ISSN 0123-1154 (IMPRESO)
ISSN 2500-7556 (EN LÍNEA)

MODELO DISCRETO ALEATORIO PARA CALCULAR EL ÍNDICE DE PÉRDIDAS DESENCADENANTE DE LOS *CAT BONDS*[*]

DISCRETE RANDOM MODEL FOR CALCULATING THE LOSS INDEX TRIGGER FOR CAT BONDS

MARÍA JOSÉ PÉREZ-FRUCTUOSO[**]

Fecha de recepción: 14 de octubre de 2022
Fecha de aceptación:30 de octubre de 2022
Disponible en línea: 30 de diciembre de 2022

Para citar este artículo/***To cite this article***

Perez-Fructuoso, María José, Modelo discreto aleatorio para calcular el índice de pérdidas desencadenante de los cat bonds, 57 Rev.Ibero-Latinoam.Seguros, 289-304 (2022). https://doi.org/10.11144/Javeriana.ris57.mdac

doi:10.11144/Javeriana.ris57.mdac

[*] Artículo de Investigación.

RESUMEN

En este trabajo se propone un modelo discreto aleatorio que describe la evolución del índice de pérdidas desencadenante de los bonos sobre catástrofes. Para ello, se supone que la cuantía total de la catástrofe es la suma de la cuantía declarada de siniestros y de la cuantía de siniestros pendientes de declaración. Tras establecer una dinámica de la declaración de siniestros determinista, en la que la aleatoriedad del modelo reside únicamente en la ocurrencia o no de una catástrofe se introduce la aleatoriedad en el modelo substituyendo la tasa de nominal de declaración de siniestros por una variable aleatoria dicotómica que permite simular una declaración de siniestros lenta o rápida en cada periodo.

Palabras clave: bonos sobre catástrofes, cuantía de siniestros pendiente de declaración, tasa nominal de declaración de siniestros, modelo binomial

ABSTRACT

This paper proposes a discrete random model that describes the evolution of the loss ratio triggering catastrophe bonds. For this purpose, it is assumed that the total catastrophe amount is the sum of the claims reported amount and incurred but not yet claim reported amount. After establishing a deterministic claims dynamic, where the randomness of the model resides only in the occurrence or non-occurrence of a catastrophe, randomness is introduced into the model by replacing the nominal claims reporting rate by a dichotomous random variable that allows to simulate slow or fast claim filing in each period.

Keywords: cat bonds, incurred but not yet reported claims amount, nominal claims reporting rate, binomial model

SUMARIO

1. INTRODUCCIÓN

En el año 1992 empezaron a negociarse en los mercados financieros norteamericanos los primeros contratos de cobertura de los riesgos catastróficos. Ello fue debido a las importantes dificultades financieras que sufrieron algunas grandes reaseguradoras como consecuencia de la ocurrencia de dos grandes catástrofes, el huracán Andrew y el huracán Iniki, cuya magnitud y su casi coincidencia en el tiempo tuvieron una honda repercusión sobre la actividad de las reaseguradoras norteamericanas: la reducción de sus límites de aceptación en riesgos de este tipo. Como efecto derivado, las compañías de seguros se vieron fuertemente incentivadas para la búsqueda de nuevos sistemas de dispersión del riesgo a través de los mercados de capital**.** Conocidos con el nombre de titulización (*securitization*), su objetivo es incrementar las posibilidades en el mercado asegurador y, por tanto, la capacidad de suscripción, ofertando mayores coberturas en aquellos casos en los que las coberturas existentes son insuficientes o nulas, mediante la creación y emisión de derivados financieros basados en seguros (Insurance-Linked Securities), como bonos, opciones y swaps. De esta forma, las aseguradoras pueden trasladar parte de su riesgo a los inversores quienes toman posiciones en la ocurrencia y el coste de las catástrofes (Pérez-Fructuoso, 2005).

La emisión de Bonos sobre Catástrofes (o Cat bonds) es una de las formas de titulización que más ha desarrollado y utilizado el mercado asegurador en los últimos años para dar cobertura a riesgos tradicionalmente “no asegurables” o los denominados “nuevos riesgos”, como el riesgo derivado de la intensificación de las catástrofes naturales (Polacek, 2018). Estos bonos son productos financieros cuyos flujos, cupones y principal, están condicionados a la ocurrencia de un determinado suceso de naturaleza catastrófica establecido en la emisión. En compensación por esta incertidumbre que se produce en los flujos de caja, los inversores en bonos catastróficos reciben unas rentabilidades muy superiores a las ofrecidas por otro tipo de bonos con un rating de crédito similar, además de reducir el riesgo de sus carteras a través de la diversificación. El rendimiento de un Cat bond no depende de las condiciones de los mercados de capital sino de la ocurrencia de una catástrofe cuyas características se ajusten a unos valores establecidos en la emisión. Esto supone que el riesgo de pérdida en los bonos catastróficos no está correlacionado con el riesgo de pérdida en otros bonos y activos financieros tradicionales, convirtiéndolos en títulos “beta cero”. Igual que en los bonos tradicionales, la aseguradora pide prestado a los inversores una determina cantidad, conocida como principal o valor facial, que devuelve en el momento del vencimiento (normalmente anual) más un importe adicional en concepto de intereses. Sin embargo, los resultados de los Cat bonds están condicionados, esto es, la compañía emisora se reserva el derecho a no realizar el pago de los intereses y/o a no devolver parte o la totalidad del principal si se produce un determinado suceso desencadenante cuyos parámetros quedan fijados en el momento de la emisión. Este desencadenante se puede definir de muchas formas, dependiendo de cómo se realice la cobertura del riesgo, pero siempre refleja una situación en la que la compañía aseguradora presenta pérdidas catastróficas. Entre los desencadenantes más utilizados para la emisión de un Cat bond se encuentra el de índice pérdidas de la industria aseguradora.

La modelación de estos índices de pérdidas con el objetivo de tarificar este tipo de instrumentos de transferencia alternativa del riesgo a lo largo de un periodo determinado, ha sido ampliamente tratada en la literatura científica. En su mayor parte, los modelos utilizados se han desarrollado en tiempo continuo basándose en procesos de Wiener más o menos complejos (ver por ejemplo Cummins y Geman, (1995); Geman y Yor, (1997); Aase (1999 y 2001); Embrechts y Meister (1997); Loubergé, Kellezi y Gilli (1999); Lee y Yu (2002 y 2007); Cox y Pedersen (2000); Baryshnikov, Mayo y Taylor (2001); Muermann (2003); Burnecki y Kukla (2003); Burnecki (2005); Jaimungal y Wang (2006); Biagini, Bregman y Meyer-Brandis (2008); Egami y Young (2008); Chang, Chang y Lu (2010); Braun (2011); Nowak y Romaniuk (2013); Wang (2016) Zong-Gang y Chao-Qun (2013); Lai, Parcollet y Lamond (2014); Pérez-Fructuoso (2008, 2009, 2016a y 2017)).

En cuanto a las aproximaciones discretas son escasas y se limitan a la siguientes. Unger (2010) propone un enfoque discreto de modelización de bonos sobre catástrofes mediante una aproximación numérica de la ecuación en derivadas parciales resultante. Como una extensión del modelo de Cox y Pedersen (2000), Shao, Pantelous y Papaioannou (2015) tarifican los Cat bonds desarrollando un modelo discreto en el que incorporan diversas catástrofes, como terremotos, que se modelizan utilizando la teoría de valor extremo, y riesgos financieros a través de un modelo ARIMA clásico para determinar los tipos de interés y las tasas de inflación y finalmente representan el proceso estocástico de los pagos de cupones del bono en función de un determinado tipo LIBOR anual a través de un modelo de Cox-Ingersoll-Ross (modelo CIR).

Alegre, Pérez-Fructuoso y Devolder (2003) desarrollan un modelo aleatorio en tiempo discreto que modela el comportamiento del índice de pérdidas subyacente de los futuros y opciones sobre riesgos catastróficos negociados en el CBOT basado en el modelo discreto de valoración de opciones de Cox, Ross y Rubinstein (1979). Finalmente, Pérez-Fructuoso (2016b) establece en tiempo discreto, un modelo cierto y muy simple para modelar el comportamiento de un índice de pérdidas por catástrofes utilizado como subyacente de los derivados vinculados a seguros en general.

En este trabajo se realiza una extensión del modelo de Alegre, Pérez-Fructuoso y Devolder (2003) anteriormente mencionado y del modelo cierto presentado por Pérez-Fructuoso (2016b) que permite modelizar el comportamiento del desencadenante de los bonos sobre catástrofes analizados. Para ello, se considerará que la cuantía total de la catástrofe cubierta en la emisión es la suma de dos variables, la cuantía declarada de siniestros y la cuantía de siniestros pendiente de declarar reduciendo la posibilidad de ocurrencia de catástrofes a una por período. En una primera aproximación determinista se supondrá que la cuantía de los siniestros pendiente de declarar decrece proporcionalmente a un valor constante denominado tasa nominal de declaración de siniestros. En la versión aleatoria de este modelo, se substituirá la tasa nominal constante del modelo discreto determinista por una variable aleatoria dicotómica.

La estructura del artículo es la siguiente. Tras la introducción, en la sección 2 se definen las hipótesis básicas sobre las que se modela la ocurrencia de las catástrofes y la declaración de los siniestros y se presentan las soluciones del modelo calculando las variables cuantía declarada de siniestros y cuantía de siniestros pendientes de declarar. La Sección 3 se dedica al cálculo del índice de pérdidas por catástrofes, a partir de los resultados obtenidos en la Sección anterior. En la Sección 4 se calcula la variable cuantía de siniestros pendiente de declaración por r-ésimo de periodo que permitirá obtener el valor del índice del bono para periodos de tiempo inferiores al año. Finalmente, la Sección 5 presenta las principales conclusiones alcanzadas en el trabajo.

2. MODELO DISCRETO ALEATORIO DE DECLARACIÓN DE SINIESTROS

Consideramos que K es la variable aleatoria que denota la cuantía total de la catástrofe ocurrida al final del periodo $[\tau\text{-}1,\tau]$ Sin embargo, para simplificar el desarrollo del modelo que se va a presentar a continuación consideraremos que es un valor constante y que su ocurrencia se produce en el momento $\tau=0$.

Definimos esta cuantía total K como la suma de dos variables aleatorias, ambas referidas al momento de valoración t:

$$K = S(t)+R(t) \tag{1}$$

donde $S(t)$ es la cuantía declarada de siniestros al final del periodo $[t\text{-}1,t]$ (RC, por sus siglas en inglés reported claims amount) y $R(t)$ es la cuantía de siniestros pendiente de declarar al final del periodo $[t\text{-}1,t]$ (IBNRC por sus siglas en inglés, *incurred but not yet reported claims amount*).

Como se describe en Pérez-Fructuoso (2016) la hipótesis de partida para llevar a cabo la modelización considera que la variable $R(t)$ decrece proporcionalmente en el tiempo a razón de una tasa constante que denominamos tasa nominal de declaración de siniestros y que, en el caso de periodos unitarios, coincide con la tasa efectiva de declaración de siniestros.

Bajo esta hipótesis, la dinámica de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, $R(t)$, se representa a través de una ecuación en diferencias finitas cierta, como sigue,

$$\Delta R(t) = -\alpha(t)R(t)\Delta t \tag{2}$$

cuya solución particular resulta,

$$R(t) = (1-\alpha)^\wedge t \tag{3}$$

y la solución general es,

$$R(t) = K\cdot(1-\alpha)^\wedge t \tag{4}$$

siendo $R(0)=K$ la cuantía de siniestros pendiente de declarar en el momento en el que se produce la catástrofe, que coincide con el volumen total de la misma (condición de contorno inicial).

La variable *R(t)* tiene incrementos negativos, porque es una función decreciente en el tiempo, de valor:

$$\Delta R(t) = -\alpha K\cdot(1-\alpha)^{\wedge}t \tag{5}$$

Substituyendo en la ecuación (1) la variable *R(t)* por su expresión obtenida en (4) y despejando, se obtiene de la cuantía declarada de siniestros al final del periodo *[t-1,t]*, *S(t)* como sigue,

$$S(t) = K\text{-}R(t) = K\text{-}K\cdot(1-\alpha)^{\wedge}t = K\cdot[1-(1-\alpha)^{\wedge}t] \qquad 6)$$

y la cuantía de sus incrementos es,

$$\Delta S(t) = \alpha\cdot K\cdot(1-\alpha)^{\wedge}t \tag{7}$$

cuyo valor en este caso es positivo porque *S(t)* es una función creciente en el tiempo

(Para más información sobre el proceso de resolución de la ecuación en diferencias finitas y la obtención de los incrementos ver Pérez-Fructuoso, 2016b).

En el modelo discreto de evolución de la ratio de siniestralidad, introducimos la aleatoriedad substituyendo la tasa nominal de declaración de siniestros del modelo discreto cierto, por un proceso estocástico discreto:

$$\{\tilde{\alpha}(t)\}_{t\in\{\tau,\tau+1,\dots,T\}}$$

En este modelo, hacemos la hipótesis de que $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}$ son variables aleatorias dicotómicas independientes e idénticamente distribuidas para cada uno de los periodos considerados. Esto supone que, en cada periodo, se admiten dos escenarios de comportamiento para la evolución de las variables cuantía de siniestros pendiente de declarar y cuantía declarada de siniestros ambas referidas al final del periodo $[t-1,t]$.

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria dicotómica $\tilde{\alpha}$, para cada periodo, es:

$$\begin{array}{cc} \tilde{\alpha} & Probabilidad \\ \alpha_1 & q \\ \alpha_2 & 1-\mathrm{q} \end{array} \tag{8}$$

con $\alpha_1 > \alpha_2$ y donde q representa la probabilidad de que, durante el periodo considerado, se dé la tasa de declaración de siniestros mayor α_1 ($1-q$, es la probabilidad complementaria de la anterior y, por tanto, la probabilidad de que se dé la tasa de declaración de siniestros menor, α_2).

Los momentos de tendencia y dispersión, esperanza y varianza, de esta variable aleatoria dicotómica son:

$$E(\tilde{\alpha}) = \alpha_1 q + \alpha_2(1-q) = \alpha \tag{9}$$

$$\begin{aligned} Var(\tilde{\alpha}) &= [(\alpha_1)^2 q + (\alpha_2)^2(1-q)] - [\alpha_1 q + \alpha_2(1-q)]^2 = \\ &= [(\alpha_1)^2 q + (\alpha_2)^2(1-q)] - [\alpha]^2 = \sigma^2 \end{aligned} \tag{10}$$

A continuación, se define la variable aleatoria que describe el número de veces j en que la velocidad de declaración de siniestros es mayor, α_1, desde el momento en el que se produce la catástrofe, que hemos supuesto que es $\tau = 0$, y durante t periodos. Bajo la hipótesis de equidistribución e independencia, esta variable se distribuye siguiendo una ley binomial, $B(t, q)$ cuya función de cuantía, o probabilidad individual, viene dada por la siguiente expresión:

$$p[B(t,q) = j] = \binom{t}{j} \cdot q^j \cdot (1-q)^{t-j} \tag{11}$$

A partir de la definición de esta variable, el valor de la cuantía de siniestros pendiente de declarar en t, se obtiene aplicando el mismo procedimiento que el utilizado para calcular el precio de una opción según el modelo binomial de valoración de opciones desarrollado por Cox, Ross y Rubinstein (1979):

$$\tilde{R}(t) = K \cdot (1-\alpha_1)^{B(t,q)} \cdot (1-\alpha_2)^{t-B(t,q)} \tag{12}$$

La cuantía declarada de siniestros hasta el final del periodo $[t-1, t]$ se obtiene como la diferencia entre la cuantía total de la catástrofe y la cuantía de siniestros pendiente de declarar en ese momento, esto es:

$$\tilde{S}(t) = K \cdot \left[1 - (1-\alpha_1)^{B(t,q)} \cdot (1-\alpha_2)^{t-B(t,q)}\right] \tag{13}$$

3. DETERMINACIÓN DE LA RATIO DE PÉRDIDAS

Un índice de pérdidas por catástrofes puede definirse como el cociente entre el total de pérdidas asociadas a una catástrofe ocurrida a lo largo de un determinado periodo de tiempo $[0, T]$ denominado periodo de riesgo, y un valor constante p cuya definición depende del tipo de índice empleado.

El valor alcanzado por el índice de pérdidas al vencimiento, T' se calcula como,

$$LI(T') = \frac{L(T')}{p} \tag{14}$$

donde $L(T')$ es la cuantía total en T' de las reclamaciones del conjunto de eventos catastróficos registrados durante el periodo de riesgo.

Para el caso de los bonos sobre catástrofes, los índices utilizados como desencadenantes del pago de las indemnizaciones se basan en la cuantía acumulada de las pérdidas hasta el vencimiento asociada a una única catástrofe. Por tanto, definimos la variable de Bernoulli o variable indicador, δ, cuyo valor es 0 si no se produce la catástrofe cubierta en la emisión o 1 en otro caso y el índice de pérdidas se reescribe como sigue:

$$LI(T') = \delta \cdot \frac{S(T')}{p} = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta = 0 \\ \frac{S(T')}{p} = \frac{K_j - R_j(T')}{p} & \text{si } \delta = 1 \end{cases} \tag{15}$$

$LI(T')$ es el valor del índice de pérdidas al vencimiento y su determinación se realiza en el momento inicial del proceso, resultando:

$$LI(T') = \delta \cdot \frac{K}{p} \cdot \left[1 - (1-\alpha_1)^{B(T',q)} \cdot (1-\alpha_2)^{T'-B(T',q)}\right] =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \delta = 0 \\ \frac{K}{p} \cdot \left[1 - (1-\alpha_1)^{B(T',q)} \cdot (1-\alpha_2)^{T'-B(T',q)}\right] & \text{si } \delta = 1 \end{cases} \tag{16}$$

Interesa ver ahora cómo se modifica la distribución t de probabilidad de este índice cuando, con el paso del tiempo, llegamos al momento e incorporamos la informa $[0,t]$ disponible en ese momento acerca de los siniestros declarados en el intervalo . Para ello, se define la variable aleatoria condicionada $LI^*(T') = LI(T')|\mathcal{F}_t$ que representa la cuantía total de las pérdidas asociadas a la catástrofe cubierta en la emisión del bono que incorpora, a través de la filtración $\mathcal{F}_t$, la información disponible sobre las declaraciones de siniestros realizadas hasta el momento $t \in [\tau = 0, T']$

La obtención de la variable aleatoria condicionada $LI^*(T')$, supone calcular la cuantía declarada de pérdidas en el momento t, $L(t)$:

,

$$LI(t) = \delta \cdot \frac{K}{p} \cdot \left[1 - (1-\alpha_1)^{B(t,q)} \cdot (1-\alpha_2)^{t-B(t,q)}\right] =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \delta = 0 \\ \frac{K}{p} \cdot \left[1 - (1-\alpha_1)^{B(t,q)} \cdot (1-\alpha_2)^{t-B(t,q)}\right] & \text{si } \delta = 1 \end{cases} \tag{17}$$

Una vez obtenida la variable $L(t)$, la incorporamos a la variable $LI(T')$, y obtenemos la expresión que permite calcular la variable condicionada $LI^*(T')$:

$$LI^*(T') = K|\mathcal{F}_t - (K|\mathcal{F}_t - L(t)) \cdot (1-\alpha_1)^{B(T'-t,q)} \cdot (1-\alpha_2)^{(T'-t)-B(t,q)} \tag{18}$$

donde $K|\mathcal{F}_t$ es la distribución de probabilidad de la cuantía total de la catástrofe condicionada a la información disponible sobre la misma hasta el momento t.

4. CÁLCULO DE LA CUANTÍA DE SINIESTROS PENDIENTE DE DECLARAR DEFINIDA POR r-ESIMO DE PERIODO

En este vamos a determinar la cuantía de siniestros pendiente de declarar por r-ésimo de periodo, $\bar{R}^{(r)}(t)$. Su obtención permitirá en trabajos posteriores demostrar la convergencia, en distribución, de esta cuantía a la cuantía de siniestros pendiente de declarar del modelo estocástico continúo basado en un proceso de Wiener desarrollado por Pérez-Fructuoso (2008).

Como paso previo a la obtención de esta cuantía $\tilde{R}^{(r)}(t)$ concretamos explícitamente las distribuciones que relacionan las tasas nominales y efectivas de declaración de siniestros en el modelo estocástico discreto que acabamos de describir.

Hemos definido la variable aleatoria dicotómica $\tilde{\alpha}$ como la tasa nominal de declaración de siniestros por periodo, que coincide, en el caso de periodos unitarios, con la tasa efectiva de declaración de siniestros. A partir de los momentos principales de esta variable, esperanza y varianza, $E(\tilde{\alpha}) = \alpha$ y $Var(\tilde{\alpha}) = [(\alpha_1)^2 q + (\alpha_2)^2(1-q)] - [\alpha]^2 = \sigma^2$, podemos expresarla a través de la correspondiente variable aleatoria estandarizada, ζ,

$$\zeta = \frac{\tilde{\alpha} - \alpha}{\sigma} \tag{19}$$

con $E(\zeta) = 0$ y $Var(\zeta) = 1$ y cuya distribución de probabilidad es,

$$\begin{array}{cc} \zeta & Probabilidad \\ z_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha}{\sigma} & q \\ z_2 = \frac{\alpha_2 - \alpha}{\sigma} & 1-q \end{array} \tag{20}$$

de forma que la tasa nominal de declaración de siniestros puede expresar como:

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \zeta \cdot \sigma \tag{21}$$

En el modelo discreto cierto, la tasa nominal de declaración de siniestros definida por r-ésimo de periodo es la suma de las tasas efectiva de cada uno de los r periodos en que subdividimos el año, y como son número reales, si estas son constantes e iguales a $\alpha^{(r)}$ y, por tanto:

$$\alpha = r \cdot \alpha^{(r)} \tag{22}$$

En el modelo discreto aleatorio, esta nueva tasa de declaración de siniestros por r -esimo de periodo, $\tilde{\alpha}$, es la convolución de las variables $\tilde{\alpha}^{(r)}$ definidas como las tasas efectivas de declaración de siniestros correspondientes a cada r-ésimo de periodo considerado, esto es,

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^{(1)} + \tilde{\alpha}^{(2)} + \cdots + \tilde{\alpha}^{(r)} \tag{23}$$

y bajo la hipótesis de estacionariedad en media y varianza, los momentos de esta tasa efectiva de declaración de siniestros por r-ésimo de periodo, resultan:

$$E(\tilde{\alpha}) = rE\left[\tilde{\alpha}^{(r)}\right] \Rightarrow \alpha = r \cdot \bar{\alpha}^{(r)} \Rightarrow \bar{\alpha}^{(r)} = \frac{\alpha}{r} \tag{24}$$

$$Var(\tilde{\alpha}) = rVar\left[\tilde{\alpha}^{(r)}\right] \Rightarrow \sigma^2 = r \cdot \left(\sigma^{(r)}\right)^2 \Rightarrow \left(\sigma^{(r)}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{r} \tag{25}$$

La variable aleatoria estandarizada correspondiente a la tasa efectiva de declaración de siniestros definida por r-ésimo de periodo, $\tilde{\alpha}^{(r)}$, es la variable aleaotria dicotómica $\zeta^{(r)}$ definida como,

$$\zeta^{(r)} = \frac{\tilde{\alpha}^{(r)} - \frac{\alpha}{r}}{\frac{\sigma}{\sqrt{r}}} \tag{26}$$

con la siguiente distribución de probabilidad:

$$\begin{array}{cc} \zeta^{(r)} & Probabilidad \\ z_1^{(r)} = \frac{\alpha_1^{(r)} - \frac{\alpha}{r}}{\frac{\sigma}{\sqrt{r}}} & q \\ z_2^{(r)} = \frac{\alpha_2^{(r)} - \frac{\alpha}{r}}{\frac{\sigma}{\sqrt{r}}} & 1 - q \end{array} \tag{27}$$

La expresión (26) nos permite obtener la variable aleatoria tasa efectiva de declaración de siniestros definida por r-ésimo de periodo en función de su correspondiente variable aleatoria estandarizada,

$$\tilde{\alpha}^{(r)} = \frac{\alpha}{r} + \zeta^{(r)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{r}} \tag{28}$$

cuya distribución de probabilidad resulta:

$$\begin{array}{cc} \tilde{\alpha}^{(r)} & Probabilidad \\ \alpha_1^{(r)} = \frac{\alpha}{r} + z_1^{(r)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{r}} & q \\ \alpha_2^{(r)} = \frac{\alpha}{r} + z_2^{(r)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{r}} & 1 - q \end{array} \tag{29}$$

En la sección (2) hemos obtenido la distribución de probabilidad de la variable cuantía de siniestros pendiente de declarar al final del periodo $[t-1, t]$, calculada para periodos unitarios, cuya expresión resultante es:

$$\tilde{R}(t) = K \cdot (1 - \alpha_1)^{B(t,q)} \cdot (1 - \alpha_2)^{t - B(t,q)} \tag{30}$$

Teniendo en cuenta la distribución dicotómica de la variable $\tilde{\alpha}^{(r)}$ calculamos ahora, la expresión para la cuantía de siniestros pendiente de declarar por r-ésimo de periodo durante t periodos o, de forma equivalente, durante $r \cdot t$, r-ésimos de periodo:

$$\tilde{R}^{(r)}(t) = K \cdot \left(1 - \alpha_1^{(r)}\right)^{B(r \cdot t, q)} \cdot \left(1 - \alpha_2^{(r)}\right)^{r \cdot t - B(r \cdot t, q)} \tag{31}$$

Y reagrupando términos esta expresión resulta:

$$\tilde{R}^{(r)}(t) = K \cdot \left(1 - \alpha_2^{(r)}\right)^{r \cdot t} \cdot \left(\frac{1 - \alpha_1^{(r)}}{1 - \alpha_2^{(r)}}\right)^{B(r \cdot t, q)} \tag{32}$$

Simbolizamos por $B^*(r\cdot t,q)$ a la distribución binomial estandarizada de la distribución $B(r\cdot t,q)$ tal que:

$$B^*(r\cdot t,q)=\frac{B(r\cdot t,q)-r\cdot t\cdot q}{\sqrt{r\cdot t\cdot q\cdot(1-q)}} \tag{33}$$

Entonces, utilizando la distribución binomial $B(r\cdot t,q)$, en función de su correspondiente distribución estandarizada $B^*(r\cdot t,q)$, esto es,

$$B(r\cdot t,q)=B^*(r\cdot t,q)\cdot\sqrt{r\cdot t\cdot q\cdot(1-q)}+r\cdot t\cdot q \tag{34}$$

la cuantía de siniestros pendiente de declarar por r-ésimo de periodo, $\tilde{R}^{(r)}(t)$, puede expresarse como sigue:

$$\tilde{R}^{(r)}(t)=K\cdot\left(1-\alpha_2^{(r)}\right)^{r\cdot t}\cdot\left(\frac{1-\alpha_1^{(r)}}{1-\alpha_2^{(r)}}\right)^{r\cdot t\cdot q}\cdot\left(\frac{1-\alpha_1^{(r)}}{1-\alpha_2^{(r)}}\right)^{B^*(r\cdot t,q)\cdot\sqrt{r\cdot t\cdot q\cdot(1-q)}} \tag{35}$$

Reagrupando términos en la ecuación (35), obtenemos la expresión final de la cuantía de siniestros pendiente de declarar para cada subperiodo r en el que dividimos el año:

$$\tilde{R}^{(r)}(t)=K\cdot\left[\left(1-\alpha_1^{(r)}\right)^{q}\cdot\left(1-\alpha_2^{(r)}\right)^{(1-q)}\right]^{t}\cdot\left[\left(\frac{1-\alpha_1^{(r)}}{1-\alpha_2^{(r)}}\right)^{\sqrt{r\cdot q\cdot(1-q)}}\right]^{B^*(r\cdot t,q)\cdot\sqrt{t}} \tag{36}$$

5. CONCLUSIONES

La modelización discreta, determinista o aleatoria, del comportamiento del índice de pérdidas desencadenante de los bonos sobre catástrofes, simplifica el cálculo de la variable fundamental del modelo cuantía de siniestros pendiente de declarar. Como hipótesis central para llevar a cabo la sistematización del modelo discreto en un contexto cierto, consideramos que la cuantía de siniestros pendiente de declarar decrece en el tiempo de forma proporcional a una tasa constante que denominamos tasa nominal de declaración de siniestros. Dicha tasa nominal, funciona como un tanto nominal de descuento y coincide con la tasa efectiva de declaración de siniestros, en el caso de periodos unitarios. La forma más sencilla de introducir la incertidumbre en este caso es substituir la tasa nominal de declaración de siniestros por un proceso estocástico discreto donde las variables que lo integran se definen como variables aleatorias dicotómicas independientes e idénticamente distribuidas para cada uno de los periodos considerados. De este modo, en cada uno de los periodos considerados, la tasa puede tomar dos valores con una probabilidad determinada. Operando bajo estas hipótesis resulta evidente que, transcurridos *t* periodos desde el momento en el que se produce la catástrofe, podemos definir la variable aleatoria binomial $B(t, q)$ indicativa del número de veces, *j*, en que la tasa de declaración de siniestros toma su mayor valor en los *t* periodos considerados. Nos encontramos así con un esquema binomial similar al utilizado en la teoría clásica de las opciones (Cox, Ross y Rubinstein (1979)). Finalmente, definimos la variable aleatoria tasa nominal de declaración de siniestros como la convolución de las variables aleatorias dicotómicas tasa efectiva de declaración de siniestros por r-ésimo de periodo. Y sobre la base de estas tasas efectivas de declaración obtenemos la cuantía de siniestros pendiente de declarar por r-ésimo de periodo.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aase, K. (1999). *An Equilibrium Model of Catastrophe Insurance Futures and Spreads. Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 24(1), 69-96.

Aase, K. (2001). *A Markov Model for the Pricing of Catastrophe Insurance Futures and Spreads*. Journal of Risk and Insurance, 68(1), 25-50.

Alegre, A., Pérez-Fructuoso, M. J., y Devolder, P. (2003). *Modèles discrets d'options sur risques catastrophiques.* Belgian Actuarial Bulletin, 3(1), 28-32.

Baryshnikov, Y., Mayo, A. y Taylor, D.R. (2001). *Pricing of Cat Bonds,* Working Paper, Version October. Disponible en: https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.202.9296&rep=rep1&type=pdf

Biagini, F., Bregman, Y. y Meyer-Brandis, T. (2008). *Pricing of catastrophe insurance options written on a loss index with reestimation*. Insurance: Mathematics and Economics, 43(2), 214-222.

Braun, A. (2011). *Pricing catastrophe swaps: A contingent claims approach. Insurance: Mathematics and Economics*, 49(3), 520-536.

Burnecki, K. (2005). *Pricing catastrophe bonds in a compound non-homogeneous Poisson model with left truncated loss distributions.* Presentation Wroclaw University of Technology. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/289106928_Pricing_of_Catastrophe_Bonds

Burnecki, K. y Kukla, G. (2003). *Pricing of zero-coupon and coupon cat bonds. Applicationes Mathematicae*, 30, 315- 324.

Cox, S. H. y Pedersen, H. (2000). *Catastrophe Risk Bonds.* North American Actuarial Journal, 4 (4), 56-82.

Cox, J., Ross, S. y Rubinstein, M. (1979). Option Pricing: a simplified approach. Journal of Financial Economics, 7, 229-263.

Cummins J. D. y Geman, H. (1995). *Pricing Catastrophe Insurance Futures and Call Spreads: An Arbitrage Approach. Journal of Fixed Income,* 4 (4), 46-57.

Chang, C.W., Chang, J.S.K. y Lu, W. (2010). *Pricing catastrophe options with stochastic claim arrival intensity in claim time*. Journal of Banking & Finance, 34 (1), 24-32.

Egami, M. y Young, V. (2008). Indifference prices of structured catastrophe (CAT) bonds. Insurance: Mathematics and Economics, 42(2), 771-778.

Embrechts, P. y Meister, S. (1997). "Pricing insurance derivatives, the case of CAT futures". En: *Proceedings of the 1995 Bowles Symposium on Securitization of Insurance Risk, Georgia State University*, Atlanta, Georgia. Society of Actuaries, Monograph M-FI97-1: 15-26.

Geman, H. y Yor, M. (1997). *Stochastic time changes in catastrophe option pricing. Insurance: Mathematics and Economics*, 21(3),185-193.

Jaimungal, S. y Wang, T. (2006). *Catastrophe options with stochastic interest rates and compound Poisson losses*. Insurance: Mathematics and Economics, 38(3), 469-483.

Jarrow, R.A. (2010). *A simple robust model for Cat bond valuation*. Finance Research Letters, 7, 72-79

Lai, V. S., Parcollet, M. y Lamond, B. F. (2014). *The valuation of catastrophe bonds with exposure to currency exchange risk. International Review of Financial Analysis*, 33(C), 243-252.

Lee, J. P. y Yu, M. T. (2002). *Pricing default-risky Cat bonds with moral hazard and basis risk.* Journal of Risk and Insurance, 69 (1), 25-44.

Lee, J. P. y Yu, M. T. (2007). *Valuation of catastrophe reinsurance with catastrophe bonds,* Insurance: Mathematics and Economics, 41 (2), 264-278.

Loubergé, H., Kellezi, E. y Gilli, M. (1999. *Using Catastrophe-Linked Securities to Diversify Insurance Risk: A Financial Analysis of Cat Bonds.* Journal of Insurance Issues, 22 (2), 125-146.

Muermann, A. (2003). *Actuarially Consistent Valuation of Catastrophe Derivatives.* Working Paper Series The Wharton Financial Institutions Center, 03-18, 2003. Disponible en: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.387.1798&rep=rep1&type=pdf

Nowak, P. y Romaniuk, M. (2013). *Princing and simulations of catastrophe Bonds.* Insurance: Mathematics and Economics, 52(1), 18-28.

Pérez-Fructuoso, M. J. (2005). *La titulizaciónn del riesgo catastrófico: descripción y análisis de los cat bonds* (Bonos de Catástrofes). Revista Española de Seguros, 121, 75-92.

Pérez-Fructuoso, M. J. (2008). *Modelling loss index triggers for CAT bonds: a continuous approach. Variance,* 2(2), 253-265.

Pérez-Fructuoso, M. J. (2009). *Elaborating a catastrophic loss index for insurance-linked securities (ILS): A continuous model.* Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance, 3(2), 1-13.

Pérez-Fructuoso, M. J. (2016a). *Tarificación de derivados sobre catástrofes con desencadenantes de índices de pérdidas: modelo asintótico basado en un proceso de Wiener.* Rect@, 17(1), 81-103.

PÉREZ-FRUCTUOSO, M. J. (2016b). *Modelo discreto cierto (y simple) para determinar una ratio de pérdidas por catástrofes subyacente de los derivados sobre seguros (insurance-linked derivatives, OLS).* Revista Ibero-Latinoamericana de Seguros, 44, 185-205. http://dx.doi.org/10. 11144/Javeriana.ris44.mdcd

PÉREZ-FRUCTUOSO, M. J. (2017). *Tarificación de bonos sobre catástrofes (cat bonds) con desencadenantes de índices de pérdidas. Modelización mediante un proceso de Ornstein-Uhlenbeck.* Revista de métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa, 24, 340-361.

POLACEK, A. (2018). *Catastrophe bonds: A primer and retrospective. [online] Chicago Fed Leeter, The Federal Reserve Bank of Chicago.* Disponible en: https:// https://www.chicagofed.org/publications/chicago-fed-letter/2018/405

SHAO, J., PANTELOUS, A., PAPAIOANNOU, A. D. (2015). *Catastrophe risk bonds with applications to earthquakes.* European Actuarial Journal, 5: 113-138

UNGER, A.J.A. (2010). *Pricing index-based catastrophe bonds: Part 1. Formulation and discretization issues using a numerical PDE approach.* Computers & Geosciences, 36 (2), 139-149.

ZONG-GANG, M. y CHAO-QUN, M. (2013). *Princing catastrophe risk Bonds: a mixed approximation method.* Insurance: Mathematics and Economics, 52 (2), 243-254.

WANG, X. (2016). *Catastrophe equity put option with target variance.* Insurance: Mathematics and Economics, 71(C), 79-86.