SECCIÓN TÉCNICO-ECONÓMICA

Principios de cálculo de prima basados en una medida de riesgo coherente para su empleo en la tarificación actuarial de un seguro del ramo de vida: Aplicación a un seguro con cobertura de supervivencia (seguro de rentas)*

Montserrat Hernández Solís**

Fecha de recepción: 5 de abril
Fecha de aceptación: 14 de mayo

SUMARIO

1. INTRODUCCIÓN AL RAMO DE VIDA ASEGURADOR

1.1 Conceptos y variables aleatorias básicas

1.2 Las leyes de supervivencia

2. LOS PRINCIPIOS DE CÁLCULO DE PRIMA BASADOS EN MEDIDAS DE RIESGO

2.1 Los riesgos de las entidades aseguradoras

2.2 Definición de Medida de Riesgo y su vinculación con el principio de cálculo de prima

---

* Este artículo tiene su origen en la tesis doctoral de la autora, defendida en la Universidad Complutense de Madrid en Enero de 2013. El título de la tesis es "Tarificación en seguros de vida con la medida de riesgo esperanza distorsionada".

** Doctora en Ciencias Económicas y Empresariales, Especialidad Actuarial, por la Universidad Complutense de Madrid, España. Profesora a tiempo completo en el Departamento de Economía de la empresa y contabilidad de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). Correo: montserrath@cee.uned.es

2.3 Axiomas de coherencia para un principio de cálculo de prima

3. 3 LOS PRINCIPIOS DE CÁLCULO DE PRIMA: VERIFICACIÓN DE LOS AXIOMAS DE COHERENCIA

3.1 Principio del valor esperado y su caso particular: el Principio de prima neta.

3.2 Principio de prima de la varianza

3.3 Principio de prima exponencial

3.4 Principio de prima Esscher

3.5 Principio de función de distorsión de Wang

4. APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE PRIMA NETA y PRINCPIO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL PARA OBTENER LA PRIMA UNICA DE RIESGO EN UN SEGURO DE RENTAS

4.1 Cálculo de la prima única de riesgo por el principio de prima neta

4.2 Cálculo de la prima única por el principio de la función de distorsión

5. CONCLUSIONES

6. BIBLIOGRAFÍA

Resumen

En este artículo se lleva a cabo un estudio de los diferentes principios de cálculo de prima existentes en el ramo de las ciencias actuariales para realizar el proceso de tarificación en un seguro con cobertura de supervivencia (el seguro de rentas vitalicio). Los principios que se estudian en este trabajo de investigación se aplican, tanto en el ramo de los seguros generales como en el del ramo de vida, siendo éste último el seleccionado para este estudio. De todos los principios estudiados se han seleccionado los que verifican el llamado criterio de coherencia (Artzner, P. Delbaen, F. Eber, JM. Heath, D. (1999)). Y para esto se han realizado las demostraciones matemáticas de los axiomas de coherencia para todos y cada uno de los principios de cálculo de prima. Una vez seleccionados los principios con los que se trabaja, que van a ser dos, el principio de prima neta y el principio basado en la función de distorsión en forma de potencia, se aplican para el cálculo de la prima única de riesgo, tanto a nivel general como ejemplificado a dos leyes de supervivencia usadas con regularidad en el ramo de vida, la primera y segunda ley de Dormoy.

Palabras clave: Función de Distorsión, Medida de riesgo coherente, Prima Neta, Tarificación.

Palabras clave descriptor: Cálculo de prima, Criterio de coherencia, Leyes de supervivencia.

Title

Premium calculation principles based in a coherent risk measure. The use in actuarial pricing of life insurance. Application to a survivor's insurance coverage, called survival life insurance (Annuities).

Abstract

The goal of this paper is to study the different Premium calculation principles existing in the actuarial field to carry out the process of pricing in a survival insurance coverage (annuities). The principles discusses in this research are applied in both the general insurance and the life insurance. Of all the principles has been selected which satisfy the axiom of coherence. (Artzner, P. Delbaen, F. Eber, JM. Heath, D. (1999)). To get this objective, some mathematical proofs have been made about the axiom of coherence for each and every one of the premium calculation principles. After selecting the principles with which we work, we are going to choice two of them, the Net premium principle and the Distortion function principle. These principles have been applied to the calculation of the single premium, both generally as applied to the laws of survival used regularly in the area of life insurance, called the first law and the second law of Dormoy.

Key words: Coherent risk measure, Distortion function, Net Premium, Pricing.

Key words plus: Premium calculation, Coherent criteria, Surviving laws

1. INTRODUCCIÓN AL RAMO DE VIDA ASEGURADOR

Un seguro de vida es una operación normalmente de largo plazo (Bowers, JR. Newton, L. Gerber, H. Jones, D. (1997)), compuesta por una prestación única o múltiple y una contraprestación única o múltiple. La prestación representa el capital o capitales garantizados por la compañía en el momento de acaecimiento del evento cubierto en la póliza, pagaderos al asegurado o al beneficiario en su caso, mientras que la contraprestación representa la prima única o periódica que la aseguradora cobra del asegurado por admitir que éste le transfiera su riesgo. Se trata también de una operación de capitalización, dado que la valoración de los capitales en un determinado momento se realiza con la ley de capitalización compuesta o su inversa, valorándose todos los flujos de la operación al llamado tipo de interés técnico, el cual representa la rentabilidad que la compañía aseguradora va a garantizar al asegurado. Esta rentabilidad garantizada es la mínima que obtiene la compañía por invertir las primas recaudadas.

Se puede dar otra definición del seguro de vida teniendo en cuenta la existencia de dichos elementos reales, tal que es el contrato por el cual el asegurador se obliga frente al beneficiario, a cambio de una cantidad de dinero pagada por el tomador llamada prima, a satisfacer una cantidad fija de dinero, una renta o una combinación de ambas en el caso de que acaezca el supuesto cubierto en la póliza, el cual será el fallecimiento del tomador o la supervivencia (Gerber, H (1990)).

Los elementos reales del seguro son las personas, físicas o jurídicas, que lo integran. Son tres, el asegurador, el tomador y el beneficiario de la póliza. Tomador y beneficiario no suelen coincidir en los seguros de vida, sobre todo en los seguros con cobertura de fallecimiento.

El asegurador es la persona jurídica (la compañía aseguradora) que se hace cargo del riesgo transferido por el asegurado a cambio de una cantidad de dinero. El asegurado es la persona física que desea transferir el riesgo de sobrevivir o de fallecer a la compañía aseguradora, dado que le es más útil (en base a la teoría de la utilidad) transferir sus riesgos a la compañía que soportarlos el mismo. Y el tomador de la póliza es la persona física o jurídica que firma la póliza, obligándose por ello al pago de la prima. En los seguros de vida normalmente coincide tomador con asegurado, excepto en aquellos seguros contratados por empresas a favor de sus trabajadores como un beneficio social.

El beneficiario es la persona que será indemnizada por la compañía, esto es, que recibirá el capital o capitales asegurados cuando se produzca alguno de los eventos cubiertos en la póliza.

1.1. Conceptos y variables aleatorias básicas

Se procede a detallar los conceptos y todas y cada una de las variables aleatorias necesarias para este trabajo, así como sus funciones de distribución (Gil Fana, JA. Heras, A. Vilar Zanón, JL (1999)).

- X: Es una variable aleatoria que representa la edad de fallecimiento de una persona desde su nacimiento.

- Función de Distribución:

$$F(x) = Pr(X \leq x)$$

  Esta variable está definida en el conjunto de los números reales positivos, aunque en la práctica se acepta considerar una edad máxima representada por ω, por lo que el campo de variación es de $(0; \omega)$.

- S(x): Es la función de Supervivencia. Es una función que asigna, para cada edad, la probabilidad de que un individuo sobreviva a esa edad x.

- Función de densidad, la cual puede ser expresada en términos de la función de supervivencia:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{-dS(x)}{dx} = -S'(x)$$

- T_x: Vida residual. Es una variable aleatoria que representa el tiempo de vida de un individuo de edad x hasta su fallecimiento. Por esto el campo de variación de esta variable, dado $X > x$ será $(0; \omega - 0)$.

  La función de distribución de esta variable aleatoria es la siguiente:

$$G_x(t) = F_x(x+t) = P(x < X \leq x + t / X > x) = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)} = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)}$$

La función de densidad de la citada variable aleatoria se representa de este modo:

$$g_x(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{S(x)-S(x+t)}{S(x)}\right) = \frac{-d}{dt}\left(\frac{S(x+t)}{S(x)}\right) = \qquad (2)$$
$$= \frac{f(x+t)}{1-F(x)} = \frac{-S'(x+t)}{S(x)} \geq 0 \quad 0 < t < É - x$$

- μ_x: Tanto instantáneo de mortalidad. Es una medida de la fuerza o intensidad de la mortalidad a la edad x para los individuos que han alcanzado esa edad. También se le conoce con el nombre de fuerza de mortalidad a la edad x (Ayuso, M. Corrales, H. Guillén, M. Pérez-Marín, AM. Rojo, JL. (2007)).

La relación entre el tanto instantáneo con la distribución de la variable aleatoria vida residual es:

$$¼_{x+t} = \frac{\frac{f(x+t)}{S(x)}}{\frac{S(x+t)}{S(x)}} = \frac{g_x(t)}{1-G_x(t)} \qquad (3)$$

Por lo tanto, se puede calcular este tanto si se conocen las funciones de distribución y de densidad de la variable edad de fallecimiento definida con anterioridad.

1.2 Las leyes de supervivencia

Las leyes de supervivencia son modelos de comportamiento de las diferentes funciones biométricas, del tanto instantáneo, de las probabilidades de fallecimiento y de supervivencia así como de la denominada función cohorte, entre otras (Ayuso, M. Corrales, H. Guillén, M. Pérez-Marín, AM. Rojo, JL. (2007)). El interés por establecer estos modelos de supervivencia es doble, tal como indican los autores anteriores. Por un lado un interés desde el punto de vista de la metodología, ya que la aplicación de ciertas hipótesis sobre el comportamiento de los fenómenos biológicos acaban por determinar una determinada forma de función para varias funciones biométricas. Y por otro lado el interés es eminentemente práctico, ya que si se consigue una forma funcional para la función de supervivencia que dependa de pocos parámetros, el resultado obtenido también dependerá solamente de esos pocos parámetros.

A modo de resumen se muestran unas tablas donde se recogen, para cada una de las dos leyes de supervivencia empleadas en este artículo, los siguientes datos matemáticos actuariales precisos para el posterior cálculo de la prima única de riesgo:

Tabla 1: Primera ley de Dormoy

1ª LEY DE DORMOY	Formulación
Función cohorte	$l_x = l_0 S^x$
Probabilidad anual de supervivencia	$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x S}{l_x} = S$
Probabilidad anual de fallecimiento	$q_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - \frac{l_x S}{l_x} = 1 - S$
Tanto instantáneo de Mortalidad	$\mu_x = -\mathrm{Ln} S$
Función Distribución Variable "Edad de Fallecimiento"	$F(x) = 1 - S(x) = 1 - S^x$
Función Supervivencia Variable "Edad de fallecimiento"	$S(x) = \frac{l_x}{l_0} = \frac{l_0 S^x}{l_0} = S^x$
Función densidad variable T_x	$g_x(t) = -\mathrm{Ln} S S^t$

Fuente: Elaboración propia en base a Ayuso, M. Corrales, H. Guillén, M. Pérez-Marín, AM. Rojo, JL. (2007)

Tabla 2: Segunda ley de Dormoy

2ª LEY DE DORMOY	Formulación
Función cohorte	$l_x = l_0 S_1^x S_2^{x^2}$
Probabilidad anual de supervivencia	$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_0 S_1^{x+1} S_2^{(x+1)^2}}{l_0 S_1^x S_2^{x^2}} = S_1 S_2^{2x+1}$
Probabilidad anual de fallecimiento	$q_x = 1 - S_1 S_2^{2x+1}$
Tanto instantáneo de Mortalidad	$\mu_x = -\frac{l'_x}{l_x} = -2x \mathrm{Ln} S_2 - \mathrm{Ln} S_1$
Función Distribución Variable "Edad de Fallecimiento"	$F(x) = 1 - S(x) = 1 - S_1^x S_2^{x^2}$

2ª LEY DE DORMOY	Formulación
Función Supervivencia Variable "Edad de fallecimiento"	$S(x) = S_1^x S_2^{x^2}$
Función densidad variable T_x	$g_x(t) = -\left(2(x+t)\mathrm{Ln}S_2 + \mathrm{Ln}S_1\right)\left(S_1 S_2^{2x+t}\right)^t$

Fuente: Elaboración propia en base a Ayuso, M. Corrales, H. Guillén, M. Pérez-Marín, AM. Rojo, JL. (2007)

2. LOS PRINCIPIOS DE CÁLCULO DE PRIMA BASADOS EN MEDIDAS DE RIESGO

2.1 *Los riesgos de las entidades aseguradoras*

En toda empresa existen riesgos que pueden hacer peligrar su situación económica y llevarla, incluso a la quiebra. La palabra riesgo va unida al azar, a la incertidumbre, luego por lo tanto está relacionado con la aleatoriedad en cuanto a su acaecimiento y la cuantía de la pérdida. Se puede definir como la incertidumbre que existe de que un evento se produzca, en un determinado momento y bajo unas condiciones concretas, originándose por ello unas pérdidas cuantificables. Es preciso analizar los riesgos que afectan a las aseguradoras en el ramo de vida, con el fin de realizar una buena gestión de los mismos, ya que el estudio de los riesgos no se limita a cuantificarlos (medirlos) sino también a obtener una buena protección frente a los mismos e intentar prevenirlos. En nuestro caso vamos a centrar la atención en el ramo de vida asegurador.

Los principales riesgos a los que se enfrentan las entidades aseguradoras se recogen en la siguiente tabla. De todos ellos, es el riesgo de longevidad con el que se trabaja en este artículo de investigación, dado que es al que se enfrentan las entidades aseguradoras en un seguro con cobertura de supervivencia.

Tabla 3: Riesgos Actuariales

Riesgo de mercado	Se da tanto en el ramo de vida como en el de no vida
Riesgo de liquidez	Se da tanto en el ramo de vida como en el de no vida
Riesgo de crédito	Se da tanto en el ramo de vida como en el de no vida
Riesgo operacional	Se da tanto en el ramo de vida como en el de no vida
Riesgo de caída de cartera: - De rescate - De reducción	Es específico del ramo de vida
Riesgo biométrico: - Mortalidad - Longevidad - Incapacidad	Es específico del ramo de vida

Fuente: Elaboración propia en base a Sandell, R (2003); Vegas Asensio, J (2000).

El riesgo de longevidad es el que se origina por una reducción en la tasa de mortalidad. Comprende el aumento paulatino de la esperanza de vida de las personas, debido a una mejora en la calidad de vida. A este proceso se le conoce con el nombre de envejecimiento poblacional (Sandell, R (2003)). Las personas cada vez viven más años y se siguen jubilando a la misma edad, luego se está produciendo un aumento en el período en el que las personas están jubiladas.

Según la definición dada por el profesor Vegas Asensio, J (2000): "El riesgo de longevidad, a partir de una tabla actuarial correctamente estimada, se define como al riesgo asociado a que el valor actual actuarial de las prestaciones a favor de una cabeza sea inferior al valor actual necesario para poder pagar las citadas prestaciones". Esta definición es aplicable a todas las modalidades de seguro de vida con cobertura de supervivencia así como a la constitución de los planes de pensiones.

2.2 *Definición de Medida de Riesgo y su vinculación con el principio de cálculo de prima*

Para llevar a cabo una política de gestión del riesgo eficiente será preciso previamente que éste se pueda cuantificar a través de alguna herramienta (medida de riesgo). Esta herramienta implica dos cosas:

- Que exista un daño económico potencial que se puede medir (en el caso del ramo de vida es el fallecimiento o supervivencia del asegurado).

- Que se pueda medir que probabilidad existe de que ocurra ese daño, esto es, la probabilidad de que ocurra el fallecimiento o supervivencia del asegurado.

El siguiente paso es definir que es una medida de riesgo. Se trata de un funcional $M: X \rightarrow [0; \infty)$ que hace corresponder a un riesgo X un número real no negativo M(X) (que puede ser infinito), el cual representa la cantidad adicional que se debe añadir a X (pérdida) para hacerlo aceptable (Gómez Déniz, E. Sarabia, JM.(2008)).

La prima que abona el tomador al asegurador es el precio que ha de pagar para que la citada compañía lleve a cabo la cobertura de un riesgo. Dicho de otro modo, es el pago que un asegurado hace a un asegurador por la cobertura total o parcial contra un riesgo (Gómez Déniz, E. Sarabia, JM.(2008)).

Por lo tanto, se va a poder tarificar (empleo de un principio de cálculo de primas) a partir de una medida de riesgo, puesto que se ajusta a la definición dada para ésta última, ya que la prima lo que hace es asignar un número real a una variable aleatoria, que en el ramo de no vida es la variable aleatoria pérdidas y en el ramo de vida es el valor actualizado del producto considerado (seguro de rentas, por ejemplo).

Y por definición, un principio de cálculo de primas es una función H(X) que asigna a un riesgo X un número real. Dicho número real es la prima. En la práctica el principio de cálculo de prima dependerá de la función de distribución F(X) que sigue la variable aleatoria X, de modo que en vez de hablar de una función H(X) se debe de hablar de funcional H[F(X)] (Gerber, H. (1979)).

Las primas se van a considerar buenas medidas de riesgo porque resumen la exposición de los riesgos globales de la compañía, ayudando a la misma a evaluar si hay suficiente dinero para cubrir los eventos adversos o siniestros, que en el caso de vida será sobrevivir o fallecer.

2.3 *Axiomas de coherencia para un principio de cálculo de prima*

Por criterio de coherencia se entiende aquel que proporciona contribuciones al riesgo económicamente racionales. Dichos criterios de coherencia han de ser compatibles con la evaluación ajustada al riesgo, de modo que proporcionen una información correcta sobre los activos financieros, permitiendo así su adecuada gestión. (Tasche, D. (2000)).

Y dicho criterio de coherencia va vinculado al cumplimiento de cuatro propiedades, de modo que todo principio de cálculo de prima que cumpla dichas propiedades se considerará adecuado y óptimo para una correcta gestión del riesgo, ya que llevará a cabo una asignación eficiente de la prima a la variable aleatoria riesgo. (Artzner, P. Delbaen, F (1999); Landsman, Z. Sherris, M. (2001); Dhaene, J. Laeven, R.Vanduffel, S. (2008)).

Tabla 4: Propiedades de una medida de riesgo coherente

Propiedades de Coherencia (Medida de riesgo coherente)	
Homogeneidad Positiva	$M(aX) = aM(X)$ $a \geq 0$. Cambio escala
Invarianza a las tralaciones	$M(X + a) = M(X) + a$. Cambio de origen
Monotonía	Sea $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ $\omega \in \Omega$, con $X_1(\omega) \leq X_2(\omega)$. Se cumple que $M(X_1) \leq M(X_2)$
Subaditividad	$X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ $\omega \in \Omega$ Se cumple que $M(X_1 + X_2) \leq M(X_1) + M(X_2)$

Fuente: Elaboración propia en base a Artzner, P. Delbaen, F (1999); Landsman, Z. Sherris, M. (2001); Dhaene, J. Laeven, R.Vanduffel, S. (2008).

3. LOS PRINCIPIOS DE CÁLCULO DE PRIMA: VERIFICACIÓN DE LOS AXIOMAS DE COHERENCIA

En este epígrafe se va a desarrollar matemáticamente, y para todos y cada uno de los principios de cálculo de primas existentes, el cumplimiento de las cuatro propiedades precisas para que se cumpla el criterio de coherencia. Se denota por H(X) al principio de cálculo de prima.

3.1 *Principio del valor esperado y su caso particular: el Principio de prima neta.*

$H(X) = (1 + \theta)\ E\ [X]\ \theta > 0$, siendo θ el factor de recargo.

Este principio de cálculo de prima muestra una prima recargada de manera explícita.

Se procede a verificar las propiedades consideradas como necesarias para que este principio de cálculo de primas sea considerado una medida de riesgo coherente (Artzner, P. (1999)).

1. Propiedad de Subaditividad

Dados dos riesgos cualesquiera X_1 y X_2

$$H(X_1 + X_2) = H(X_1) + H(X_2)$$
$$H(X_1 + X_2) = \left[(1+\theta)E(X_1) + (1+\theta)E(X_2)\right] = (1+\theta)\left[E(X_1) + E(X_2)\right] =$$
$$= (1+\theta)E(X_1) + (1+\theta)E(X_2) = H(X_1) + H(X_2)$$

Por lo tanto se cumple esta propiedad.

2. Propiedad de Homogeneidad Positiva

Dado un parámetro $c \geq 0$ y una variable Y:

$$Y = cX$$
$$H(Y) = H(cX) = (1+\theta)E(cX) = c(1+\theta)E(X) = cH(X)$$

Por tanto se cumple esta propiedad.

3. Propiedad de Monotonía

Dados dos riesgos X_1 y X_2, tal que se verifica que $X_1 \geq X_2$ y para $\theta > 0$:

$$E\left[X_1\right] \geq E\left[X_2\right]$$
$$H(X_1) = (1+\theta)E\left[X_1\right] \geq (1+\theta)E\left[X_2\right] = H(X_2)$$
$$H(X_1) \geq H(X_2)$$

Por tanto se cumple la propiedad de Monotonía.

4. Propiedad de Invarianza a las traslaciones

Dado un parámetro $c \geq 0$ y una variable $Y = c + X$:

Se tiene que verificar que $H(Y) = H(X + c) = H(X) + c$

$$H(Y) = (1+\theta)E(c+X) = (1+\theta)\left[c+E(X)\right] =$$
$$= (1+\theta)c + (1+\theta)E(X) = (1+\theta)c + H(X)$$

Tal como se comprueba, no se cumple la propiedad anteriormente escrita.

Este principio del valor esperado no cumple las cuatro propiedades deseables para que pueda ser considerado como una medida de riesgo coherente.

Caso particular para el caso de que el parámetro $\theta = 0$: Principio de prima neta.

$H(X) = (1 + \theta)\, E[X]$
$\theta > 0$
$H(X) = E[X]$

1. Propiedad de Subaditividad

Dados dos riesgos cualesquiera X_1 y X_2

$$H(X_1 + X_2) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = H(X_1) + H(X_2)$$

Por lo tanto se cumple esta propiedad, dado que la esperanza de la suma es la suma de las esperanzas.

2. Propiedad de Homogeneidad Positiva

Dado un parámetro $c \geq 0$ y una variable Y:

$$Y = cX;$$
$$H(Y) = H(cX) = E(cX) = cE(X)$$

Por tanto se cumple esta propiedad.

3. Propiedad de Monotonía

Dados dos riesgos X_1 y X_2, tal que se verifica que $X_1 \geq X_2$:

$$E\left[X_1\right] \geq E\left[X_2\right]$$
$$H(X_1) = E\left[X_1\right] \geq E\left[X_2\right] = H(X_2)$$
$$H(X_1) \geq H(X_2)$$

Por tanto se cumple esta propiedad.

4. Propiedad de Invariante a las traslaciones

Dado un parámetro $c \geq 0$ y una variable $Y = c + X$:

$$H(X + c) = E(X + c) = E(X) + c = H(X) + c$$

Se cumple la propiedad anteriormente escrita.

Este principio de prima neta cumple las cuatro propiedades deseables para que pueda ser considerado como una medida de riesgo coherente.

3.2 *Principio de prima de la varianza*

$H(X) = E[X] + \alpha V[X]$ $\alpha \geq 0$, donde α es el factor de recargo y $V[X]$ es la varianza. Esta medida de riesgo incorpora el factor de recargo de seguridad para poder hacer frente a las desviaciones aleatorias que va a tener la variable aleatoria pérdidas o siniestralidad. En esta expresión de prima, el factor de recargo es proporcional a la varianza, y muestra una prima recargada de manera explícita.

1. Propiedad de Subaditividad

Dados dos riesgos cualesquiera X_1 y X_2

$$H(X + Y) = E\left[X + Y\right] + \pm V\left[X + Y\right] \not\leq E\left[X\right] + E\left[Y\right]$$
$$+ \pm [V\left[X\right] + V\left[Y\right] + 2Cov(X;Y)]$$

No cumple el principio de Subaditividad, salvo que las dos variables sean independientes.

2. Propiedad de Homogeneidad Positiva

Dado un parámetro $c \geq 0$ y una variable Y:

$$Y = cX;$$
$$H(Y) = E\left[Y\right] + \pm Var\left[Y\right] = E\left[cX\right] + \pm V\left[cX\right] =$$
$$= cE\left[X\right] + \pm c^2 V\left[X\right] = c[E\left[X\right] + \pm cV\left[X\right]] \neq cH(X)$$

No cumple el principio de Homogeneidad positiva

3. Propiedad de Monotonía

Dados dos riesgos X_1 y $X_{2,}$ tal que se verifica que $X_1 \geq X_2$:

$$E\left[X_1\right] \geq E\left[X_2\right]$$
$$H(X_1) = E\left[X_1\right] + \pm V\left[X_1\right] \ngeq E\left[X_2\right] + \pm V\left[X_2\right]$$

En este caso no se tiene por que cumplir que el principio de cálculo de prima del primer riesgo sea mayor o igual que el principio de cálculo de prima del segundo riesgo. Luego no cumple esta propiedad.

4. Propiedad de Invarianza a las traslaciones

Dado un parámetro $c \geq 0$ y la variable $Y = c + X$:

$$H(X + c) = E(X + c) + \pm Var(X + c) = c + E(X) + \pm Var(X) = c + H(X)$$

Por lo tanto se cumple el principio de invarianza a las traslaciones.

Este principio de cálculo de primas no cumple las cuatro propiedades para ser considerado como una medida de riesgo coherente.

3.3 *Principio de prima exponencial*

$H(X) = \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} E\left[e^{\alpha X}\right] \alpha \rangle 0$, donde α es la llamada medida de Arrow-Pratt o constante de aversión al riesgo, que va asociada al decisor, mostrando una prima recargada de manera explícita.

1. Propiedad de Invarianza a las traslaciones

Dado un parámetro $c \geq 0$ y una variable $Y = c + X$:

$$H\left[x+c\right] = H\left[x\right] + c$$

$$H\left[X+c\right] = \frac{\mathrm{Log}E\left[e^{\alpha(x+c)}\right]}{\alpha} = \frac{\mathrm{Log}E\left[e^{\alpha x}e^{\alpha c}\right]}{\alpha} = \frac{\mathrm{Log}\left[E\left(e^{\alpha x}\right)e^{\alpha c}\right]}{\alpha} =$$

$$= \frac{\mathrm{Log}E\left[e^{\alpha x}\right] + \mathrm{Log}e^{\alpha c}}{\alpha} = \frac{\mathrm{Log}E\left[e^{\alpha x}\right]}{\alpha} + \frac{\alpha c}{\alpha} = H\left(x\right) + c$$

Por lo tanto se cumple la propiedad de invarianza frente a las traslaciones.

2. Propiedad de Homogeneidad positiva

Dado un parámetro $c \geq 0$ y una variable Y:

$$H(X) = \frac{\mathrm{Log}E\left[e^{\alpha X}\right]}{\alpha}$$

$$H(Y) = H(cX) = cH(x)$$

$$H\left[cX\right] = \frac{\mathrm{Log}E\left[e^{\alpha cX}\right]}{\alpha} \neq cH\left[X\right]$$

Por lo tanto no cumple la propiedad de Homogeneidad positiva.

3. Propiedad de Monotonía

Dados dos riesgos X_1 y X_2, tal que se verifica que $X_1 \leq X_2$:

$$H\left[X_1\right] = \frac{\mathrm{Log}E\left[e^{\pm(X_1+c)}\right]}{\pm} = \frac{\mathrm{Log}E\left[e^{\pm X_1 + \pm c}\right]}{\pm}$$

$$H\left[X_2\right] = \frac{\mathrm{Log}E\left[e^{\pm(X_2+c)}\right]}{\pm} = \frac{\mathrm{Log}E\left[e^{\pm X_2 + \pm c}\right]}{\pm}$$

$$H\left[X_1\right] = \frac{\mathrm{Log}E\left[e^{\pm(X_1+c)}\right]}{\pm} \leq H\left[X_2\right] = \frac{\mathrm{Log}E\left[e^{\pm(X_2+c)}\right]}{\pm}$$

Por lo tanto se cumple esta propiedad de Monotonía.

4. Propiedad de Subaditividad.

Dados dos riesgos cualesquiera X_1 y X_2:

$$H(X_1) = \frac{\operatorname{Log}E\left[e^{\alpha X_1}\right]}{\alpha};$$

$$H(X_2) = \frac{\operatorname{Log}E\left[e^{\alpha X_2}\right]}{\alpha};$$

$$H(X_1 + X_2) = \frac{\operatorname{Log}E\left[e^{\alpha(X_1+X_2)}\right]}{\alpha} = \frac{\operatorname{Log}E\left[e^{\alpha X_1} e^{\alpha X_2}\right]}{\alpha} \not\leq \frac{\operatorname{Log}E\left[e^{\alpha X_1}\right]}{\alpha} + \frac{\operatorname{Log}E\left[e^{\alpha X_2}\right]}{\alpha}$$

Se cumple el principio de subaditividad en el único caso en que los dos riesgos analizados sean independientes (Gómez Déniz, E. Sarabia, JM (2008)).

Este principio de prima neta no cumple las cuatro propiedades deseables para que pueda ser considerado como una medida de riesgo coherente.

3.4 *Principio de prima Esscher*

$$H(X) = \frac{E\left[Xe^{\alpha X}\right]}{E\left[e^{\alpha X}\right]} \quad \alpha\rangle 0$$

Este principio muestra una prima recargada de manera explícita.

1. Propiedad de Invarianza a las traslaciones

Dado un parámetro $c \geq 0$ y una variable $Y = c + X$:

$$H(X+c) = \frac{E\left[(X+c)e^{\alpha(X+c)}\right]}{E\left[e^{\alpha(X+c}\right]} = \frac{E\left[(X+c)e^{\alpha(X+c)}\right]}{E\left[e^{\alpha X}e^{\alpha c}\right]} = \frac{E\left[Xe^{\alpha(X+c)} + ce^{\alpha(X+c)}\right]}{E\left[e^{\alpha X}\right]\left[e^{\alpha c}\right]} =$$

$$= \frac{E\left[Xe^{\alpha X}e^{\alpha c}\right] + cE\left[e^{\alpha X}e^{\alpha c}\right]}{e^{\alpha c}E\left[e^{\alpha X}\right]} = \frac{e^{\alpha c}E\left[Xe^{\alpha X}\right] + ce^{\alpha c}E\left[e^{\alpha X}\right]}{e^{\alpha c}E\left[e^{\alpha X}\right]} =$$

$$= \frac{e^{\alpha c}E\left[Xe^{\alpha X}\right]}{e^{\alpha c}E\left[e^{\alpha X}\right]} + \frac{ce^{\alpha c}E\left[e^{\alpha X}\right]}{e^{\alpha c}E\left[e^{\alpha X}\right]} = H(X) + c$$

Por lo tanto cumple la propiedad de invarianza frente a las traslaciones.

2. Propiedad de Homogeneidad positiva

Dado un parámetro $c \geq 0$ y una variable $Y = cX$:

$$H(Xc) \neq cH(X)$$

$$\frac{E\left[cXe^{\alpha Xc}\right]}{e^{\alpha Xc}} \neq c\,\frac{E\left[Xe^{\alpha X}\right]}{e^{\alpha X}}$$

Por lo tanto no cumple el principio de Homogeneidad positiva.

3. Propiedad de Monotonía

Dados dos riesgos X_1 y X_2, tal que se verifica que $X_1 \leq X_2$:

$$H(X_1) \leq H(X_2)$$

$$H(X_1) = \frac{E\left[(X_1 e^{\alpha X_1})\right]}{E\left[e^{\alpha X_1}\right]} \not\leq H(X_2) = \frac{E\left[(X_2 e^{\alpha X_2})\right]}{E\left[e^{\alpha x_2}\right]}$$

No tiene por qué cumplirse esta propiedad ante el caso de que el primer riesgo sea menor o igual al segundo.

4. Propiedad de Subaditividad

Dados dos riesgos cualesquiera X_1 y X_2:

$$H(X_1 + X_2) \leq H(X_1) + H(X_2)$$

$$\frac{E\left[(X_1 + X_2)\, e^{\alpha(X_1+X_2)}\right]}{E\left[e^{\alpha(X_1+X_2)}\right]} = \frac{E\left[(X_1 e^{\alpha X_1}\, e^{\alpha X_2}) + (X_2\, e^{\alpha X_1}\, e^{\alpha X_2})\right]}{E\left[e^{\alpha X_1}\, e^{\alpha X_2}\right]} \not\leq \frac{E\left[(X_1 e^{\alpha X_1})\right]}{E\left[e^{\alpha X_1}\right]} + \frac{E\left[(X_2\, e^{\alpha X_2})\right]}{E\left[e^{\alpha X_2}\right]}$$

En este caso no se verifica que $H(X_1 + X_2) \leq H(X_1) + H(X_2)$, luego no se cumple la propiedad de subaditividad.

Este principio de prima neta no cumple las cuatro propiedades deseables para que pueda ser considerado como una medida de riesgo coherente.

3.5 *Principio de función de distorsión de Wang*

$H(X) = \int_0^\infty g\left(S_X(x)\right) dx = \int_0^\infty \left(S_X(x)\right)^{\frac{1}{\rho}} dx$. Esta expresión es la que se conoce con el nombre de Transformada proporcional al tanto instantáneo (Proportional Hazards

Premiums Principle). Por lo tanto, la función de distorsión g es una herramienta para construir las medidas de riesgo.

En el caso de que el parámetro ρ adopte el valor de 1 se produce el caso particular de la medida de riesgo basada en el principio de la prima neta, explicada con anterioridad.

Es importante señalar que las cuatro propiedades se encuentran demostradas por Wang, S (1995), por lo que no se va a repetir en trabajo la demostración de las mismas. Con respecto a la última propiedad, la de subaditividad, se considera interesante la demostración hecha por Wang, S (1995) para el caso de $\rho \geq 1$. Para valores de $\rho \geq 1$, el principio de cálculo de primas basado en la función de distorsión de Wang constituye una medida de riesgo coherente. Es un principio considerado válido a priori para aplicarlo al ramo de vida, dado que verifica las propiedades de coherencia.

4. APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE PRIMA NETA Y PRINCPIO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL PARA OBTENER LA PRIMA UNICA DE RIESGO EN UN SEGURO DE RENTAS

Se va a expresar la prima única de riesgo para un seguro con cobertura de supervivencia, el seguro de rentas, a partir de los principios de cálculo de primas que son considerados medidas de riesgo coherente (explicado en el punto 3). En este seguro, el asegurador se compromete, al final de un plazo de diferimiento pactado en la póliza, a pagar al asegurado y mientras viva una renta periódica. (Bowers, JR. Newton, L. Gerber, H. Jones, D. (1997)). Para tener derecho a estas cuantías el asegurado ha de comenzar a abonar a la compañía el importe de las primas, bien sean periódicas o a prima única, en la fecha de suscripción del contrato de seguro. En este caso la variable aleatoria es la variable vida residual o tiempo que queda por vivir a partir de la edad x, T_x.

4.1 *Cálculo de la prima única de riesgo por el principio de prima neta*

La expresión general de la prima para esta modalidad de seguro es (Bowers, JR. Newton, L. Gerber, H. Jones, D. (1997)).):

$$P = \int_0^\infty v^t \left(1 - G_x(t)\right) dt$$

$$_t p_x = P\left(X > x + t / X > x\right) = 1 - G_x(t) = S_x(t)$$

$$P = \int_0^\infty v^t (1 - G_x(t))dt = \int_0^\infty v^t \, _t p_x \, dt = \int_0^\infty v^t S_x(t) dt$$

Haciendo el cambio de variable:

$$v^t = z;$$
$$t\,\mathrm{Ln}\,v = \mathrm{Ln}\,z$$
$$t = \frac{\mathrm{Ln}\,z}{\mathrm{Ln}\,v}$$

Si t = 0, entonces v^0 = 1. La variable z tomará el valor 1.

Si $\lim_{t\to\infty} v^t = 0$, la variable z tomará el valor 0 puesto que el factor v es menor que la unidad.

Por lo tanto se tiene:

$$P = \int_0^\infty v^t S_x(t)dt = P = \int_1^0 z \frac{S\left(x + \frac{\mathrm{Ln}z}{\mathrm{Lnv}}\right)}{S(x)} \frac{1}{z\mathrm{Lnv}} dz = -\int_0^1 z S_x\left(\frac{\mathrm{Lnz}}{\mathrm{Lnv}}\right)\frac{dz}{z\mathrm{Lnv}} \quad (4)$$

Integrando por partes la expresión anterior se obtiene:

$$P = -\frac{1}{\mathrm{Lnv}}\int_0^1 S_x\left(\frac{\mathrm{Lnz}}{\mathrm{Lnv}}\right)dz \quad (5)$$

De este modo se ha conseguido expresar la prima única de riesgo de un seguro de rentas con capital asegurado de 1 u.m si el asegurado sobrevive en cada período en términos de la función de supervivencia de la variable vida residual.

En la siguiente tabla se reflejan las primas únicas de riesgo para cada una de las leyes de supervivencia con las que se trabaja en el artículo. El desarrollo matemático de las mismas se puede ver en la tesis doctoral de la autora (Hernández, M. (2013)).

Tabla 5: Expresiones Prima única de riesgo por aplicación del Principio de Prima neta

Prima única de riesgo general	Prima única riesgo 1 Ley Dormoy	Prima única riesgo 2 Ley Dormoy
$P = -\frac{1}{\mathrm{Lnv}}\int_0^1 S_x\left(\frac{\mathrm{Lnz}}{\mathrm{Lnv}}\right)dz$	$P = -\frac{1}{\mathrm{LnS} + \mathrm{Lnv}}$	$P = \frac{-1}{\mathrm{LnS}_1 + (2x+2)\mathrm{LnS}_2 + \mathrm{Lnv}}$

Fuente: Elaboración propia en base a la tesis doctoral de la autora

4.2 *Cálculo de la prima única por el principio de la función de distorsión*

Como lo que hace la función de distorsión es transformar la función de supervivencia a través del operador g, a partir de la expresión de la prima única de riesgo calculada en el apartado 4.1 se expresa en forma de potencia, teniendo el parámetro r la consideración de parámetro de aversión al riesgo (Tse, Y-K (2009)).

$$P = \int_0^\infty g\left(S_X(x)\right)dx = \int_0^\infty g\left(S_X(x)\right)^{\frac{1}{\rho}} dx$$

$$P = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(\frac{S\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)}\right)^{\frac{1}{\rho}} dz = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}} dz,\ \rho \geq 1 \qquad (6)$$

En la siguiente tabla se reflejan las primas únicas de riesgo para cada una de las leyes de supervivencia con las que se trabaja en el artículo. El desarrollo matemático de las mismas se puede estudiar en la tesis doctoral de la autora (Hernández, M. (2013)).

Tabla 6: Expresiones Prima única de riesgo por aplicación del Principio de la función de Distorsión

Prima única de riesgo general	Prima única riesgo 1 Ley Dormoy	Prima única riesgo 2 Ley Dormoy
$P = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}} dz$ $\rho \geq 1$	$P = \frac{-1}{LnS^{\frac{1}{\rho}} + Lnv}$	$P = \frac{-1}{LnS_1^{\frac{1}{\rho}} + Lnv + LnS_2^{2^{\frac{1}{\rho}(x+1)}}}$

Fuente: Elaboración propia en base a la tesis doctoral de la autora

5. CONCLUSIONES

En este artículo se ha realizado un estudio de los principales principios de cálculo de primas existentes en el ramo actuarial. Dicho estudio ha consistido en el desarrollo matemático, para cada uno de ellos, de las propiedades que definen la coherencia. De los seis principios de cálculo de primas seleccionados, el principio de prima neta, el principio del valor esperado, el principio de la varianza, el principio de prima exponencial, el principio de la prima Esscher así como el principio de la función de distorsión, sólo dos de ellos verifican los axiomas de coherencia explicados en el epígrafe 2, tabla nº 4. Es cierto que el principio de la varianza proporciona una prima recargada de manera explícita para poder hacer frente a las desviaciones desfavorables de la siniestralidad, pero no constituye una medida de riesgo coherente. Es cierto también que el principio de la prima Esscher y el principio de prima exponencial proporcionan una prima recargada de manera implícita, para también hacer frente a esas desviaciones desfavorables. El problema es que tampoco constituyen una medida de riesgo coherente. El principio de prima neta es un caso particular del valor esperado, y si constituye una medida de riesgo coherente. El inconveniente es que proporciona una prima sin ningún tipo de recargo y por este motivo las entidades aseguradoras han de trabajar con tablas de supervivencia desfasadas para que la longevidad con la que se trabaja sea superior a la del grupo humano considerado en las tablas. En cambio, y ésta es la principal aportación de este trabajo de investigación, el principio de la función de distorsión se ha aplicado hasta la fecha en el ámbito de los seguros generales. En este estudio se aplica por vez primera para el cálculo de la prima única de riesgo en un seguro de rentas para el ramo de vida (Hernández, M (2013)). Se trata de un principio que constituye una medida de riesgo coherente para los valores del parámetro $\rho \geq 1$, que son los valores que se han de verificar en la modalidad de seguro seleccionada para que la prima obtenida sea superior a la prima neta (la obtenida por el primero de los principios). Y este principio de la función de distorsión en forma de potencia proporciona al asegurador una prima recargada de manera implícita, es decir, que el recargo está ya incluido en el propio sistema de cálculo de la prima.

6. BIBLIOGRAFÍA

Artzner, P. Delbaen, F. (1999). Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance. North American Actuarial Journal, vol.3, nº 2, p. 11-15.

Artzner, P. Delbaen, F. Eber, JM. Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. Mathematical Finance, Vol. 9, Jul, p. 203-228.

Ayuso, M. Corrales, H. Guillén, M. Pérez-Marín, AM. Rojo, JL. (2007). Estadística Actuarial Vida. Publicaciones y Ediciones UB.

Bowers, JR. Newton, L. Gerber, H. Jones, D. (1997). Actuarial Mathematics. The Society of Actuaries. Illinois.

Dhaene, J. Laeven, R.Vanduffel, S. (2008). Can a Coherent risk Measure be too subaditive?. The Journal of risk and Insurance, vol.75, nº2, Jun, p. 365-386.

Gerber, H. (1979). An introduction to mathematical risk theory. Huebner Foundation.

Gerber, H. (1990). Life Insurance Mathematics. Swiss Association of Actuaries.

Gil Fana, J.A. Heras, A. Vilar Zanón, J.L. (1999). Matemática de los Seguros de Vida. Editorial MAPFRE.

Gómez Deniz, E. Sarabia, JM. (2008). Teoría de la Credibilidad. Desarrollo y aplicaciones en primas de seguros y riesgos operacionales. Fundación MAPFRE.

Hernández Solís, M. Tarificación en Seguros de Vida con la Medida de riesgo Esperanza Distorsionada. Tesis Doctoral no publicada. Universidad Complutense, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, 2013. Madrid.

Landsman, Z. Sherris, M. (2001). Risk measures and insurance premium principles. Insurance: Mathematics & Economics. vol. 29, Aug. p. 103-115.

Sandell, R. (2003). El envejecimiento de la población. Real Instituto Elcano. WP 20.

Tasche, D. (2000). Risk contributions and performance measurement. [Web]. Munich: Technische Universität München.

Tse, Y-K (2009). *Nonlife* Actuarial Models. Theory, Methods and Evaluation. Ed.Cambridge University Press.

Vegas Asensio, J. (2000). El riesgo de longevidad en los planes de pensiones. Anales Instituto Actuarios Españoles Nº 6. p. 119-157.

Wang, S. (1995). Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms. Insurance, Mathematics & Economics. V.17, Feb. p. 43-54.