SECCIÓN TÉCNICO-ECONÓMICA

ISSN 0123-1154

Cálculo de un índice de pérdidas por catástrofes desencadenante de los *Insurance-linked securities, ILS*. Revisión de los modelos precedentes y propuesta de un modelo continuo alternativo*

Dra María José Pérez-Fructuoso**

Para Citar este artículo/To cite this article

Pérez-Fructuoso, María José, Cálculo de un índice de pérdidas por catástrofes desencadenante de los Insurance-linked securities, ILS. Revisión de los modelos precedentes y propuesta de un modelo continuo alternativo, 43 RIS, 195-216 (2015). http://dx.doi.org/10.11144/Javeriana.ris43.cipc

doi:10.11144/Javeriana.ris43.cipc

Fecha de recepción: noviembre 15 de 2015
Fecha de aceptación: noviembre 30 de 2015

SUMARIO

* Artículo de investigación que a partir de funciones matemáticas propone un modelo continuo para determinar el índice de perdidas desencadenante de los *Insurance-Linked Securities*.

** Doctora Europera en Economía Doctora en Ciencias Económicas y Empresariales. Licenciada en Ciencias Actuariales y Financieras. Licenciada en Ciencias Económicas y Empresariales. Docente de la Universidad a Distancia de Madrid (Madrid Open University, UDIMA). Contacto: mariajose.perez@udima.es

RESUMEN

Este artículo propone un modelo continuo para determinar el índice de pérdidas aseguradas desencadenante de los Insurance-Linked Securities, ILS. Para ello, se considera que la cuantía total de la catástrofe cubierta en la emisión, está formada por la suma de dos variables aleatorias, la cuantía declarada de siniestros y la cuantía de siniestros pendiente de declarar. La hipótesis central del modelo se basa en suponer un decrecimiento temporal de esta última cuantía, proporcional a una función exponencial, que denominamos tasa de declaración de siniestros asintótica. La dinámica de este decrecimiento la representamos a través de un movimiento browniano geométrico y la cuantía declarada de siniestros, numerador de la ratio de pérdidas que se quiere determinar, se obtiene por diferencia entre la cuantía de siniestros pendiente de declarar y la cuantía total de la catástrofe.

Palabras Clave: Insurance-linked securities; cuantía de siniestros pendiente de declarar; cuantía declarada de siniestros, tasa de declaración de siniestros asintótica; índice de pérdidas por catástrofes; movimiento Browniano geométrico.

ABSTRACT

This article proposes a continuous model to determine the loss-index-trigger of Insurance-Linked Securities (ILS). To this aim, we consider that the total amount of the thus covered catastrophe results from the sum of two random variables, the reported claims amount and the reported-but-not-yet-reported claims amount. The central hypothesis of our model assumes a temporary decrease of the latter, proportional to an exponential function that we call asymptotic reporting claims rate. We represent the dynamics of this decrease through a geometric Brownian motion, wheras the reported claims amount, numerator of the loss ratio intended to be determined, is obtained by the difference between the incurred-but-not-yet-reported claims amount and the catastrophe's total amount.

Key words: insurance-linked securities; incurred-but-not-yet-reported loss amount; reported loss amount; asymptotic claim reporting rate; catastrophic loss index; geometric Brownian motion.

1. INTRODUCCIÓN: REVISIÓN DE LOS MODELOS DE VALORACIÓN DE ILS PRECEDENTES

Hasta la década de los 60 del siglo pasado, las aseguradoras norteamericanas empleaban los contratos tradicionales de reaseguro como instrumento para afrontar la siniestralidad derivada de los riesgos de naturaleza catastrófica. A partir de 1970 y hasta 1992, las catástrofes ocurridas generaron un promedio de pérdidas anuales de 2.500 millones de dólares. La mayoría de estos grandes eventos de suceso imprevisible y de graves consecuencias económicas no llegaron a alcanzar los 250 millones de dólares en pérdidas, razón por la cual pudo ser hasta entonces el reaseguro cauce técnico suficiente para canalizar la cobertura de este tipo de operaciones.

1992 marcó, sin embargo, un punto de inflexión en esta línea ordinaria de actuación de las compañías del ramo: en ese año concurrieron varios factores, cuya acumulación provocó la insuficiencia del reaseguro como procedimiento idóneo para la cobertura del riesgo catastrófico. En ese año se sucedieron dos grandes catástrofes en un corto periodo de tiempo, durante el tercer trimestre de 1992 (concretamente durante los días 24-26 de agosto de 1992), el huracán *Andrew* dejó un abultado balance de 18.600 millones de dólares en pérdidas (más del doble que la mayor catástrofe registrada hasta aquel momento, el huracán *Hugo*, ocurrido en septiembre de 1989). Escasa fechas después (11 de septiembre de 1992), los daños causados por el huracán *Iniki* alcanza una cifra aproximada de 1.600 millones de dólares.

La gran magnitud de estas dos catástrofes y su casi coincidencia en el tiempo tuvieron una honda repercusión sobre la actividad de las reaseguradoras norteamericanas que se tradujo fundamentalmente en la reducción de sus límites de aceptación de riesgos de este tipo. Como efecto derivado, las compañías de seguros se vieron fuertemente incentivadas para la búsqueda de nuevos sistemas de diversificación del riesgo desarrollando y perfeccionando instrumentos alternativos de transferencia y financiación basados en los mercados de capital, así como elaborando métodos fiables de cuantificación para evaluarlos, considerando además su constante evolución. Conocidos con el nombre de titulización (*securitization*), el objetivo último de estos productos es incrementar las posibilidades en el mercado asegurador y, por tanto, la capacidad de suscripción, ofertando mayores coberturas en aquellos casos en los que las coberturas existentes hasta el momento han sido insuficientes o nulas, mediante la creación y emisión de derivados financieros basados en seguros (*Insurance-Linked Securities*, ILS), como bonos, opciones, swaps e industry loss warranties. De esta forma, las aseguradoras pueden trasladar parte de su riesgo a los inversores quienes toman posiciones en la ocurrencia y el coste de las catástrofes[1]. La estructura con que se emiten los ILS depende de cómo se lleve cabo la cobertura del riesgo y, por tanto, la indemnización que recibe la compañía que patrocina la operación. En general, existen diferentes de *triggers* o desencadenantes, entre los cuales destacan los desencadenantes de indemnización y de índices, aunque dentro de éstos últimos se distingue, según se realice su cálculo, entre paramétricos, pérdidas modeladas y pérdidas de la industria aseguradora, siendo este último el más utilizado en el desarrollo de los activos derivados sobre seguros.

Un aspecto relevante en el análisis, tanto teórico como práctico, de estos instrumentos con desencadenantes de índices de pérdidas, es su tarificación a lo largo de un horizonte temporal determinado. Desde un enfoque exclusivamente actuarial, para fijar el precio de un producto de seguros, tradicionalmente se trabaja con las hipótesis de la Teoría Clásica del Riesgo que suponen variables aleatorias cuantías individuales de los siniestros independientes y equidistribuidas. Además, la prima se obtiene aplicando el principio de mutualidad a partir del cual los riesgos se distribuyen entre toda la masa asegurada, de forma que en promedio los errores se compensan y la esperanza matemática de la siniestralidad total, o prima pura, es suficiente para llevar a cabo la cobertura. Sin embargo, este procedimiento de determinación del precio del seguro es incongruente con la valoración realizada en los mercados financieros, en los que, la cuantificación de los activos derivados se obtiene, evitando las oportunidades de arbitraje, mediante la réplica de carteras formadas por activos simples cuyos resultados son iguales, en todo momento del periodo de negociación, al del activo derivado objeto de valoración. La tarificación de los ILS en este contexto requiere la definición de un modelo que permita calcular la evolución temporal de la cuantía total de las pérdidas, y por tanto de la ratio de siniestralidad subyacente de este tipo de contratos.

Diversos autores se han ocupado de esta cuestión. A continuación se desarrollan los más relevantes para esta investigación.

1 Pérez-Fructuoso, M. J., "La titulización del riesgo catastrófico: descripción y análisis de los *cat bonds (Bonos de Catástrofes),"* *Revista Española de Seguros*, 121, 2005, pp. 75-92.

Cummins y Geman[2] desarrollaron de un modelo de valoración para los contratos de futuros sobre riesgos catastróficos negociados en el Chicago Board of Trade (en adelante, CBOT), CAT-futures, a principios de la década de los 90 del siglo pasado.

Los autores definen el proceso $\{S(t) \geq 0; 0 \leq t \leq T\}$, y lo denominan *proceso de reclamaciones* instantáneo (instantaneous claim process), en el que $s(t)$ determina la cuantía total de declaraciones de siniestros por unidad de tiempo. A partir de esta siniestralidad instantánea, los autores calculan la cuantía total de pérdidas debidas a catástrofes en el momento del vencimiento, *L(T)* .

De acuerdo con este modelo, la dinámica de *S(t)* puede representarse de dos modos diferentes dependiendo de cuál sea el periodo de tiempo considerado:

- Durante el trimestre de pérdidas, la evolución de *S(t)* viene dada por un proceso browniano geométrico con tendencia α, que describe la aleatoriedad en las declaraciones de siniestros y las pequeñas catástrofes. Se parte, a tal fin, de la hipótesis de que los asegurados declaran sus siniestros de forma continua y de que estas declaraciones siempre toman valores positivos. A todo ello, se añade un proceso de Poisson que cuantifica los saltos imprevistos en la declaración de las pérdidas cuando sobrevienen grandes catástrofes,

$$dS(t) = S(t^-)[\alpha dt + dw(t)] + kdN(t) \tag{1}$$

  donde *w(t)* es un proceso de Wiener bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo y *N(t)* es un proceso de Poisson independiente de *w(t)*, cuyo parámetro λ que representa la frecuencia de los saltos.

  En la ecuación diferencial estocástica (1), *k* es una constante que indica la amplitud de los saltos producidos como consecuencia de la ocurrencia de una gran catástrofe. Dicho en otros términos, la cuantía total de las catástrofes en este modelo es siempre constante e igual a *k*.

  La parte discreta que se incluye en la ecuación (l), *kdN(t),* representa el salto brusco en la intensidad de las declaraciones de siniestros que se produce como consecuencia inmediata de la declaración oficial de una gran catástrofe de intensidad *k*.

- En cambio, en el trimestre *run-off*, o trimestre de desarrollo o de declaración de pérdidas, el proceso *S(t)* se representa simplemente a través de un proceso browniano geométrico con tendencia α':

2 Cummins, J. D. y H. Geman, "Pricing Catastrophe Insurance Futures and Call Spreads: An Arbitrage Approach," *Journal of Fixed Income*, 4, 1995, pp. 46-57.

$$dS(t)=S(t)[\alpha' dt+\alpha\sigma dw(t)] \tag{2}$$

En este periodo, solo se considera el carácter aleatorio del ritmo de las declaraciones. Ello supone que la cuantía de las declaraciones de siniestros no está influida por la ocurrencia imprevista y ocasional de catástrofes.

En las ecuaciones (1) y (2), α, α' *y* σ son constantes que representan la parte continua de la siniestralidad instantánea, si bien hay que destacar que α (o, alternativamente, α') tiene imputado un valor especial, derivado de la valoración en ausencia de oportunidades de arbitraje, que puede obtenerse a partir de la siguiente expresión[3],

$$\alpha=\mu-\rho\sigma \ (\alpha'=\mu'-\rho\sigma)$$

donde μ es la tendencia del proceso bajo la medida de probabilidad real y ρ es la prima de riesgo por unidad de riesgo del mercado, constante para cualquier $t\in[0,T]$.

Una vez especificada la evolución de las declaraciones de siniestros de acuerdo con las dos alternativas recién expuestas, puede obtenerse el valor de las pérdidas totales en el momento del vencimiento, *L(T)*, del siguiente modo,

$$L(T) = \int_0^T S(s)ds \tag{3}$$

teniendo en cuenta que la cuantía de siniestros declarada en el momento inicial del proceso, *S(0),* es una constante positiva dada.

El modelo propuesto por Cummins y Geman parte de la hipótesis de que los contratos de futuros sobre riesgos catastróficos tienen como subyacente una ratio de siniestralidad que representa la acumulación de pagos por pérdidas aseguradas derivadas de sucesos de naturaleza catastrófica a lo largo de un periodo de tiempo concreto. Ello los diferencia de los activos derivados clásicos, cuyo subyacente es el precio de un *commodity* o activo financiero al final de un intervalo temporal definido. La principal consecuencia de este nuevo enfoque financiero-actuarial es que desaparecen las tradicionales relaciones existentes entre el precio *spot* y el precio futuro[4].

El precio del CAT-futures refleja al vencimiento una suma de pagos por indemnizaciones lo que, a juicio de los autores, implica que el resultado del futuro presenta una estructura similar a las opciones asiáticas, en las que el activo subyacente es una suma ponderada de precios *spot*.

3 Shimko, D., "The Valuation of Multiple Claim Insurance Contracts", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 27 (2), 1992, pp. 229-246.

4 Cox, J., J. E. Ingersoll, J. E. Y S.Ross, " The Relation between Forward Prices and Futures Prices", *Journal of Financial Economics*, 9, 1981, pp. 321-346.

Una vez determinada la evolución de la ratio de siniestralidad, la hipótesis básica para cuantificar el precio del contrato CAT-futures es que no existan oportunidades de arbitraje. Dadas estas circunstancias, el precio a que se acaba de hacer referencia puede establecerse como la esperanza matemática de la diferencia del valor de dos opciones asiáticas que tienen por subyacente el proceso de reclamaciones instantáneo, *S(t),* con vencimiento *T* y con precios de ejercicio distintos.

En 1997, Geman y Yor5 proponen un nuevo modelo de valoración de un tipo de contrato de activos derivados sobre riesgos catastróficos, las opciones PCS. Su principal rasgo: una representación directa de la dinámica del subyacente que viene dado por el total de pérdidas declaradas, *L(t).* Asimismo, toman en consideración dos líneas diferentes de evolución para cada uno de los periodos de vida de las opciones analizadas:

- En el periodo de pérdidas, *L(t)* sigue un proceso de difusión (*Poisson-difussion process*) representado por la siguiente ecuación diferencial estocástica,

$$dL(t)=S(t)dt+\theta dN(t) \tag{4}$$

  donde *S(t).* es un proceso browniano geométrico que traduce la aleatoriedad en las declaraciones de siniestros.

  Para simplificar, los autores consideran que, $S(t) = e^{2(W_t+\upsilon t)}$ siendo *W(t)* un proceso de Wiener bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo.

  En cuanto a *N(t)* se define como un proceso de Poisson de parámetro α, independiente de *S(t)*, que representa la ocurrencia de grandes catástrofes. θ es una constante positiva equivalente a la magnitud de los saltos provocados por la ocurrencia de una gran catástrofe.

- En el periodo de desarrollo, la dinámica de *L(t)* puede representarse mediante un proceso browniano geométrico a través de *S(t)*,

$$dL(t) = S(t)dt \tag{5}$$

  con parámetros de tendencia y volatilidad diferentes a los del periodo de pérdidas.

Tras haber fijado la progresión del subyacente, *L(t)*, y considerando un tipo de interés constante, *r*, a lo largo de toda la vida de la opción, los autores obtienen el precio de la misma en el momento *t*, *C(t)*, como la esperanza matemática actualizada de su valor al vencimiento, de acuerdo con la siguiente fórmula,

$$C(t)=e^{-r(T-t)}E_Q\left[\max\{L(T)-k;0\}/F_t\right] \tag{6}$$

5 Geman, H. y M. Yor, "Stochastic time changes in catastrophe option pricing," *Insurance: Mathematics and economics*, 21, 1997, pp. 185-193.

siendo k el valor de la ratio de ejercicio de la opción y F_t la información sobre ocurrencia de catástrofes y siniestralidad disponible hasta el momento t.

Para resolver la esperanza matemática de la expresión (6) se tiene en consideración la información disponible en el momento t, F_t, que permite escribir la diferencia $L(T)$-k como,

$$L(T)-k = L(t)-k + \int_t^T dL(u) \tag{7}$$

donde $L(t)$-k es un valor conocido en t cuyo signo da lugar al análisis de dos posibles situaciones.

De este modo, si $L(t)-k>0$ en cualquier momento t de la vida de la opción, ésta se hallará *in-the-money* al vencimiento y la concreción de su precio se reduce al cálculo de la esperanza de la integral $\int_t^T dL(u)$. En cambio, si $L(t)-k<0$ pueden plantearse dos situaciones distintas dependiendo del momento de valoración t. Si dicho momento pertenece al periodo de desarrollo de la opción, el precio de la misma se obtiene calculando la esperanza matemática del valor de una opción asiática con subyacente ajustado a un proceso browniano geométrico y con precio de ejercicio k-$L(t)$. Si el instante de valoración pertenece al periodo denominado de pérdidas, el problema de la valoración resulta de extremada complejidad matemática: conforme a una metodología inductiva, la resolución se asienta sobre un caso particular en el que las hipótesis de partida quedan relajadas a un proceso de difusión (*Poisson-difussion process*) para todo el periodo de negociación. Dado que los procesos de Wiener y de Poisson tienen carácter estacionario y son independientes entre sí[6], el problema queda reducido al estudio de la situación $t=0$ y se resuelve atribuyendo carácter aleatorio al momento del vencimiento fijado y calculando la transformada de Laplace de la cuantía $L(T)$ respecto a este nuevo vencimiento. El caso general, con dinámicas distintas para cada uno de los periodos considerados en la opción, puede resolverse del mismo modo: aleatorizando el momento final del periodo de pérdidas y el momento del vencimiento y calculando una doble transformada de Laplace de $L(T)$ respecto a estos dos nuevos vencimientos.

Loubergé, Kellezi y Gilli[7] aplican el modelo de valoración de opciones sobre catástrofes desarrollado por Cummins y Geman en 1995, para calcular el precio de un bono sobre catástrofes (en adelante, Cat bond) cuyo desencadenante es un índice de pérdidas de la industria aseguradora.

Estos autores consideran un bono cupón cero emitido en el momento $t=0$, cuyo nominal es F, y con vencimiento $t=T$. Los pagos del bono están condicionados a que

6 Arnold, L., *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, John Wiley & Sons, Inc.: New York, 1974.

7 Loubergé, H., E. Kellezi y M. Gilli, "Using Catastrophe-Linked Securities to Diversify Insurance Risk: A Financial Analysis of Cat Bonds," *Journal of Insurance Issues*, 22 (2), 1999, pp. 125–146.

el índice de pérdidas al vencimiento utilizado en la emisión de dicho bono, $I=(T)$, alcance un determinado valor que supere el valor desencadenante K especificado en el contrato.

Denotando el valor del bono al vencimiento como $V(T)$, los estados de la naturaleza o posibles resultados del bono en $t=T$, son los siguientes:

- Si $I(T)\leq K$, las pérdidas catastróficas recogidas por el índice no superan el valor desencadenante especificado en la emisión. Por tanto, $V(T)=F$ y los inversores recuperan el principal complete en el momento del vencimiento.
- Si $K<I(T)<K+F$, los inversores pierden parte del principal que se destina a cubrir el exceso de pérdidas recogidas en el índice sobre el desencadenante y por tanto $V(T)=F-(I(T)-K)\geq 0$.
- Finalmente, si $I(T)\geq K+F$, los inversores pierden el principal complete y el valor del bono al vencimiento es obviamente nulo ($V(T)=0$).

Estas expresiones llevan fácilmente a escribir el valor del bono al vencimiento como,

$$V(T)=F-max(0,I(T)-K)+max(0,I(T)-(K+F) \qquad (8)$$

el perfil de beneficios generados por la compra de un *reverse call spread* (es decir, la combinación de una posición larga en bonos cupón cero sin riesgo, una posición corta en una opción de compra sobre catástrofes con precio de ejercicio K, y una posición larga en una opción de compra sobre catástrofes con precio de ejercicio $F+K$).

Entonces, bajo una aproximación neutral al riesgo, y suponiendo un tipo de interés r constante a lo largo del intervalo [o, T] el precio del bono en cualquier momento t puede obtenerse fácilmente como una martingala (es decir, como el valor actual del precio del bono al vencimiento bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo Q),

$$V(t)=e^{-r(T-t)}E_Q\left[V(T)/F_t\right] \qquad (9)$$

siendo F_t la información disponible sobre declaraciones de siniestros en t.

La ecuación (9) puede escribirse como,

$$V(t)=Fe^{-r(T-t)}-e^{-r(T-t}E_Q\left[\max(0,I(T)-K)+\max(0,I(T)-K+F))\right]$$

cuya solución explícita se obtiene fácilmente aplicando el modelo de valoración de opciones de Black-Scholes,

$$V(t)=F\times e^{-r(T-t)}\times-\left[I-N(d'_2)\right]-I(T)\times\left[N(d_1)-N(d'_1)\right]+K\times e^{-r(T-t)}\times\left[N(d_2)-N(d'_2)\right] \qquad (10)$$

con, $d_1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{I(T)}{K}\right) + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right) \times (T-t)}{\sigma \times \sqrt{T-t}}$, $d_2 = d_1 - \sigma \times \sqrt{T-t}$

y,

$$d_1^{'} = \frac{\ln\left(\dfrac{I(T)}{K} + F - B\right) + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right) \times \sqrt{T-t}}{\sigma \times \sqrt{T-t}}, \quad d_2^{'} = d_1^{'} - \sigma \times \sqrt{T-t}$$

Otros autores que han desarrollado modelos de determinación de índices de pérdidas para valorar ILS se resumen a continuación:

- Aase[8] modela la dinámica del índice de pérdidas a través de un proceso de Poisson compuesto con saltos aleatorios para valorar futuros y opciones sobre futuros sobre catástrofes (CAT futures y CAT options) como caso particular del modelo desarrollado por Embrechts y Meister[9] que representa el comportamiento del subyacente mediante una mixtura de procesos de Poisson compuestos y una frecuencia de siniestralidad aleatoria.

- Cox y Pedersen[10] proponen un método de cálculo del precio de un Cat bond en mercados incompletos a partir de la definición de una determinada estructura temporal de los tipos de interés y de una estructura de probabilidades de ocurrencia del riesgo catastrófico.

- Lee y Yu[11] incorporan el riesgo de crédito en la valoración de los bonos catastróficos a través de un movimiento geométrico Browniano así como factores prácticos asociados al azar moral y al riesgo de base.

- Muermann[12] utiliza la modelación del índice de pérdidas desarrolla por Aase (1999) para realizar una valoración, consistente en términos actuariales, de los

8 Aase, K., "An Equilibrium Model of Catastrophe Insurance Futures and Spreads," *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 24, 1999, pp. 69-96 y Aase, K., "A Markov model for the pricing of catastrophe insurance futures and spreads," *Journal of Risk and Insurance*, vol. 68 (1), 2001, pp. 25-50.

9 Embrechts, P., y S. Meister, *Pricing insurance derivatives, the case of CAT futures*. Proceedings of the 1995 Bowles Symposium on Securitization of Insurance Risk, Georgia State University, Atlanta, Georgia. Society of Actuaries, Monograph M-FI97-1: 15-26, 1997.

10 Cox, S. H. y H. Pedersen, "Catastrophe Risk Bonds," *North American Actuarial Journal*, 4 (4), 2000, pp. 56-82.

11 Lee, J.P. y M. T. Yu, "Pricing default-risky Cat bonds with moral hazard and basis risk," *Journal of Risk and Insurance*, 69 (1), 2002, pp. 25-44 y Lee, J.P. y M. T. Yu, "Valuation of catastrophe reinsurance with catastrophe bonds," *Insurance: Mathematics and Economics*, 41 (2), 2007, pp. 264-278.

12 Muermann, A., *Actuarially Consistent Valuation of Catastrophe Derivatives*, Working Paper Series The Wharton Financial Institutions Center, 03-18, 2003.

activos derivados opciones y futuros negociados en el CBOT durante la década de los 90 del siglo pasado.

- Nowak y Romaniuk[13] aplican modelos de ETTI (tipos de interés *spot* libres de riesgo) para valorar bonos sobre catástrofes, bajo la hipótesis de que la ocurrencia de la catástrofe es independiente del comportamiento de los mercados financieros.

- Zong-Gang y Chao-Qun[14], con el fin de tarificar también bonos sobre catástrofes, consideran un entorno de tipos de interés estocásticos, para describir las pérdidas catastróficas a través de un proceso de Poisson compuesto no homogéneo.

- Finalmente, Lai, Parcollet y Lamond[15] desarrollan un modelo para obtener una expresión semicerrada del precio de un Cat bond, a partir de un proceso de difusión con saltos que representa las catástrofes, de un proceso estocástico tridimensional para representar el tipo de cambio y los tipos de interés nacionales y extranjeros, y del coste de cobertura del riesgo de tipo de cambio.

Esta revisión de la literatura financiero-actuarial pone de manifiesto el uso frecuente del movimiento geométrico browniano para modelar el comportamiento del índice de pérdidas desencadenante de los derivados vinculados a seguros en general y, dentro de este tipo de activos, de los Cat bonds en particular. Trabajar bajo esta hipótesis lleva a asumir un crecimiento exponencial, en promedio, de la declaración de siniestros instantánea, que contrariamente a lo que revela la evidencia empírica, tiende a ser uniforme en el tiempo. En Cummins y Geman, se asume además, que esta tasa es discontinua al introducir el proceso de salto debido a las grandes catástrofes en la definición de $S(t)$; en Geman y Yor, la introducción de las grandes catástrofes se hace en la definición de $L(T)$. Este planteamiento agregado en cuanto al comportamiento de la velocidad de declaración de los siniestros no se corresponde con una distribución más o menos uniforme de la ocurrencia de los mismos dentro de un intervalo temporal concreto, pues es difícil entender que el proceso de agregación sea exponencial y no lineal.

Para resolver esta inconsistencia, Alegre, Pérez-Fructuoso y Devolder[16] desarrollan un modelo aleatorio en tiempo discreto que modela el comportamiento del índice de pérdidas subyacente de los futuros y opciones sobre riesgos catastróficos negociados en el CBOT. Los autores definen la cuantía total de una catástrofe como la suma de

13 Nowak, P. y M. Romaniuk, “Princing and simulations of catastrophe Bonds,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 52, 2013, pp. 18-28.

14 Zong-Gang, M. y Chao-Qun, M., “Princing catastrophe risk Bonds: a mixed approximation method,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 52, 2013, pp. 243-254.

15 Lai, V. S, M. Parcollet y B.F. Lamond, “The valuation of catastrophe bonds with exposure to currency exchange risk,” *International Review of Financial Analysis*, 33, 2014, pp. 243-252.

16 Alegre, A, M. J. Pérez-Fructuoso y P. Devolder, “Modèles discrets d’options sur risques catastrophiques,” *Belgian Actuarial Bulletin*, 3, 2003, pp. 28-32.

dos variables aleatorias, la cuantía declarada de siniestros y la cuantía de siniestros pendiente de declaración, limitando la posibilidad de ocurrencia de catástrofes a una por período. Para reflejar la incertidumbre del ritmo de las declaraciones en el tiempo, establecen un proceso estocástico discreto formado por variables aleatorias de Bernoulli, denominadas *tasas nominales de declaración de siniestros*, que permiten simular periódicamente dos velocidades de declaración de siniestros, una rápida y otra lenta. Finalmente demuestran que, dividiendo infinitamente los periodos de observación, el modelo discreto aleatorio tiende a un modelo continuo basado en un proceso de Wiener. A partir de este resultado, Pérez-Fructuoso[17] realiza una extensión al campo continuo del modelo discreto aleatorio anterior para modelar los Cat bonds. Para ello supone que la dinámica de la cuantía de siniestros pendiente de declarar sigue un movimiento geométrico browniano representativo de un decrecimiento temporal de esta variable a razón de una función real de variable real, denominada tasa de declaración de siniestros. Para el caso de una tasa de declaración de siniestros constante (tasa instantánea de declaración de siniestros), Pérez-Fructuoso[18] extiende el modelo anterior al cálculo de un índice de pérdidas que permite la valoración de cualquier instrumento derivado vinculado a seguros (*Insurance-Linked Securities*, ILS).

Sin embargo, observando el comportamiento real de siniestralidad tras la ocurrencia de la catástrofe, parece manifestarse una intensidad en el ritmo de las declaraciones muy elevada durante los primeros días tras el evento, que va desacelerándose con el paso del tiempo, hasta alcanzar un valor constante que se mantiene hasta finalizar el proceso de declaración. Por tanto, en este artículo se propone una tasa de declaración de siniestros definida como una función exponencial con el objetivo de desarrollar una modelización más ajustada del índice de pérdidas por catástrofes desencadenantes de los ILS.

La estructura del artículo es la siguiente. Tras revisar en la Sección primera los principales modelos existentes de cálculo del índice de pérdidas y valoración de los ILS, en la Sección 2 se definen las hipótesis básicas sobre las que se modela la ocurrencia de las catástrofes y la declaración de los siniestros, se describen las expresiones más relevantes obtenidas en el modelo original, tanto cierto como aleatorio, y se presenta las soluciones de las variables cuantía declarada de siniestros y cuantía de siniestros pendientes de declarar cuando la tasa de declaración de siniestros se define de forma exponencial. En la Sección 3 se calcula el índice de pérdidas por catástrofes, a partir de los resultados obtenidos en la Sección anterior. Finalmente, la Sección 4 presenta las principales conclusiones alcanzadas con la realización del trabajo.

17 Pérez-Fructuoso, M. J., "A continuous model to calculate the loss trigger index of a CAT Bond," Variance, 2 (2), 2008, pp. 253-265.

18 Pérez-Fructuoso, M.J., "Elaborating a catastrophic loss index for insurance-linked securities (ILS) a continuous model," *Asian-Pacific Journal of Risk and Insurance*, 3 (2), 2009, pp. 34-45.

2. MODELO CONTINUO ALTERNATIVO BASADO EN UN MOVIMIENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO

2.1. Hipótesis sobre la ocurrencia de catástrofes

Siguiendo el trabajo desarrollado por Pérez-Fructuoso en 2009, para llevar a cabo el desarrollo del modelo de elaboración de un índice de pérdidas desencadenante de los ILS, definimos, en primer lugar, el intervalo $[0,T]\subset[0,T']$ como el periodo de riesgo durante el cual pueden producirse las catástrofes cuyas pérdidas asociadas van a formar parte del índice, siendo $T' \geq T$ la fecha de vencimiento o amortización del contrato.

Clasificamos las catástrofes en tres categorías en función de su intensidad, $i=1,2,3$ de forma que $i=1$ si la catástrofe ocurrida es de pequeña cuantía, $i=2$ si es de cuantía media e $i=3$ si es de gran cuantía[19].

Finalmente, consideramos la variable $N^i(t)$ es un Proceso de Poisson de parámetro $\lambda^i t$ que representa el número aleatorio de catástrofes ocurridas durante el periodo de riesgo considerado. Entonces, el tiempo que transcurre entre dos procesos de Poisson, es decir, entre la ocurrencia de dos catástrofes consecutivas del mismo tipo, $t_\tau^i - t_{\tau-1}^i$, es posible representarlo mediante una distribución exponencial de parámetro (λ^i).

2.2. Hipótesis sobre la declaración de siniestros

Asumimos que el proceso de declaraciones de siniestros asociado a la ocurrencia de una catástrofe se inicia en el mismo instante en el que ésta se produce y se alarga hasta el momento del vencimiento del ILS, T'.

Entonces, para un momento de valoración $t\in[\tau^i,T']\subset[0, T']$, definimos la cuantía total de la catástrofe ocurrida en el momento τ, K_τ^i como la suma de dos variables aleatorias[20],

$$K_\tau^i = S_\tau^i(t) + R_\tau^i(t) \tag{11}$$

donde $S_\tau^i(t)$ es la cuantía declarada de siniestros (*reported claims*, *RC*), y $R_\tau^i(t)$ la cuantía de siniestros pendientes de declaración (*incurred-but-not-yet-reported claims*, IBNRC) ambas referidas al momento de valoración t y sujetas a las siguientes condiciones de contorno:

19 Alegre, A, M. J. Pérez-Fructuoso y P. Devolder, "Modèles discrets d'options sur risques catastrophiques," *Belgian Actuarial Bulletin*, 3, 2003, pp. 28-32.

20 Pérez-Fructuoso, M.J., "Elaborating a catastrophic loss index for insurance-linked securities (ILS) a continuous model," *Asian-Pacific Journal of Risk and Insurance*, 3 (2), 2009, pp. 34-45.

(a) Condición de contorno inicial, $t=\tau$: si el momento de valoración del bono coincide con el momento de ocurrencia de la catástrofe,

$$R_\tau^i(t)=K_\tau^i \quad \text{y} \quad S_\tau^i(t)=0$$

la cuantía IBNRC coincide con el volumen total de la catástrofe y, consecuentemente, la cuantía RC es cero.

(b) Condición de contorno final, $t\rightarrow\infty$: si la valoración del bono se produce en un momento lo suficientemente alejado de la ocurrencia de la catástrofe (tiende a infinito),

$$\lim_{t\rightarrow\infty} R_\tau^i(t)=0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\rightarrow\infty} S_\tau^i(t)=K_\tau^i$$

las pérdidas asociadas a la catástrofe ya se han declarado en su totalidad, y por tanto ya no queda ningún siniestro pendiente de declarar.

2.3. Cálculo general en el modelo cierto de la variables $R_\tau^i(t)$ y $S_\tau^i(t)$

A partir del análisis de la evidencia empírica se considera como hipótesis fundamental del modelo que la intensidad en la declaración de los siniestros es muy elevada inmediatamente después de la ocurrencia de la catástrofe y va disminuyendo con el tiempo hasta anularse cuando ya no quedan más siniestros pendientes de declarar. Como consecuencia de ello, se representa la siniestralidad instantánea a través de una ecuación diferencial cierta que describe un crecimiento de la cuantía de siniestros declarada proporcional a la variable cuantía de siniestros pendiente de declarar,

$$dS_\tau^i(t)=\alpha_\tau^i\left(t-t_\tau^i\right)R_\tau^i(t)dt \quad \forall\left[t_\tau^i,T\right] \tag{12}$$

donde $\alpha_\tau^i\left(t-t_\tau^i\right)$ es una función real denominada *tasa de declaración de siniestros* cuya forma explícita se obtiene mediante el análisis de datos empíricos sobre declaraciones de siniestros por catástrofes y bajo la hipótesis de que los siniestros asociados a catástrofes de cuantía media se declaran más rápidamente en el tiempo que los siniestros referidos a las grandes catástrofes, esto es $\alpha_\tau^2\left(t-t_\tau^2\right)>\alpha_\tau^3\left(t-t_\tau^3\right)$. En cuanto a las catástrofes de pequeña cuantía, $i=1$, se considera que se declaran de forma instantánea en el momento en el que se producen, pasando a forma parte del índice de pérdidas directamente. Por tanto $\alpha_\tau^1\left(t-t_\tau^1\right)\rightarrow\infty$, $S_\tau^1(t)=K_\tau^1$ y $R_\tau^1(t)=0$.

Diferenciando la ecuación (11), resulta,

$$dS_\tau^i(t) = -dR_\tau^i(t) \tag{13}$$

y substituyendo $dS_\tau^i(t)$ por (13) en la ecuación (12), se obtiene la ecuación diferencial cierta que describe la evolución de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, $R_\tau^i(t)$, variable fundamental de nuestra modelación, como:

$$dR_\tau^i(t) = -\alpha_\tau^i\left(t - t_\tau^i\right)R_\tau^i(t)dt \quad \forall\left[t_\tau^i, T\right] \tag{14}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial ordinaria, con las condiciones de contorno definidas anteriormente, obtenemos:

$$R_\tau^i(t) = K_\tau^i e^{-\int_0^{t-t_\tau^i} \alpha_\tau^i(s)ds} \tag{15}$$

Finalmente, substituyendo (15) en la ecuación (11), que establece la relación entre las variables $R_\tau^i(t)$ y $S_\tau^i(t)$, la cuantía declarada de siniestros hasta t, $S_\tau^i(t)$, se obtiene fácilmente como diferencia entre la cuantía total de la catástrofe y la cuantía de siniestros pendiente de declarar:

$$S_\tau^i(t) = K_\tau^i - R_\tau^i(t) = K_\tau^i\left[1 - e^{-\int_0^{t-t_\tau^i} \alpha_\tau^i(s)ds}\right] \tag{16}$$

2.4. Cálculo de las variables $R_\tau^i(t)$ y $S_\tau^i(t)$ en el modelo cierto para una tasa de declaración de siniestros asintótica

En el artículo publicado por Pérez-Fructuoso en 2009, siguiendo a otros autores como Cummins y Geman, se desarrolla el modelo presentado en la sección anterior suponiendo un valor constante de la función tasa de declaración de siniestros. Asumir esta hipótesis implica considerar que el ritmo de declaración de los siniestros es el mismo para todo el periodo analizado. Sin embargo, la evidencia empírica pone de manifiesto que el ritmo de las declaraciones es mayor en los primeros días después de haber ocurrido la catástrofe, lo que provoca, en esos momentos, una mayor disminución de la cuantía de siniestros pendientes de declarar y por tanto un mayor crecimiento de la cuantía de siniestros declarada.

En este artículo se presenta una definición alternativa para dicha tasa, que denominamos *tasa de declaración de siniestros asintótica*, cuya expresión es,

$$\alpha_\tau^i(s) = \alpha_\tau^i\left(1 - e^{-\beta_\tau^i s}\right) \tag{17}$$

y que supone un crecimiento exponencial de las declaraciones de siniestros de forma que a medida que pasa el tiempo el ritmo de las declaraciones se reduce proporcionalmente al parámetro β_τ^i definido como el *tiempo medio de declaración de los siniestros*, hasta alcanzar, en el límite, el valor de la tasa constante α_τ^i.

Entonces, si $\alpha_\tau^i(s) = \alpha_\tau^i\left(1 - e^{-\beta_\tau^i s}\right)$, la integral en la ecuación (15) resulta,

$$\int_0^{t-t_\tau^i} \alpha_\tau^i(s)\, ds = \int_0^{t-t_\tau^i} \alpha_\tau^i\left(1 - e^{-\beta_\tau^i s}\right) ds = \alpha_\tau^i\left(t - t_\tau^i\right) - \frac{\alpha_\tau^i}{\beta_\tau^i}\left(1 - e^{-\beta_\tau^i\left(t - t_\tau^i\right)}\right) \tag{18}$$

y la cuantía de siniestros pendiente de declarar y la cuantía declarada de siniestros hasta e incluido el momento t son, respectivamente:

$$R_\tau^i(t) = K_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i\left(t - t_\tau^i\right)} e^{\frac{\alpha_\tau^i}{\beta_\tau^i}\left(1 - e^{-\beta_\tau^i\left(t - t_\tau^i\right)}\right)} \tag{19}$$

$$S_\tau^i(t) = K_\tau^i\left[1 - e^{-\alpha_\tau^i\left(t - t_\tau^i\right)} e^{\frac{\alpha_\tau^i}{\beta_\tau^i}\left(1 - e^{-\beta_\tau^i\left(t - t_\tau^i\right)}\right)}\right] \tag{20}$$

2.5. Cálculo general de las variables $R_\tau^i(t)$ y $S_\tau^i(t)$ en el modelo aleatorio

Para capturar el comportamiento irregular de las declaraciones de siniestros catastróficos a lo largo del tiempo, introducimos un proceso de Wiener en la ecuación (14) dando lugar a la siguiente ecuación diferencial estocástica[21],

$$dR_\tau^i(t) = -\alpha_\tau^i\left(t - t_\tau^i\right) R_\tau^i(t)\, dt + \sigma_\tau^i R_\tau^i(t)\, dw_\tau^i\left(t - t_\tau^i\right) \quad \forall t \in \left[t_\tau^i, T\right] \tag{21}$$

21 Pérez-Fructuoso, M. J., "Elaborating a catastrophic loss index for insurance-linked securities (ILS) a continuous model," *Asian-Pacific Journal of Risk and Insurance*, 3(2), 2009, pp.34-45.

donde $\alpha_\tau^i\left(t-t_\tau^i\right)$ representa la tendencia del proceso, σ_τ^i es una constante que indica la volatilidad del proceso, y $w_\tau^i\left(t-t_\tau^i\right)$ es un proceso de Wiener estándar asociado a la catástrofe del tipo *i* ocurrida en el momento t_τ^i.

El proceso de Wiener recoge las diferencias en la intensidad de declaración de siniestros ya que se considera que cada catástrofe tiene características propias no explicitadas en el modelo. Este hecho queda reflejado en el modelo introduciendo perturbaciones diferentes a través de procesos de Wiener independientes.

Por otra parte, perturbar la tasa de declaración de siniestros con un ruido blanco amplificado por σ_τ^i puede dar lugar a valores de dicha tasa negativos, lo que provocaría un crecimiento en el tiempo de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, $R_\tau^l(t)$, debido a la variación inversa definida para dicha variable. Esto puede suceder cuando, después de realizadas las declaraciones de siniestros, la tasación de los peritos dé lugar a valoraciones de pérdidas inferiores a las estimadas inicialmente. Por ello, la incorporación de la aleatoriedad mediante un proceso de Wiener únicamente es válida para valores de σ_τ^i tales que la probabilidad de que la cuantía de siniestros pendiente de declarar sea creciente, es prácticamente despreciable.

La ecuación diferencial (21) se resuelve aplicando el lema de Itô[22] a la transformación $y=\ln R_\tau^i(t)$, de donde, considerando las condiciones de contorno (a) y (b), se obtiene:

$$R_\tau^i(t)=K_\tau^i e^{-\int_0^{t-t_\tau^i}\alpha_\tau^i(s)ds-\frac{\left(\sigma_\tau^i\right)^2}{2}\left(t-t_\tau^i\right)+\sigma_\tau^i w_\tau^i\left(t-t_\tau^i\right)} \tag{22}$$

Sustituyendo (22), en la ecuación (11), que establece la relación entre las variables $R_\tau^i(t)$ y $S_\tau^i(t)$, obtenemos fácilmente la cuantía declarada de siniestros hasta *t*, $S_\tau^i(t)$, como diferencia entre la cuantía total de la catástrofe y la cuantía de siniestros pendiente de declarar,

$$S_\tau^i(t)=K_\tau^i-R_\tau^i(t)=K_\tau^i\left[1-e^{-\int_0^{t-t_\tau^i}\alpha_\tau^i(s)d\ -\frac{\left(\sigma_\tau^i\right)^2}{2}\left(t-t_\tau^i\right)+\sigma_\tau^i w_\tau^i\left(t-t_\tau^i\right)}\right] \tag{23}$$

22 Arnold, L., *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, John Wiley & Sons, Inc.: New York, 1974.

sin necesidad de definir una ecuación diferencial estocástica para describir su dinámica.

2.6. Cálculo en el modelo aleatorio de la variables $R_\tau^i(t)$ y $S_\tau^i(t)$ para una tasa de declaración de siniestros asintótica

La cuantía de siniestros pendientes de declarar $R_\tau^i(t)$, en este caso, se obtiene substituyendo en la ecuación (23) el resultado obtenido en (18) y operando, de forma que,

$$R_\tau^i(t)=K_\tau^i e^{-\left(\alpha_\tau^i+\frac{\left(\sigma_\tau^i\right)^2}{2}\right)\left(t-t_\tau^i\right)+\sigma_\tau^i w_\tau^i\left(t-t_\tau^i\right)} e^{\frac{\alpha_\tau^i}{\beta_\tau^i}\left(1-e^{-\beta_\tau^i\left(t-t_\tau^i\right)}\right)} \tag{24}$$

y la cuantía declarada de siniestros, $S_\tau^i(t)$, despejando de la expresión (11), resulta:

$$S_\tau^i(t)=K_\tau^i\left[1-e^{-\left(\alpha_\tau^i+\frac{\left(\sigma_\tau^i\right)^2}{2}\right)\left(t-t_\tau^i\right)+\sigma_\tau^i w_\tau^i\left(t-t_\tau^i\right)} e^{\frac{\alpha_\tau^i}{\beta_\tau^i}\left(1-e^{-\beta_\tau^i\left(t-t_\tau^i\right)}\right)}\right] \tag{25}$$

Dado que, en este caso, la distribución de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, $R_\tau^i(t)$, depende de la distribución de probabilidad de la cuantía de la catástrofe, K_τ^i, si consideramos que dicha cuantía es un valor constante, la variable $R_\tau^i(t)$ seguirá una distribución lognormal, siendo su distribución normal asociada:

$$N\left(\ln K_\tau^i-\left(\alpha_\tau^i+\frac{\left(\sigma_\tau^i\right)^2}{2}\right)\left(t-t_\tau^i\right)+\frac{\alpha_\tau^i}{\beta_\tau^i}\left(1-e^{-\beta_\tau^i\left(t-t_\tau^i\right)}\right);\sigma_\tau^i\sqrt{t-t_\tau^i}\right) \tag{26}$$

La función $R_\tau^i(t)$ expresa la cuantía de los siniestros pendiente de declaración a lo largo de tiempo y como ya hemos indicado, parece lógico pensar que, una vez ocurrida la catástrofe, y especialmente en el momento de su ocurrencia, esta cuantía será muy elevada e irá disminuyendo con el tiempo a medida que se vayan declarando los siniestros asociados a la misma. Este comportamiento decreciente de la cuantía de siniestros pendiente de declarar queda perfectamente reflejado en el modelo aleatorio con tasa de declaración de siniestros constante desarrollado por Pérez-Fructuoso en 2009, en el cual, la variable $R_\tau^i(t)$ es, en promedio, la función $R_\tau^i(t)$ obtenida en el modelo cierto en el que $\sigma_\tau^i=0$, esto es:

$$E\left(R_\tau^i(t)\right)=K_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i\left(t-t_\tau^i\right)}$$

Como es obvio, la representación gráfica de $E\left(R_\tau^i(t)\right)$, considerando un valor constante para la variable cuantía total de la catástrofe K_τ^i, es la función de distribución complementaria de una distribución exponencial de parámetro α_τ^i.

La definición de este nuevo modelo con la tasa de declaración de siniestros asintótica, modifica la expresión de la cuantía de siniestros pendientes de declarar del modelo original con tasa de declaración de siniestros constante, al multiplicarla por la función exponencial $e^{\frac{\alpha_\tau^i}{\beta_\tau^i}\left(1-e^{-\beta_\tau^i\left(t-t_\tau^i\right)}\right)}$, lo que hace necesario el estudio matemático de la función $R_\tau^i(t)$ en el nuevo modelo en cuanto al análisis del crecimiento y la curvatura de la misma, para determinar si su comportamiento se ajusta a la realidad que se pretende plasmar. Los resultados alcanzados con el estudio de la primera, segunda y tercera derivadas de la función $R_\tau^i(t)$ permiten concluir que dicha función cumple los requisitos de crecimiento y forma para representar la variable cuantía de siniestros pendiente de declaración.

3. DETERMINACIÓN DEL ÍNDICE DE PÉRDIDAS POR CATÁSTROFES

Un índice de pérdidas por catástrofes se define como el cociente entre la cuantía total de pérdidas asociadas a una o varias catástrofes ocurridas a lo largo de un determinado periodo de tiempo y un valor constante cuya definición depende del tipo de índice utilizado (por ejemplo, podría ser el volumen de primas devengadas durante el periodo de riesgo para cubrir las pérdidas catastróficas asociadas o un valor constante para referir las pérdidas registradas a puntos de cotización del mercado.)

Los índices de pérdidas utilizados como desencadenantes en las emisiones de ILS, basan el pago de las indemnizaciones en la cuantía acumulada de las pérdidas hasta el vencimiento asociadas a las catástrofes ocurridas durante el periodo de riesgo. Por tanto,

$$LI(T')=\sum_{i=1}^{3}\sum_{\tau=1}^{N^i(T)}S_\tau^i(T') \tag{27}$$

siendo $LI(T')$ el valor del índice de pérdidas al vencimiento.

Entonces, substituyendo en (27), $S_\tau^i(T')$ por su expresión dada en la ecuación (25), y considerando que las catástrofes de pequeña cuantía, i=1, se declaran de forma instantánea en el momento en el que se producen, el valor de dicho índice al vencimiento resulta:

$$LI(T')=\frac{1}{cte}\times\sum_{i=1}^{3}\sum_{\tau=1}^{N^i(T)}K_\tau^i\left[1-e^{-\left(\alpha_\tau^i+\frac{\left(\sigma_\tau^i\right)^2}{2}\right)\left(t-t_\tau^i\right)+\sigma_\tau^i w_\tau^i\left(t-t_\tau^i\right)}\,e^{\frac{\alpha_\tau^i}{\beta_\tau^i}\left(1-e^{-\beta_\tau^i\left(t-t_\tau^i\right)}\right)}\right]=$$

$$=\frac{1}{cte}\times\left[\sum_{\tau=1}^{N^1(T)}K_\tau^1+\sum_{i=2}^{3}\sum_{\tau=1}^{N^i(T)}K_\tau^i\left[1-e^{-\left(\alpha_\tau^i+\frac{\left(\sigma_\tau^i\right)^2}{2}\right)\left(t-t_\tau^i\right)+\sigma_\tau^i w_\tau^i\left(t-t_\tau^i\right)}\,e^{\frac{\alpha_\tau^i}{\beta_\tau^i}\left(1-e^{-\beta_\tau^i\left(t-t_\tau^i\right)}\right)}\right]\right] \qquad (28)$$

4. CONCLUSIONES

Desde sus inicios, a principios de los años 90 del siglo pasado, hasta la fecha el mercado de *Insurance Linked Securities* (ILS) ha ido evolucionando hasta convertirse en un mercado financiero consolidado en el que las emisiones y los límites de riesgos record cubiertos durante los últimos años apuntan a que estos instrumentos son herramientas viables de inversión y transferencia del riesgo para las aseguradoras. Los ILS son, por tanto, productos de transferencia alternativa de riesgos que incrementan la capacidad y la flexibilidad del sector asegurador.

Respecto a su valoración, el modelo continuo propuesto en este trabajo permite calcular fácilmente el índice de pérdidas desencadenante del activo sobre catástrofes. Además permite, en primer lugar, clasificar las catástrofes y facilita la estimación de los parámetros correspondientes a las distribuciones de la cuantía de dichas catástrofes. Como ampliación de los modelos previos, hemos considerado que además de ser aleatorio el número de catástrofes también lo será la cuantía total de cada una de ellas. Esta última hipótesis nos ha llevado a clasificar las catástrofes en tres categorías.

A diferencia de muchos de los modelos precedentes, que asumen un crecimiento temporal de la cuantía declarada de siniestros y representan dicha evolución a través de un movimiento geométrico browniano, la hipótesis central del modelo aquí presentado es la definición de la dinámica de las declaraciones siniestrales basada en un crecimiento proporcional a la cuantía de siniestros pendiente de declarar. Esta cuantía es la variable fundamental en el proceso de formalización del modelo, cuya dinámica decreciente es la que modelamos a través de un proceso geométrico de Wiener. Una vez determinada esta variable, el total de declaraciones de siniestros se obtiene fácilmente como diferencia entre la cuantía total de la catástrofe y la cuantía de siniestros pendiente de declaración, eliminando de esa forma la necesidad de definir una ecuación diferencial estocástica para describir su dinámica. El índice de pérdidas catastróficas resulta de sumar la cuantía declarada de siniestros asociada a cada una de las catástrofes ocurridas durante el periodo de riesgo definido en el producto.

La obtención de estas variables se ha realizado para dos contextos diferentes. En primer lugar, calculamos las expresiones asociadas a cualquier definición funcional de la tasa de declaración de siniestros, para, posteriormente, atribuir a dicha tasa una forma asintótica con el objetivo de realizar una representación lo más ajustada a la realidad de la evolución real de las declaraciones de siniestros en el tiempo.

BIBLIOGRÁFIA

Aase, K., "An Equilibrium Model of Catastrophe Insurance Futures and Spreads," *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 24, 1999, pp. 69-96.

Aase, K., "A Markov model for the pricing of catastrophe insurance futures and spreads," *Journal of Risk and Insurance*, vol. 68 (1), 2001, pp. 25-50.

Alegre, A, M. J. Pérez-Fructuoso y P. Devolder, "Modèles discrets d'options sur risques catastrophiques," *Belgian Actuarial Bulletin*, 3, 2003, pp. 28-32.

Arnold, L., *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, John Wiley & Sons, Inc.: New York, 1974.

Cummins, J. D. y H. Geman, "Pricing Catastrophe Insurance Futures and Call Spreads: An Arbitrage Approach," *Journal of Fixed Income*, 4, 1995, pp. 46-57.

Cox, J., J. E. Ingersoll, J. E. Y S.Ross, " The Relation between Forward Prices and Futures Prices", *Journal of Financial Economics*, 9, 1981, pp. 321-346.

Cox, S. H. y H. Pedersen, "Catastrophe Risk Bonds," *North American Actuarial Journal*, 4 (4), 2000, pp. 56-82.

Embrechts, P., y S. Meister, *Pricing insurance derivatives, the case of CAT futures*. Proceedings of the 1995 Bowles Symposium on Securitization of Insurance Risk, Georgia State University, Atlanta, Georgia. Society of Actuaries, Monograph M-FI97-1: 15-26, 1997.

Geman, H. y M. Yor, "Stochastic time changes in catastrophe option pricing," *Insurance: Mathematics and economics*, 21, 1997, pp. 185-193.

Lai, V. S, M. Parcollet y B.F. Lamond, "The valuation of catastrophe bonds with exposure to currency exchange risk," *International Review of Financial Analysis*, 33, 2014, pp. 243-252.

Lee, J.P. y M. T. Yu, "Pricing default-risky Cat bonds with moral hazard and basis risk," *Journal of Risk and Insurance*, 69 (1), 2002, pp. 25-44.

Lee, J.P. y M. T. Yu, "Valuation of catastrophe reinsurance with catastrophe bonds," *Insurance: Mathematics and Economics*, 41 (2), 2007, pp. 264-278.

Loubergé, H., E. Kellezi y M. Gilli, "Using Catastrophe-Linked Securities to Diversify Insurance Risk: A Financial Analysis of Cat Bonds," *Journal of Insurance Issues*, 22 (2), 1999, pp. 125–146.

Muermann, A., *Actuarially Consistent Valuation of Catastrophe Derivatives*, Working Paper Series The Wharton Financial Institutions Center, 03-18, 2003.

Nowak, P. y M. Romaniuk, "Princing and simulations of catastrophe Bonds," *Insurance: Mathematics and Economics*, 52, 2013, pp. 18-28.

Pérez-Fructuoso, M.J., "Elaborating a catastrophic loss index for insurance-linked securities (ILS) a continuous model," *Asian-Pacific Journal of Risk and Insurance*, 3 (2), 2009, pp. 34-45.

Pérez-Fructuoso, M. J., "A continuous model to calculate the loss trigger index of a CAT Bond," Variance, 2 (2), 2008, pp. 253-265.

Pérez-Fructuoso, M. J., "La titulización del riesgo catastrófico: descripción y análisis de los *cat bonds (Bonos de Catástrofes)," Revista Española de Seguros*, 121, 2005, pp. 75-92.

Shimko, D., "The Valuation of Multiple Claim Insurance Contracts", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 27 (2), 1992, pp. 229-246.

Zong-Gang, M. y Chao-Qun, M., "Princing catastrophe risk Bonds: a mixed approximation method," *Insurance: Mathematics and Economics*, 52, 2013, pp. 243-254.