secundaria | Media    |
| Jornada           | Mañana     | Tarde           | Única             | Nocturna |
| Calendario        | A          |                 | B                 |          |
| Zona              | Rural      |                 | Urbana            |          |

Fuente: elaboración propia de los autores a partir de Araque, Lancheros y Murcia (2002).

De acuerdo con los criterios anteriores, el universo de DMU estuvo constituido por 175 planteles distritales o jornadas que responden al perfil definido en el estudio.

#### **4.2 Definición del objetivo del análisis**

Las características del sector educativo y de las variables involucradas en el estudio, donde se puede asumir que el empleo de una mayor cantidad de recursos puestos a disposición de un plantel educativo debe conllevar mayores resultados en términos de las variables de producto, sugieren que se está frente a retornos constantes o crecientes a escala. Por otro lado, se puede suponer que se puede alcanzar una mayor eficiencia mediante la reducción de los insumos, al mantener los productos constantes, o que se puede lograr un mejor resultado con el empleo de la misma cantidad de insumos.

Así las cosas, se optó por aplicar los modelos CCR para ambos tipos de orientaciones (*input* y *output-oriented*), a fin de analizar los supuestos de retornos constantes a escala para la caracterización de la eficiencia relativa de los planteles educativos. Sin em-

bargo, en el sector educativo pueden presentarse algunos efectos enmarcados en la teoría de las ventajas de costos comparativos, según la cual la ausencia de barreras para el intercambio en un mercado conduce a una mejor asignación de recursos y a mejores resultados para todos los involucrados, con lo cual se estaría en una situación de retornos variables a escala. En el estudio se plantean, por lo tanto, también los modelos BCC, desde las dos orientaciones, con el fin de verificar dicho supuesto. Al contar tanto con los resultados de los modelos CCR como con los de los modelos BCC, es posible efectuar la descomposición de la eficiencia y encontrar, de esta manera, para una DMU en particular, los factores que explican su ineficiencia relativa.

#### **4.3 Determinación de las variables**

Para la determinación de las variables de insumo y de producto en modelos DEA se ha sugerido un procedimiento que permita establecer la contribución de una variable a la medida de eficiencia de una DMU, mediante el cálculo de los resultados del modelo DEA con la incorporación de la variable (modelo total) y luego sin la variable con-

siderada (modelo reducido). Si la relación de la eficiencia de los modelos reducido y total para una variable y para una DMU determinada es cercana a la unidad, significa que la variable no contribuye significativamente al análisis y puede, por lo tanto, ser excluida (Mancebon y Mar Molinero, 2000).

En el caso de este estudio, se tuvieron en cuenta varias consideraciones para establecer las variables controlables (discrecionales) y no controlables (no discrecionales) determinantes para los planteles educativos seleccionados. En primer lugar, se identificaron las variables incluidas en estudios similares y comparables (Ortiz, 2002; Mancebon y Mar Molinero, 2000; Seijas, 1999, y Thanassoulis, 1996). En esta etapa se identificaron aquellas variables que se deben considerar al evaluar la gestión educativa, como son la cobertura, el rendimiento académico de los estudiantes y la gestión docente y administrativa de los planteles. Las variables inicialmente identificadas fueron validadas con expertos y personas conocedoras e involucradas en los procesos educativos, entre los que se contaron educadores de los planteles educativos, funcionarios de la SED e investigadores de la Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Javeriana.

Los expertos consideran que los resultados esperados en un plantel no deben limitarse a indicadores académicos, sino que, por el contrario, deben abarcar aspectos sociales y pedagógicos en el desarrollo de su misión. Recalcan la importancia de trabajar en aquellos factores que la institución puede controlar y hacen hincapié en

poder involucrar variables como el Proyecto Educativo Institucional (PEI), el modelo educativo de la institución, la planta física y el clima escolar como determinantes en la eficiencia de un plantel. Dentro de las variables planteadas inicialmente, resaltan como de gran impacto en la gestión integral de una institución la nómina docente, las áreas disponibles en aulas de clase, y otros factores como los ingresos del plantel, su dotación de recursos y el número de estudiantes. Como resultantes de la gestión educativa, los expertos recomendaron tener en cuenta las pruebas de competencias, los resultados de los exámenes de Estado, la extraedad, el grado de ausentismo y de educandos desertores.

Las variables identificadas como relevantes para el estudio —resultado de la consulta y de la validación con expertos y teniendo en cuenta la disponibilidad de los datos requeridos en la SED— se sometieron a un análisis estadístico para verificar la colinealidad entre las variables de entrada y garantizar la isotonicidad entre insumos y productos. En la bibliografía existente sobre el tema se sugiere el empleo de técnicas multivariadas, como el análisis de componentes principales, el análisis de factores, el análisis de clústers jerárquicos, el escalamiento dimensional, así como el análisis mediante coeficientes de correlación entre variables (Mancebon y Mar Molinero, 2000). Dichas técnicas permiten corroborar, por un lado, la inclusión de las variables en el análisis (así como el número de ellas) y, por el otro, la relación de dependencia entre ellas. En el estudio se realizó un análisis de correlación entre las variables mediante una matriz de correlación. Como resultado, se eliminaron

aquellas variables que presentaban un alto grado de correlación y otras fueron transformadas en términos de otra unidad de medida que representara de mejor manera su comportamiento.

Finalmente, como variables de entrada o de insumos se definieron los metros cuadrados de aulas de clase por estudiante, los metros cuadrados disponibles para actividades deportivas por estudiante, los ingresos que percibe el plantel por estudiante matriculado, el valor de la nómina de docentes por estudiante y el valor de la nómina del personal administrativo por estudiante. Como variables de salida o de productos se establecieron las variables número de estudiantes en intraedad, los resultados obtenidos en los exámenes de Estado de educación secundaria y los resultados de las pruebas de competencias básicas.

A continuación se presenta la definición de cada una de estas variables de insumos y de productos:

- Variables de entrada:

- ✓ Metros cuadrados construidos en aulas de clase por estudiante: este indicador establece la relación entre los metros cuadrados construidos en aulas de clase con respecto al número de estudiantes del plantel educativo. Se entiende por aulas de clase los espacios destinados a los procesos formales de enseñanza-aprendizaje. Al incluir esta variable en el estudio, se busca determinar el grado en que el espacio destinado al desarrollo del trabajo académico influye en los resultados académicos, y pretende convertirse en una herramienta para hacer comparaciones entre planteles respecto a la utilización de la planta física.
- ✓ Metros cuadrados construidos para deporte por estudiante: esta variable representa los metros cuadrados construidos en canchas o en otros espacios deportivos con respecto al número de estudiantes del plantel educativo; indica la manera como los espacios de recreación y deportes contribuyen en el logro de los resultados académicos y de formación del plantel educativo, además que permite identificar aquellos que no le dan un uso adecuado a dichos espacios.
- ✓ Ingresos por estudiante: por tratarse de planteles públicos que reciben recursos de presupuesto del Distrito Capital, esta variable representa el valor que recibe el plantel educativo por concepto de matrícula y pensión por cada estudiante al año. Los resultados sirven de base para analizar la asignación que hace el Distrito Capital, que obedece a otros criterios y no a criterios de eficiencia, así como la posible redistribución de los aportes que se hacen a los planteles educativos.
- ✓ Nómina docente por estudiante: es el cociente entre el valor anual de la nómina docente para sexto a undécimo grado con relación al número de estudiantes del plantel educativo.
- ✓ Nómina administrativa por estudiante: es el cociente entre el valor anual de la nómina administrativa del plantel educativo con relación al número de estudiantes.

- Variables de salida:
  - ✓ Número de estudiantes en intraedad: representa la cantidad de estudiantes que se encuentran en la edad promedio correspondiente a cada curso. El número de estudiantes que están por fuera de la edad requerida para cada grado representa una problemática en el sector educativo, por lo que se busca que los planteles educativos logren tener el mayor número de estudiantes en la edad prevista para cada curso; en algunas ocasiones tales instituciones contribuyen a incrementar el número de estudiantes en extraedad, como consecuencia de la metodología y pedagogía utilizada, por su forma de evaluación o por su cobertura, entre otros factores.
  - ✓ Resultados de las pruebas de Estado de la educación secundaria: se tomó el valor promedio de dichas pruebas, con el fin de reducir el número de variables de salida.
  - ✓ Resultados de las pruebas de competencias básicas: se tomaron resultados en forma individual para cada una de las tres áreas evaluadas —ciencias, matemáticas y lenguaje— así como el valor promedio de dichas áreas.

A diferencia de otros casos de aplicación de la técnica DEA en el sector educativo, este estudio incluye como variables de entrada o de insumos no solamente aspectos de costo, tradicionalmente empleados, sino también otros, no directamente relacionados con los resultados del proceso educativo en este

tipo de estudios, por ejemplo, la infraestructura física, representada en las instalaciones de aulas y de propósitos recreativos y deportivos, como explicación de los resultados alcanzados. Desde el punto de vista de las salidas o los productos, el estudio sigue la orientación encontrada en la bibliografía existente de expresar los resultados en términos cuantitativos, de acuerdo con los estándares de medición comparativa de los planteles educativos y de los estudiantes. Sin embargo, como variable de salida se incluye, además, el número de estudiantes en intraedad en el plantel educativo, variable que recoge seguramente el efecto de la repitencia y el abandono escolar. En materia tanto de variables de entrada como de salida de los modelos DEA, es posible pensar en muchas más de las aquí consideradas; sin embargo, se trata de información que no necesariamente se encontraba disponible para los planteles educativos evaluados.

En la aplicación de la técnica DEA se recomienda un número mínimo de DMU y, por ende, de datos para ser utilizados en el análisis con relación al número de variables incluidas. Así, Cooper, Seiford y Tone (2000) proponen que el número de DMU debe ser mayor que la suma de variables de insumos y de productos; mientras que Golany y Roll (1989) plantean que el número de DMU debe ser por lo menos dos veces mayor que la suma de variables de insumos y de productos. El número de DMU disponibles para este estudio es lo suficientemente amplio, comparado con el número de variables, con lo cual se evitan problemas de convergencia de los resulta-



dos y que, eventualmente, DMU ineficientes puedan llegar a estar ubicadas en la frontera eficiente ante la falta de variables discriminatorias. El número de DMU utilizado es más que adecuado a la luz de las consideraciones de homogeneidad de las variables presentes en los problemas DEA.

## 5. Análisis de resultados

En el Cuadro 4 se presentan los modelos ejecutados, las diferentes orientaciones utilizadas y el número de DMU involucrado en cada uno de ellos, de acuerdo con el número de estudiantes y el tipo de jornada.

Cuadro 4  
Número de DMU estudiadas por modelo y conjunto homogéneo

| Modelo |                        | Estudiantes |       |            |        | Jornada |       |
|--------|------------------------|-------------|-------|------------|--------|---------|-------|
|        |                        | Todos       | < 500 | 500 - 1000 | > 1000 | Mañana  | Tarde |
| CCR    | <i>Input-oriented</i>  | 137         | 24    | 85         | 28     | 57      | 80    |
|        | <i>Output-oriented</i> |             |       |            |        |         |       |
| BCC    | <i>Input-oriented</i>  | 137         | 24    | 85         | 28     | 57      | 80    |
|        | <i>Output-oriented</i> |             |       |            |        |         |       |
| SBM    | <i>Input-oriented</i>  | 137         | 24    | 85         | 28     | 57      | 80    |
|        | <i>Output-oriented</i> |             |       |            |        |         |       |

Fuente: elaboración propia de los autores a partir de Araque, Lancheros y Murcia (2002).

Se han desarrollado diferentes aplicaciones para resolver modelos DEA (Warwick, 2002). En este estudio se empleó el software Efficiency Measurement System (EMS), version 1.3, que trabaja con Windows® 9x/NT (Scheel, 2000). El EMS hace uso de la librería para solucionar problemas de programación lineal BPMPD 2.11 para el cálculo de los resultados (Scheel, 2000). Este software permite introducir de una manera fácil y ordenada los datos de insumos y productos utilizando Microsoft® Excel.

Se construyeron y desarrollaron modelos para todas las DMU consideradas, así como discriminadas por jornada y por número de estudiantes, tal como se presenta en el Cuadro 4, con el fin de obtener resul-

tados de grupos homogéneos. A continuación se presentan algunos de los resultados obtenidos.

Los diferentes modelos planteados arrojan para cada DMU el resultado de su eficiencia relativa y le señalan a cada una de ellas la proporción en que debe utilizar en mejor medida los insumos disponibles o aumentar los resultados. Así, por ejemplo, con el modelo CCR input-oriented se encuentra que la DMU con la menor eficiencia relativa es el plantel F47, con un resultado de eficiencia técnica del 55% y le señala cómo debería disminuir 0,13 metros cuadrados por estudiante su área deportiva y en \$8.221,69 su nomina administrativa, a fin de colocarse en la frontera eficiente del total de planteles educativos analizados.

Sin embargo, no parecería recomendable reducir los insumos, y en lugar de ello se debería pensar en incrementar los resultados obtenidos con los recursos disponibles. Al tomar los resultados para esta DMU en el modelo *output-oriented*, se encuentra que su ineficiencia relativa puede ser corregida si incrementa los resultados de sus estudiantes en los exámenes de Estado en 7,20 y se presenta un aumento de los resultados de las competencias básicas en 120 puntos.

### 5.1 Los planteles eficientes

El Cuadro 5 presenta el número de DMU eficientes para cada uno de los conjuntos definidos, de acuerdo con el número de estudiantes y para los diferentes modelos y orientaciones utilizados. Los resultados, además, se discriminan de acuerdo con la variable de las pruebas de competencias básicas. Así, por ejemplo, en los modelos que involucran a las 137 DMU del estudio, los modelos CCR muestran una menor cantidad de DMU eficientes, a la vez que al tomar el promedio de los resultados de las pruebas de competencias básicas, se restringe mucho más el conjunto de DMU eficientes.

De manera equivalente, en el Cuadro 6 se presentan los resultados del número de DMU eficientes, discriminados por tipo de jornada. A diferencia de los resultados anteriores, se obtienen aquí menores diferencias, al considerar los resultados de las pruebas de competencias básicas en forma individual o al tomar sus valores promedio.

### 5.2 La proyección en la frontera eficiente

A partir de los modelos que se aplicaron en el estudio y de las características de la metodología DEA, es posible establecer el desplazamiento necesario para cada DMU ineficiente, tanto en los modelos *input-oriented* como *output-oriented*, a fin de que se sitúe en la frontera eficiente. Dicho desplazamiento se encuentra a partir de dos conceptos básicos:

Considerando el óptimo de la función objetivo para una DMU particular, juzgada ineficiente. Esto, si se tiene en cuenta que éste es el nivel de eficiencia actual, es decir, que para un modelo *input-oriented* basta con aumentar sus productos en  $(1-\theta_{io}^*)$  y mantener un nivel de insumos constante o, en caso contrario, disminuir sus insumos en una proporción  $(1-\theta_{oo}^*)$  y mantener los productos constantes.

Considerando las holguras arrojadas por los modelos: los excesos en las entradas para cada uno de los insumos representan una asignación excesiva de recursos, por lo cual se deben reducir. Por otro lado, las carencias en los productos, por el contrario, indican que con la cantidad de insumos disponibles puede llegar a producirse más, es decir, que se están subutilizando los insumos.

Así, por ejemplo, la DMU F26 presenta un valor de eficiencia del 91,57% con un modelo CCR *input-oriented* del conjunto de planteles con menos de 500 estudiantes. Su proyección a la frontera eficiente puede obtenerse de la siguiente manera:

**Cuadro 5**  
**Número de DMU eficientes para cada escenario de número de estudiantes, de acuerdo con los diferentes tipos de eficiencia y discriminados según los resultados de las pruebas de competencias básicas**

| Eficiencia                                      | Resultados de competencias básicas desagregadas |                 | Resultados de competencias básicas promediadas |                 | Resultados de competencias básicas desagregadas |                 | Resultados de competencias básicas promediadas |                 | Resultados de competencias básicas desagregadas |                 | Resultados de competencias básicas promediadas |                 |
|---|---|-----------------|--|-----------------|---|-----------------|--|-----------------|---|-----------------|--|-----------------|
|   | Input-oriented                                  | Output-oriented | Input-oriented                                 | Output-oriented | Input-oriented                                  | Output-oriented | Input-oriented                                 | Output-oriented | Input-oriented                                  | Output-oriented | Input-oriented                                 | Output-oriented |
| Eficiencia técnica (modelos CCR)                | 38  | 38              | 34   | 34              | 19  | 19              | 18   | 18              | 27  | 26              | 26   | 26              |
| Eficiencia técnica pura (modelos BCC)           | 48  | 48              | 42   | 42              | 21  | 21              | 19   | 19              | 39  | 36              | 36   | 36              |
| Eficiencia de escala                            | 40  | 38              | 36   | 35              | 19  | 19              | 18   | 18              | 28  | 26              | 26   | 26              |
| Eficiencia basada en las holguras (modelos SBM) | 38  | 38              | 34   | 34              | 19  | 19              | 18   | 18              | 27  | 26              | 26   | 26              |
| Eficiencia de mezcla                            | 38  | 38              | 34   | 34              | 19  | 19              | 18   | 18              | 27  | 26              | 26   | 26              |

Fuente: elaboración propia de los autores a partir de Araque, Lancheros y Murcia (2002).

Cuadro 6

**Número de DMU eficientes para cada escenario de tipo de jornada de acuerdo con los diferentes tipos de eficiencia y discriminados según los resultados de las pruebas de competencias básicas**

| Tipo de eficiencia                              | Resultados de competencias básicas desagregadas |                        | Resultados de competencias básicas promediadas |                        | Resultados de competencias básicas desagregadas |                        | Resultados de competencias básicas promediadas |                        |
|---|---|------------------------|--|------------------------|---|------------------------|--|------------------------|
|   | <i>Input-oriented</i>                           | <i>Output-oriented</i> | <i>Input-oriented</i>                          | <i>Output-oriented</i> | <i>Input-oriented</i>                           | <i>Output-oriented</i> | <i>Input-oriented</i>                          | <i>Output-oriented</i> |
| Eficiencia técnica (modelos CCR)                | 21  | 21                     | 16   | 24                     | 27  | 27                     | 26   | 26                     |
| Eficiencia técnica pura (modelos BCC)           | 31  | 31                     | 24   | 24                     | 36  | 36                     | 34   | 34                     |
| Eficiencia de escala                            | 21  | 21                     | 19   | 57                     | 27  | 27                     | 27   | 26                     |
| Eficiencia basada en las holguras (modelos SBM) | 21  | 21                     | 16   | 24                     | 27  | 27                     | 26   | 26                     |
| Eficiencia de mezcla                            | 21  | 21                     | 16   | 24                     | 27  | 27                     | 26   | 26                     |

Fuente: elaboración propia de los autores a partir de Araque, Lancheros y Murcia (2002).

Disminuyendo su cantidad de insumos en 8,43% (1-91,57%), para obtener la misma producción que ha venido alcanzando, de lo que se concluye que los recursos están subutilizados y que requieren mayores cantidades de insumos para lograr el índice del producto actual.

Disminuyendo el valor de la variable área de deporte por estudiante en 2,68 metros cuadrados, es decir, llevando el valor original a 1.137 metros cuadrados y la variable nómina docente por estudiante de \$1'274.890 a \$1'217.846, e incrementando la variable de

producto resultado de los exámenes de Estado de 6,75 a 7 y la variable promedio de resultado de las pruebas de competencias básicas de 126,9 a 128,38.

El Cuadro 7 presenta los valores de holgura para las DMU ineficientes en el conjunto de planteles con menos de 500 estudiantes y para los resultados de las pruebas de competencias básicas promediadas. Estas holguras permiten plantear, como se mencionó, diferentes estrategias a fin de que cada DMU se pueda situar en la frontera eficiente.

Cuadro 7

**Valores de holgura de las variables de insumo y de producto de las DMU ineficientes para planteles con menos de 500 estudiantes y resultados de las pruebas de competencias básicas promediadas**

| DMU  | Eficiencia | Insumo 1 | Insumo 2 | Insumo 3  | Insumo 4   | Insumo 5  | Producto 1 | Producto 2 | Producto 3 |
|------|------------|----------|----------|-----------|------------|-----------|------------|------------|------------|
| F26  | 91,57%     | 0        | 2,68     | 0,01      | 57.044,75  | 0         | 0          | 0,34       | 1,48       |
| F38  | 93,64%     | 0        | 0,39     | 0         | 0          | 0         | 0          | 1,31       | 0          |
| F45  | 79,50%     | 3,95     | 0        | 0         | 11.264     | 0         | 0          | 0          | 0,44       |
| F48  | 90,06%     | 0,43     | 2,34     | 0         | 382.570,61 | 0         | 0          | 0,26       | 0          |
| F59  | 94,86%     | 0        | 0        | 13.491,84 | 341.117,57 | 0         | 17,06      | 0,44       | 0          |
| F130 | 74,01%     | 0        | 11,07    | 0         | 88.991,23  | 0         | 0          | 0          | 5,24       |
| F137 | 99,52%     | 0        | 0,65     | 0         | 54.164,26  | 14.946,66 | 0          | 0          | 4,71       |
| F141 | 87,58%     | 0        | 0,3      | 0         | 280.261,81 | 0         | 176,67     | 0,27       | 0          |
| F150 | 96,98%     | 5,27     | 0        | 0         | 217.540,33 | 0         | 0          | 0,12       | 0          |

Fuente: elaboración propia de los autores a partir de Araque, Lancheros y Murcia (2002).

### 5.3 Determinación del conjunto de referencia

Para cada DMU es posible identificar el conjunto de las eficientes, con las cuales debe contrastar su desempeño, dados sus niveles comparables de insumos utilizados. Las instituciones de referencia para las DMU del conjunto de planteles con menos de 500 estudiantes se presentan en el Cuadro 8. Sus valores  $\lambda_j$  expresan su contribución al conjunto de referencia de la DMU ineficiente. Así, un valor  $\lambda_j$  igual a cero representa una contribución a la explicación de la ineficiencia de la DMU evaluada no significativo, debido a niveles no comparables de operación. Por ejemplo, para la DMU F141 las que mejor pueden explicar su ineficiencia en orden de importancia son las DMU F86, F146 y F161.

### 5.4 Descomposición de la eficiencia

El desarrollo de los tres tipos de modelos, CCR, BCC y SBM, en cada uno de los grupos homogéneos definidos, permitió des-

componer la eficiencia relativa para cada DMU en términos de la eficiencia técnica (dada por el modelo CCR), la eficiencia técnica pura (dada por el modelo BCC), la eficiencia de escala, la eficiencia basada en las holguras y la eficiencia de mezcla. Cada una de éstas define cierto comportamiento relativo de las DMU, lo que permite caracterizarlas e identificar, en el caso de las DMU ineficientes, la medida en que debe trabajar para alcanzar el grado de eficiencia necesario para ubicarse sobre la frontera eficiente.

El Cuadro 9 muestra la descomposición de la eficiencia para el conjunto de planteles con menos de 500 estudiantes. De allí se puede deducir, por ejemplo, que para la DMU F26, la eficiencia técnica está sobre todo explicada por la eficiencia de escala, es decir, dicho plantel educativo está trabajando a un 91,57% en el nivel adecuado de su operación. Por otro lado, este plantel presenta una relativa baja eficiencia de mezcla, lo cual indica que está haciendo un uso no del todo eficiente de los insumos disponibles.

**Cuadro 8**  
**Conjunto de referencia para las DMU del conjunto de planteles con menos de 500 estudiantes**

| Número | DMU  | Conjunto de referencia ( $\lambda$ )              |
|--------|------|---|
| 1      | F26  | 8 (0,11) 13 (0,48) 23 (0,58)                      |
| 2      | F29  | 2   |
| 3      | F38  | 11 (0,30) 13 (0,06) 16 (0,26) 22 (0,27) 23 (0,32) |
| 4      | F39  | 4   |
| 5      | F45  | 4 (0,24) 9 (0,30) 22 (0,35) 23 (0,26)             |
| 6      | F48  | 4 (0,08) 9 (0,57) 23 (0,54)                       |
| 7      | F59  | 16 (0,39) 18 (0,14) 22 (0,47)                     |
| 8      | F86  | 8   |
| 9      | F89  | 9   |
| 10     | F90  | 10  |
| 11     | F108 | 11  |
| 12     | F114 | 12  |
| 13     | F126 | 13  |
| 14     | F128 | 14  |
| 15     | F130 | 8 (0,50) 9 (0,10) 22 (0,04) 23 (0,35)             |
| 16     | F134 | 16  |
| 17     | F137 | 4 (0,21) 22 (0,52) 23 (0,34)                      |
| 18     | F138 | 18  |
| 19     | F141 | 8 (0,75) 20 (0,06) 22 (0,33)                      |
| 20     | F146 | 20  |
| 21     | F150 | 4 (0,06) 9 (0,13) 22 (0,29) 23 (0,60)             |
| 22     | F161 | 22  |
| 23     | F164 | 23  |
| 24     | F166 | 24  |

Fuente: elaboración propia de los autores a partir de Araque, Lancheros y Murcia (2002).

**Cuadro 9**  
**Descomposición de la eficiencia de DMU eficientes del conjunto de planteles con menos de 500 estudiantes**

| DMU  | Eficiencia técnica | Eficiencia técnica pura | Eficiencia de escala | Eficiencia basada en las holguras | Eficiencia de mezcla |
|------|--------------------|-------------------------|----------------------|-----------------------------------|----------------------|
| F26  | 91,57%             | 100,00%                 | 91,57%               | 70,59%                            | 77,09%               |
| F38  | 93,64%             | 100,00%                 | 93,64%               | 77,12%                            | 82,36%               |
| F45  | 79,50%             | 100,00%                 | 79,50%               | 51,57%                            | 64,87%               |
| F48  | 90,06%             | 100,00%                 | 90,06%               | 59,35%                            | 65,90%               |
| F59  | 94,86%             | 95,03%                  | 99,82%               | 80,05%                            | 84,39%               |
| F130 | 74,01%             | 74,77%                  | 98,98%               | 54,84%                            | 74,10%               |
| F137 | 99,52%             | 100,00%                 | 99,52%               | 92,69%                            | 93,14%               |
| F141 | 87,58%             | 100,00%                 | 87,58%               | 58,14%                            | 66,39%               |
| F150 | 96,98%             | 99,18%                  | 97,78%               | 63,34%                            | 65,31%               |

Fuente: elaboración propia de los autores a partir de Araque, Lancheros y Murcia (2002).

## Conclusiones

A pesar de algunas debilidades señaladas en la bibliografía acerca de su utilización (Sengupta, 1995), el análisis envolvente de datos es una técnica de optimización no paramétrica lo suficientemente estructurada para medir la eficiencia relativa de firmas en el interior de una industria, sin necesidad de hacer supuestos a priori sobre el comportamiento de la función de producción. Sin embargo, su utilización y la calidad de sus resultados están supeditadas a una adecuada selección de las variables de insumo y de producto y a la disponibilidad de información sobre éstas. En esta medida, los resultados obtenidos en este estudio de aplicación en los planteles educativos distritales tienen un alcance limitado, determinado por el contexto de las variables utilizadas y de los objetivos del estudio.

Los resultados obtenidos le permiten a cada plantel educativo conocer en qué medida deben incrementar la utilización de los recursos considerados, a fin de mejorar su eficiencia relativa o, de manera correlativa, para el nivel dado de recursos, cuáles son los resultados que es posible esperar en la comparación con planteles de características similares. Para el ejecutor de las políticas, los resultados del estudio le pueden dar indicaciones acerca de la mejor asignación de los recursos disponibles, a fin de incrementar la eficiencia de los planteles educativos. Se debe recalcar, sin embargo, que tales resultados sólo dan cuenta de la medición de la eficiencia y no pueden tomarse sin perder de vista los propósitos de incremento de la calidad y ampliación de la cobertura.

La definición de conjuntos homogéneos permitió refinar algunos de los resultados; por eso, en futuras aplicaciones de los modelos se pueden restringir aún más dichos conjuntos para obtener resultados mucho más confiables, al considerar como planteles de referencia a aquellos directamente comparables. De la misma manera, aparte de las consideraciones acerca del número de estudiantes y del tipo de jornada, es posible pensar en otras variables o criterios que determinen conjuntos homogéneos de referencia.

En la determinación de la eficiencia relativa, es posible pensar en la inclusión de otras variables de insumos y productos que den cuenta, por ejemplo, de la metodología empleada en el sistema educativo para la transmisión de conocimientos, del grado de reflexión de los docentes hacia su práctica pedagógica, de la articulación de los procesos de enseñanza que se desarrollan en las instituciones escolares con la vida cotidiana, de los intereses y las necesidades del estudiante y las relaciones con su contexto socioeconómico, así como del tipo de prácticas de enseñanza y su contribución hacia el desarrollo de la creatividad, la investigación y la posibilidad de buscar nuevas y diversas maneras de abordar el aprendizaje.

## Referencias bibliográficas

- Afriat, S., 1972. "Efficiency Estimation of Production Functions", en: *International Economic Review*, v. 13, n. 3, p. 568-598.
- Aigner, D. J.; Lovell, C. A. K., y Schmidt, P., 1977. "Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models", en: *Journal of Econometrics*, v. 6, n. 1, p. 21-37.

- Anderson, T., 2002. Introduction to DEA: A Data Envelopment Analysis (DEA) home page, disponible en: <http://www.emp.pdx.edu/dea/homedea.html>, agosto.
- Araque, D.; Lancheros, J., y Murcia, C., 2002. Determinación de la eficiencia de los colegios distritales de educación media vocacional mediante el uso de análisis envolvente de datos, trabajo de grado, Bogotá, Pontificia Universidad Javeriana.
- Banker, R. D.; Charnes, A., y Cooper, W. W., 1984. "Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies", en: *Management Science*, v. 39, p. 1261-1264.
- Beasley, J. E., 2002. Data Envelopment Analysis, disponible en: <http://www.ms.ic.ac.uk/jeb/or/dea.html>, agosto.
- Bowlin, W., 1998. "Measuring Performance: An Introduction to Data Envelopment Analysis (DEA)", en: *Journal of Cost Analysis*, p. 3-27.
- Chakraborty, K.; Biswas, B., y Lewis, W. C., 2000. "Measurement of Technical Efficiency in Public Education: A Stochastic and non Stochastic Production Function Approach", en: *Southern Economic Journal*, v. 67, n. 4, p. 889-905.
- Charnes, A.; Cooper, W. W., y Rhodes, E., 1978. "Measuring the Efficiency of Decision Making Units", en: *European Journal of Operation Research*, n. 2, p. 429-444.
- Charnes, A.; Clark, T.; Cooper, W. W., y Golany, B., 1985. "A Developmental Study of Data Envelopment Analysis for Measuring the Efficiency of Maintenance Units in the U.S. Air Force", en: *Annals of Operations Research*, n. 2, p. 95-112.
- Cooper, W. W.; Seiford, L. M., y Tone, K., 2000. Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and Dea-Solver Software, Dordrecht, Kluwer Academic.
- DEA Homepage, 2002. Data Envelopment Analysis, disponible en: <http://www.deazone.com/>, junio.
- Eyob, Z., 2000. "Hospital Efficiency in Sub-Saharan Africa: Evidence from South Africa", en: The United Nations University: World Institute for Development Economics Research, Working paper, n. 187, p. 12-22.
- Farrell, M. J., 1957. "The Measurement of Productive Efficiency", en: *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, n. 120, p. 253-281.
- Forsund, R. F. y Sarafoglou, N., 2002. On the Origins of Data Envelopment Analysis, disponible en: <http://www.oekonomi.uio.no/memo/memopdf/memo2400.pdf>, 20 de junio.
- Golany, B. y Roll, Y., 1989. "An Application Procedure for DEA", en: *Omega*, v. 17, n. 3, p. 237-249.
- Gutiérrez, E. y Salazar, A. 1995. El Proyecto Educativo Institucional, una construcción de sentido: manual para el desarrollo del PEI, Bogotá, Santillana.
- Kaiser, H. F., 1958. "The Varimax criterion for Analytic Rotation in Factor Analysis", en: *Psychometrika*, v. 23, p. 187-200.
- Mancebon, M. J. y Mar Molinero, C., 2000, "Performance in Primary Schools", en: *Journal of the Operational Research Society*, v. 51, n. 7, p. 843-854.



- Mankiw, G. N., 1998. Principios de economía, Madrid, Mc Graw Hill Interamericana.
- Meier, K. y O'Toole, L., 2001. "Managerial Strategies and Behaviour in Networks: A Model with Evidence From U.S. Public Education", en: *Journal of Public Administration Research and Theory*, v. 11, n. 3, p. 271-295.
- Mena, H., 1999. Eficiencia correlativa de las exportaciones de los países miembros de la Comunidad Andina y Chile, utilizando DEA, Bogotá, Universidad de los Andes.
- Mendoza, L. J., 2000. Eficiencia y productividad del sector bancario colombiano: una aproximación con DEA, Bogotá, Universidad de los Andes.
- Núñez, J.; Steiner, R.; Cadena, X., y Pardo, R., 2002. "¿Cuáles colegios ofrecen mejor educación en Colombia?", en: Documento CEDE 2002-03, Bogotá, Universidad de los Andes.
- Ortiz, J. P., 2002. Evaluación de la eficiencia en la utilización de recursos para la generación de resultados de aprendizaje en los centros educativos distritales -CEDS-, Bogotá, Universidad de los Andes.
- Pérez, Y. y García, R., 2002. Diseño, desarrollo e implementación de un modelo Data Envelopment Analysis (DEA) con soporte estadístico de técnicas multivariadas aplicado al mercado mayorista de energía eléctrica colombiana, informe de investigación, Bogotá, Pontificia Universidad Javeriana.
- Polania, B. E., 1997. Una aplicación de DEA: análisis comparativo de eficiencia de hospitales en Colombia, Bogotá: Universidad de los Andes.
- Rivera, A., 1997. Construyendo Pedagogía: estándares básicos para construcciones escolares, Bogotá, Secretaría de Educación Distrital.
- Prior, D. y Surroca, J., 2001. "Modelo para la identificación de grupos estratégicos, basado en el análisis envolvente de datos: aplicación al sector bancario español", en: Document de Treball, abril, n. 2, p. 1-36.
- República de Colombia, Alcaldía Mayor de Bogotá, 2000. Estudiantes Competentes para una Ciudad Competitiva, Bogotá.
- República de Colombia, Congreso Nacional de la Republica, 1996. "Decreto 114 de 1996", en: Diario Oficial, n. 42693, p. 8-12.
- \_\_\_\_\_, 1994. "Ley 115 General de Educación", en: Diario Oficial, n. 41214, p. 1-20.
- República de Colombia, Secretaría de Educación Distrital, 2002. Cifras estadísticas, disponible en: <http://www.sedbogota.edu.co/sector.htm>.
- \_\_\_\_\_, 2001a. Comprensión y sensibilidad ciudadana, Serie Guías. Interpretación de resultados, calendario A, Bogotá, SED.
- \_\_\_\_\_, 2001b. Resultados: evaluación de competencias básicas en lenguaje, matemáticas y ciencias, Serie Guías. Sexta aplicación, calendario A, Bogotá, SED.
- \_\_\_\_\_, 1999. Resultados: evaluación de competencias básicas en lenguaje, matemáticas y ciencias, Serie Guías. Tercera aplicación, calendario A, Bogotá, SED.
- \_\_\_\_\_, 1997. Manual de evaluación y clasificación de establecimientos educativos privados, Bogotá.
- Resti, A., 2000, "Efficiency Measurement for Multi-product Industries: A Comparison of classic and recent Techniques based on simulated Data",

- en: *European Journal of Operational Research*, n. 121, p. 559-578.
- Reyes, M.; Figueroa, E., y Córdoba, J., 1993. Análisis envolvente de datos: aplicación en la medida de la eficiencia en los servicios de medicina preventiva hospitalarios de Andalucía, Cádiz, Hospital Universitario Puerta del Mar.
- Robst, J., 2001. "Cost Efficiency in Public Higher Education Institutions", en: *The Journal of Higher Education*, v. 72, p. 730-750.
- Ruggiero, J., 2001. "Determining the Base Cost of Education: an Analysis of Ohio Schools Districts.", en: *Contemporary Economic Policy*, v. 19, n. 3, p. 268-279.
- Santin, D., 2000. Detección de estudiantes de riesgo y medición de la eficiencia de centros escolares mediante redes neuronales, Madrid, s. e.
- Sarrico, C. S. y Dyson, R. G., 2000, "Using DEA for Planning in UK Universities-an Institutional Perspective", en: *Journal of the Operational Research Society*, n. 51, p. 789-800.
- Scheel, H., 2002. EMS: Efficiency Measurement System User's Manual, disponible en: <http://www.wiso.unidortmund.de/lsg/or/scheel/doordea.htm#software>, versión 1.3: 2000, septiembre.
- Seijas, A., 1999. Análisis de la eficiencia de las instituciones de educación secundaria en la provincia de la Coruña, II Congreso de Economía de Galicia, La Coruña, Universidad de la Coruña.
- Sengupta, J. K., 1995. Dynamics of Data Envelopment Analysis: Theory of Systems Efficiency, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.
- Thanassoulis, E., 1996. "Altering the Bias in differential School effectiveness using Data Envelopment Analysis", en: *Journal of the Operational Research Society*, n. 47, p. 883-894.
- The University of Warwick, 2002. Data Envelopment Analysis Websites, disponible en: <http://www.warwick.ac.uk/~bsrnb/pages/links/dea.htm>, septiembre.