Modelo de programación lineal binaria para el balance de carga de trabajo en el problema de asignación de proyectos[1]

A Binary Linear Programming Model for Workload Balance in Scheduling[2]

Modelo de programação linear binária para equilibrar a carga de trabalho na questão da designação de projetos[3]

Saray Yurley Acuña-Parada[4]
Esteban Madiedo-Bautista[5]
Néstor Raúl Ortiz-Pimiento[6]

SICI: SICI: 0123-2126(201301)17:1<167:MPLBBC>2.0.TX;2-J

---

[1] Fecha de recepción: 7 de marzo de 2012. Fecha de aceptación: 11 de septiembre de 2012. Este artículo se deriva de un proyecto de investigación denominado *Modelo de programación lineal binaria para balance de carga de trabajo en el problema de asignación de proyectos,* desarrollado por el grupo de investigación OPALO (Grupo de Optimización y Organización de sistemas Productivos, Administrativos y Logísticos) de la Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

[2] Reception date: March 7th 2012. Admission date: September 11th 2012. This article originated from a research project titled *Modelo de programación lineal binaria para balance de carga de trabajo en el problema de asignación de proyectos,* carried out by the OPALO research group (Grupo de Optimización y Organización de sistemas Productivos, Administrativos y Logísticos) of the Universidad Industrial de Santander, in Bucaramanga, Colombia.

[3] Data de recepção: 7 de março de 2012. Data de aprovação: 11 de setembro de 2012. Este artigo origina-se de um projeto de pesquisa denominado *Modelo de programación lineal binaria para balance de carga de trabajo en el problema de asignación de proyectos* [*Modelo de programação linear binária para equilibrar a carga de trabalho na questão da designação de projetos*], desenvolvido pelo grupo de pesquisa OPALO (Grupo de Otimização e Organização de sistemas Produtivos, Administrativos e Logísticos) da Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colômbia.

[4] Ingeniero Industrial, Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia. Correo electrónico: saray15_60@hotmail.com.

[5] Ingeniero Industrial, Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia. Correo electrónico: estebanmadiedo@gmail.com.

[6] Ingeniero Industrial, Universidad Industrial de Santander. Director de Escuela de Estudios Industriales y Empresariales, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia. Correo electrónico: nortiz@uis.edu.co.

Resumen

Este artículo propone un nuevo modelo matemático para asignar proyectos a empleados. El problema consiste en encontrar una óptima asignación de proyectos que equilibre la carga de trabajo y evite problemas de insatisfacción y bajo desempeño, debido a sobrecarga o cambios bruscos de carga de trabajo. Se emplea una prueba de hipótesis basada en el experimento de Bernoulli normalizado, para comparar estadísticamente las asignaciones generadas por el modelo propuesto con los obtenidos por el modelo de Zhirong Liang, Songshan Guo, Yanzhi Li y Andrew Lim, en el cual se minimiza la diferencia entre la máxima y mínima carga de trabajo asignada. Como resultado se obtuvo que las asignaciones, producto de los dos modelos no coincide en el 90 % o más de las ocasiones. Además, se encontró que los valores de las funciones objetivo, hallados a partir de las soluciones arrojadas por el modelo existente, nunca fueron mejores que los obtenidos por el modelo propuesto.

Palabras clave

Problema de asignación, problema de balance de cargas, proyecto, asignación de proyectos, programación lineal entera binaria.

Abstract

This paper proposes a new mathematical model for the scheduling of employees. The problem consists in finding and optimal scheduling method that will balance the workload and avoid dissatisfaction and low performance problems, due to work overload or sudden changes in the workload. We will employ hypothesis testing based on the normalized Bernoulli trial, in order to do a statistical comparison between the tasks assigned by the proposed model with those assigned by the Zhirong Liang, Songshan Guo, Yanzhi Li and Andrew Lim model, which minimizes the difference between minimum and maximum workloads assigned. As a result we observed that the assignations generated by the models do not match in more than 90% of the cases. Furthermore, we found that the values of the object functions, which were gathered from solutions provided by the current model, were never better than those obtained by this paper proposes.

Keywords

Scheduling problem, workload balance problem, project, project assignation, binary linear programming.

Resumo

Este artigo propõe um novo modelo matemático para designar projetos a funcionários. A questão consiste em achar uma designação ótima de projetos que equilibre a carga de trabalho e evite problemas de insatisfação e baixo desempenho em função da sobrecarga de trabalho ou de mudanças intempestivas na carga de trabalho. Emprega-se um teste de hipóteses baseado no experimento de Bernoulli normalizado, para comparar estatisticamente designações geradas pelo modelo proposto com resultados obtidos a partir do modelo de Zhirong Liang, Songshan Guo, Yanzhi Li y Andrew Lim, no qual a diferença entre a máxima e a mínima carga de trabalho designada é minimizada. Obteve-se como resultado que as designações, produto dos dois modelos, não coincidiram em 90% ou mais. Além disso, verificou-se que os valores das funções objetivo, determinados a partir das soluções proporcionadas pelo modelo existente, em nenhum momento foram melhores que as soluções obtidas mediante o modelo proposto.

Palavras chave

Problema de designação, problema de equilíbrio de cargas, projeto, designação de projetos, programação linear inteira binária.

Introducción

En la actualidad, la gestión de proyectos es parte vital en las organizaciones e, incluso, es un factor relevante en las decisiones estratégicas de la alta gerencia, ya sea porque el modelo de negocio de la organización es vender y ejecutar proyectos para sus clientes (como pasa en las empresas de consultoría, desarrollo de *software*, producción audiovisual, agencias de publicidad o de ingeniería) o porque la compañía está buscando asegurar su futuro trabajando en proyectos de innovación de sus productos, procesos o sistemas. De igual forma, en cualquiera de las dos situaciones existen proyectos que los empleados asignan y ejecutan, y los cuales la administración debe gestionar de tal forma que se obtenga un producto de calidad (un *software*, publicidad, nuevo artículo, entre otros) sin exceder los recursos de personal, tiempo y dinero atribuidos.

Por este motivo, las empresas buscan la forma de optimizar sus procesos de ejecución y administración de proyectos, con el objetivo de obtener mejores resultados que satisfagan las expectativas del cliente, ya sea interno o externo, y de cumplir el tiempo y presupuesto planeado. Así, en esta búsqueda es donde aparece el problema balance de carga en la asignación de proyectos.

El problema de asignación de proyectos a empleados no ha sido tratado ampliamente en la literatura. Apareció por primera vez en (Liang *et al*., 2009), donde se planteó como respuesta al problema de asignación de proyectos para el diseño y elaboración de nuevos y modificados juguetes. Esto surgió en el departamento de investigación y desarrollo (I+D) de una fábrica de juguetes de origen estadounidense con maquilas en China. A pesar de los pocos referentes que existen sobre este problema, se debe resaltar la relación que tiene con el modelo de asignación clásico y tres de sus variantes o adaptaciones (el problema de asignación generalizado, el problema de asignación balanceada y el problema de asignación en un horizonte de tiempo).

La primera variante del modelo de asignación clásico, relacionada con la investigación, es el problema de asignación generalizada (GAP) (Ross y Soland, 1975), que considera un número *m* de agentes, que pueden ser máquinas o trabajadores, frente a una cantidad mayor de *n* tareas, las cuales consumen la capacidad de los agentes. La segunda adaptación que guarda relación es el problema de asignación balanceada (Martello *et al*., 1984) que tiene como objetivo encontrar la asignación que reduzca al mínimo la diferencia entre los valores máximos y mínimos de carga asignada. El tercer tipo de estudios relevante es la asignación en un horizonte de tiempo, que considera un problema de asignación de carga de trabajo de tiempo variante.

En la actualidad existe una cantidad limitada de referencias bibliográficas acerca del tema tratado en la investigación, puesto que este se estudió por primera vez en el 2009. Ello muestra la importancia del trabajo desarrollado y su aporte a la comunidad, ya que en este se propone un nuevo modelo matemático para el balance de carga de trabajo en el problema de asignación de proyectos que, de acuerdo con lo obtenido durante el desarrollo de la investigación, genera mejores resultados al balancear las cargas entre los recursos en un grupo de proyectos.

Una razón importante para el desarrollo de la investigación fue llevar a la programación lineal entera el problema de balanceo de carga de trabajo en la asignación de proyectos para obtener, de esta manera, soluciones óptimas, que al ser aplicadas en casos reales permite que dentro de las organizaciones se realice de manera eficaz la designación de actividades y tareas y, a la vez, se eliminen sobrecargas o tiempos ociosos en los recursos empleados.

El presente artículo inicia con una breve revisión de la antecedentes sobre el problema de asignación de proyectos y temas relacionados; posteriormente se presenta la metodología empleada para el desarrollo de la investigación, dando a conocer la formulación del modelo propuesto por la investigación y el modelo con el cual se realiza la comparación; después se muestran los resultados obtenidos, y, finalmente, aparecen las conclusiones más importantes derivadas de esta investigación.

1. Antecedentes

El problema de asignación de proyectos planteado en este artículo es una modificación del problema de asignación clásico, cuya versión original se trata en casi todos los libros de texto para un curso de introducción a la ciencia, ya sea de gestión o la investigación de operaciones o de producción. Como se describe generalmente, el problema consiste en encontrar una correspondencia uno con uno entre las *n* tareas y los *m* agentes, con el objetivo de minimizar el costo total de las asignaciones. Este problema es común en situaciones como la asignación de máquinas a los puestos de trabajo, de trabajadores a los puestos de trabajo y de trabajadores a las máquinas. Este problema tiene una suposición explícita, la cual indica que a cada agente se le asigna un trabajo y cada trabajo utiliza exactamente una persona o máquina. En Pentico (2007) se describen de manera superficial las principales variantes del problema de asignación clásico.

Hay tres casos particulares del problema de asignación clásico que se relacionan especialmente con el problema propuesto en este artículo:

El primer caso se conoce como el GAP, estudiado en diversos artículos, entre los cuales se destaca (Díaz y Fernández, 2001), donde plantean dos formas diferentes de resolver el problema. La primera propone una clase de algoritmos ávidos (algoritmo que sigue una metaheurística para encontrar óptimos locales y al final obtener un óptimo general) para un análisis probabilístico de la función de valor óptimo, y la segunda propone una búsqueda tabú heurística.

El GAP es un problema de asignación de máximo beneficio de las n tareas a m agentes. Estos agentes pueden ser máquinas o trabajadores ($n > m$), de modo que cada tarea se asigna a un solo agente sujeto a limitaciones de capacidad de los agentes. El problema de asignación del presente trabajo es diferente a GAP en dos aspectos: en primer lugar, los proyectos tienen una configuración de duración en un periodo de largo plazo, y la carga de trabajo requerida varía con el tiempo, y en segundo lugar, su objetivo consiste en equilibrar la carga de trabajo entre los empleados, en lugar de reducir al mínimo el costo.

El segundo caso se relaciona con los problemas de asignación donde se considera el equilibrio de carga en el marco del problema de asignación clásico. En (Martello *et al.*, 1984) se estudia el problema de balanceo de carga entre los agentes, con el objetivo de reducir al mínimo la diferencia entre la máxima y mínima carga de trabajo de los agentes individuales. Se emplea un algoritmo en el cual se demuestra que si el algoritmo responde de manera eficiente a los problemas de viabilidad, entonces de igual manera puede resolver el problema de optimización.

Una aplicación concreta de este segundo caso (Larusic y Pinnen, 2011) presenta el problema de equilibrio del vendedor ambulante utilizando el modelo de distribución equitativa de los recursos planteado originalmente por Martello *et al.* (1984). Aquí se formula la optimización del balance de carga a través de alternativas factibles que minimicen el rango de la dispersión medido entre las actividades. En este trabajo se compara la eficiencia de un algoritmo heurístico y un algoritmo matemático propio de los autores.

El tercer caso de problemas de asignación es la asignación en un horizonte de tiempo (Topaloglu y Ozkarahan, 2011), donde consideran un problema de asignación de carga de trabajo de tiempo variante; sin embargo, solo contemplan una tarea que será realizada en un horario específico (un único periodo), en que se busca que no haya asignaciones de turnos consecutivos.

Existe variedad de aplicaciones de este tipo de problemas en casos muy específicos, pero la que mejor se relaciona con el problema propuesto en este trabajo de investigación es la asignación de turnos a los residentes de medicina (Franz y Miller, 1993), pues se propone un horizonte de planeación de doce meses.

Finalmente, se encuentra el problema de balance de carga de trabajo de empleados en asignación de proyectos, el cual está descrito en (Liang *et al.*, 2009). En ese artículo se estudia el problema de asignar un conjunto de proyectos, cada uno de los cuales tiene que estar terminado en un ciclo de desarrollo del proyecto, a un grupo de ingenieros idénticos en un horizonte de planificación discreto. El objetivo del problema consiste en asignar los proyectos a los ingenieros con el propósito de equilibrar la carga de trabajo total entre ellos. La carga total de trabajo se considera equilibrada si la diferencia entre el máximo y el mínimo volumen de trabajo total de todos los ingenieros se reduce al mínimo. Para resolver este problema los autores proponen un planteamiento en dos etapas heurísticas; así, es un enfoque totalmente diferente al planteado en este artículo, ya que aquí se parte de un modelo de programación lineal entera binaria que busca equilibrar la carga total de trabajo, minimizando la sumatoria de los cuadrados de las diferencias entre las cargas individuales y la carga promedio.

2. Metodología

Para el desarrollo de la investigación se planteó un procedimiento lógico, con el fin de alcanzar el objetivo que regía. En primera instancia, se formuló el modelo matemático para el problema de balance de carga durante la asignación de proyectos, luego se programó en el Sistema General de Modelaje Algebraico (GAMS) tanto el modelo matemático propuesto en este artículo como el modelo propuesto en (Liang *et al.*, 2009). Posteriormente se generaron 150 carteras de proyectos (casos de estudio) para evaluar el modelo matemático propuesto; este valor fue determinado a partir de los resultados de la normalización del problema según lo exigido para el uso del experimento de Bernoulli como factor determinante en la prueba de hipótesis (la normalización se realizó con lo obtenido de una premuestra). Finalmente, se compararon estadísticamente los resultados obtenidos con ambos modelos.

2.1. Formulación matemática del modelo matemático propuesto

El problema de balance de carga de trabajo de empleados en una asignación de proyectos consiste en que una empresa que tiene P proyectos debe asignarlos entre M empleados, pero el número de empleados es menor que la cantidad de proyectos, y estos, a su vez, deben desarrollarse en un horizonte de planificación discreto de T periodos. La carga de trabajo que exige cada proyecto es diferente en tiempo y cantidad de periodos. Además, se tiene como condición del problema que cada empleado tiene las competencias necesarias para trabajar en cualquier proyecto sin afectar el tiempo, la calidad o los recursos económicos empleados para su desarrollo. Adicionalmente, una vez asignado un proyecto, no podrá cedérselo a otro empleado. Para garantizar la calidad y evitar la insatisfacción laboral de los empleados, se establece un límite para la carga de trabajo de un empleado en cada periodo.

El objetivo del modelo propuesto consiste en asignar los proyectos a los empleados, con el propósito de equilibrar la carga de trabajo total entre ellos. El balance de carga se medirá por medio de la sumatoria de los cuadrados de las diferencias entre las cargas individuales y la carga promedio. La formulación matemática se encuentra en (Acuña y Madiedo, 2012), y es la siguiente:

Notación:

t: índice para periodos, $t = 1, \ldots, T$

i: índice para empleados, $i = 1, \ldots, M$

k: índice para proyectos, $k = 1, \ldots, P$

c_{kt}: carga de trabajo del proyecto k en el periodo t.

C: máxima carga de trabajo permitida en cualquier periodo t para cualquier empleado i, el cual, en este caso, es igual a 48 horas (el número de horas permitido por ley para una semana de trabajo).

Variable de decisión:

X_{ik}: elección de asignación.

$$x_{ik} : \left\{ \begin{matrix} 1 \text{ si el proyecto } k \text{ es asignado al empleado } i \\ 0 \text{ de otro modo} \end{matrix} \right\}$$

c_i: carga de trabajo total asignada al empleado i. Es igual a la sumatoria de la carga de trabajo durante todos los periodos t, del total proyectos k asignados al empleado i.

$$Min \sum_{i}^{M} \left(c_i - \overline{c}\right)^2 \tag{1}$$

$$\text{s.a. } \sum_{i=1}^{M} x_{ik} = 1, k = 1,\ldots,P \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{P} c_{kt} x_{ik} \leq C, i = 1,\ldots,M; t = 1,\ldots,T \tag{3}$$

$$x_{ik} \in \{0,1\} \tag{4}$$

Parámetro:

$\overline{c}$: Promedio del total de cargas de trabajo individuales asignadas. Es igual a carga total de los proyectos que se van a asignar (sumatoria de las cargas de todos los proyectos *k* en todo los periodos *t*), dividida entre el total de empleados *M*. Este dato es independiente a la asignación que resulte; es un dato de entrada del modelo.

$$\left(\overline{c} = \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{p} c_{kt} / M \right)$$

La función objetivo busca acercar la carga total de cada empleado a la carga promedio ideal, de forma que entre menor sea la diferencia entre ellas, todas las cargas asignadas se parecerán más a la carga promedio ideal; por lo tanto, serán similares unas con otras, balanceando las cargas. La ecuación (2) hace referencia a que un proyecto no puede ser asignado a más de un empleado. La ecuación (3) se refiere a que el total de las cargas de trabajo de los proyectos asignados a un empleado *i* durante cualquier periodo *t* no puede superar la carga de trabajo máxima permitida, *C*.

2.2. Desarrollo de los casos de estudio

Un caso de estudio corresponde a una cartera de proyectos que la empresa debe distribuir entre sus empleados. Para probar el modelo propuesto, se crearon aleatoriamente 150 casos de estudio, cada uno de ellos con características diferentes en cuanto a los siguientes parámetros:

- El número de proyectos, *k*, que contiene una cartera específica fue hallado a partir de una distribución de probabilidad uniforme discreta entre 8 y 12.
- La cantidad de etapas, *t*, que tendrá cada uno de los proyectos que conformarán las distintas carteras se fijaron por medio de una distribución de probabilidad uniforme discreta entre 5 y 10.
- El número de empleados, *i*, disponibles para asignar los proyectos se fijó por medio de una distribución de probabilidad uniforme discreta entre 3 y 5.

- La carga de trabajo de cada proyecto en los diferentes periodos, *c* (*k*, *t*), la cual está asociada a los tiempos que este requiere en cada fase.

2.3. Comparación de las soluciones obtenidas al resolver el problema mediante dos modelos matemáticos diferentes

Para analizar la efectividad del modelo matemático propuesto en este artículo se decidió emplearlo para resolver cada uno de los 150 casos diseñados. Posteriormente, se compararon sus soluciones con las soluciones obtenidas por un modelo ya existente en la literatura (Liang *et al*., 2009). La formulación matemática del modelo existente es la siguiente:

Notación:
t: índice para periodos, $t = 1, \dots, T$
i: índice para empleados, $i = 1, ..., M$
k: índice para proyectos, $k = 1, \dots, P$
c_{kt}: carga de trabajo del proyecto k en el periodo t.
C: máxima carga de trabajo permitida en cualquier periodo t para cualquier empleado i, el cual en este caso es igual a 48 horas (el número de horas permitido por ley para una semana de trabajo).

Variable de decisión:
U: máxima carga de trabajo total de todos los ingenieros en el horizonte de planeación.
L: Mínima carga de trabajo total de todos los ingenieros en el horizonte de planeación.
X_{ik}: elección de asignación. Es 1 si el proyecto k es asignado al ingeniero i.

$$\text{Min } U - L \tag{1}$$

$$\text{s.a. } \sum_{i=1}^{M} x_{ik} = 1, k = 1, \cdots, P \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{P} c_{kt} x_{ik} \le C, i = 1, \cdots, M; \quad t = 1, \cdots, T \tag{3}$$

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{p} c_{kt} x_{ik} \le U, \quad i = 1, \cdots, M \tag{4}$$

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{p} c_{kt} x_{ik} \ge L, \quad i = 1, \cdots, M \tag{5}$$

$$U, L \geq 0, \quad x_{ik} \in \{0,1\} \tag{6}$$

Se puede ver que la ecuación (2) asegura que un proyecto se asigne a uno y solo un ingeniero. La ecuación (3) asegura que la carga de trabajo del periodo de todos los ingenieros sea acotada superiormente. Las ecuaciones (4) y (5) se utilizan para definir el máximo y el mínimo total de carga de trabajo, debido a la función objetivo; U y L serán exactamente iguales al máximo y mínimo de carga total de trabajo.

Para comparar los modelos matemáticos se empleó una prueba de hipótesis basada en un experimento de Bernoulli normalizado, teniendo en cuenta los criterios que permiten normalizar la muestra y el experimento (Mateus *et al.*, 2006). En este experimento se evaluaron las soluciones obtenidas por cada uno de los modelos matemáticos, para cada caso de estudio. El experimento evaluó si las respuestas obtenidas por ambos modelos, para cada uno de los casos de estudio, eran siempre las mismas. Esa cantidad de coincidencias fue expresada en términos porcentuales y su valor se denominó p. La prueba de hipótesis indicaba lo siguiente:

H_0: $P_0 = 100\,\%$

H_1: $P_0 \neq 100\,\%$

Para establecer el valor de P se agruparon los 150 casos de estudio en 30 unidades muéstrales (m) que contenían cinco casos cada una. Finalmente, con los 30 valores de p, se halló P de la siguiente manera:

$$P = \frac{\Sigma p}{m}$$

La regla de decisión indicaba que se rechazaba la hipótesis a un nivel de confianza del 95 % si el valor de P no coincidía con los valores críticos correspondientes.

3. Resultados

Los resultados numéricos de las asignaciones generadas por ambos modelos matemáticos se pueden encontrar en http://balancedecargaaempleados.blogspot.com/2012/01/anexo-6-resultados-numericos-de-las.html, y con ello se determinaron los valores de P, tal como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Determinación de los valores *P* y *Q* de las unidades

Unidad muestral	Σp	Σq	P	Q
1	2	3	0,4	0,6
2	3	2	0,6	0,4
3	1	4	0,2	0,8
4	4	1	0,8	0,2
5	5	0	1,0	0,0
6	3	2	0,6	0,4
7	4	1	0,8	0,2
8	2	3	0,4	0,6
9	5	0	1,0	0,0
10	2	3	0,4	0,6
11	3	2	0,6	0,4
12	5	0	1,0	0,0
13	2	3	0,4	0,6
14	3	2	0,6	0,4
15	1	4	0,2	0,8
16	4	1	0,8	0,2
17	2	3	0,4	0,6
18	3	2	0,6	0,4
19	1	4	0,2	0,8
20	4	1	0,8	0,2
21	2	3	0,4	0,6
22	4	1	0,8	0,2
23	3	2	0,6	0,4
24	4	1	0,8	0,2
25	5	0	1,0	0,0
26	3	2	0,6	0,4
27	3	2	0,6	0,4
28	4	1	0,8	0,2
29	3	2	0,6	0,4
30	4	1	0,8	0,2

Fuente: presentación propia de los autores.

$$P = \frac{\Sigma p}{n} = 0,627$$

Posteriormente se calcularon los valores críticos para el experimento con un nivel de confianza del 95 %. Los valores críticos inferior y superior correspondían al 100 %. Teniendo en cuenta que P no corresponde exactamente al 100 %, se rechaza la hipótesis, lo cual quiere decir que no siempre los resultados obtenidos por ambos modelos son iguales.

Al comparar las asignaciones obtenidas a partir de los dos modelos se encontraron tres posibles resultados: el primero posible fue cuando las asignaciones de ambos modelos eran iguales; esto se ocurrió un 63 % de las veces. El segundo resultado posible fue cuando los dos modelos asignaron grupos de proyectos diferentes a cada ingeniero, pero la carga de trabajo era la misma; esta situación se presentó el 28,67 % de las veces. El último resultado posible indicaba que las asignaciones fueron diferentes, situación apareció el 8,33 % de las veces. En la tabla 2 se refleja el comportamiento en igual agrupación de proyectos.

Tabla 2. Corrida 2 de los $n \times m$ casos: ejemplo de caso de igual agrupación de proyectos

Corrida	Modelo planteado en el proyecto		Modelo existente	
	Asignación	Carga total asignada	Asignación	Carga total asignada
2	1,2	140	1,2	140
	1,6		1,6	
	2,1	143	2,1	143
	2,8		2,8	
	3,7	93	3,3	85
	4,4	132	4,7	93
	4,5		5,4	132
	5,3	85	5,5	
	U-L	58	U-L	58
	S(cp-ci)^2	3017,2	S(cp-ci)^2	3017,2

Fuente: presentación propia de los autores.

En la tabla 3 se presenta la diferente agrupación proyectos, pero igual carga de trabajo total asignado a cada ingeniero. Para diferente agrupación de proyectos, igual diferencia entre la máxima y mínima carga, pero mejor resultado de $\sum_i^M \left(c_i - \overline{c}\right)^2$ por parte de modelo planteado en este proyecto se presenta la tabla 4.

Tabla 3. Corrida 1 de los $n \times m$ casos: ejemplo de caso de diferente agrupación de proyectos, pero igual carga de trabajo total asignado a cada ingeniero

Corrida	Modelo planteado en el proyecto		Modelo existente	
	Asignación	Carga total asignada	Asignación	Carga total asignada
1	1,3	235	1,3	235
	1,4		1,4	
	1,7		1,9	
	1,1		1,1	
	2,5	232	2,1	233
	2,8		2,2	
	2,9		2,6	
	3,1	233	3,5	232
	3,2		3,7	
	3,6		3,8	
	U-L	3	**U-L**	3
	S(cp-ci)^2	4,66	S(cp-ci)^2	4,66

Fuente: presentación propia de los autores.

Tabla 4. Corrida 7 de los $n \times m$ casos: ejemplo de caso de diferente agrupación de proyectos, igual diferencia entre la máxima y mínima carga, pero mejor resultado de $\sum_i^M \left(c_i - \overline{c}\right)^2$ por parte de modelo planteado en este proyecto

Corrida	Modelo planteado en el proyecto		Modelo existente	
	Asignación	Carga total asignada	Asignación	Carga total asignada
7	1,2	230	1,2	230
	1,4		1,4	
	1,5		1,5	
	2,7	219	2,6	222
	2,9		2,9	
	2,11		2,11	
	3,8	215	3,1	218
	3,1		3,3	
	3,12		3,7	
	4,1	221	4,8	215
	4,3		4,1	
	4,6		4,12	
	U-L	**15**	**U-L**	**15**
	S(cp-ci)^2	**120,75**	**S(cp-ci)^2**	**126,75**

Fuente: presentación propia de los autores.

Conclusiones

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos de la prueba de hipótesis realizada, se determinó que el porcentaje de coincidencias, *P*, de los resultados obtenidos por ambos modelos matemáticos, para un mismo problema, es diferente del 100 %; en otras palabras, los dos modelos no siempre realizan asignaciones iguales.

Se encontró que el tiempo de respuesta del modelo existente en la literatura (Liang *et al.*, 2009) es menor al modelo propuesto en el 100 % de los casos estudiados. Sin embargo, el modelo propuesto en el artículo distribuye de mejor manera las cargas entre los empleados, es decir, un mejor valor de la función objetivo, que el modelo existente en la literatura (Liang *et al.*, 2009). Ello sugiere que el modelo propuesto es más apropiado que el modelo existente en la designación balanceada de cargas de trabajo en el problema de asignación de proyectos.

El modelo planteado puede aplicarse en aquellas organizaciones en las cuales su modelo de negocios es vender y ejecutar proyectos para sus clientes (como las empresas de consultoría, desarrollo de *software*, producción audiovisual, agencias de publicidad o de ingeniería), o porque la compañía está buscando asegurar su futuro trabajando en proyectos de innovación de sus productos, procesos o sistemas, teniendo en cuenta la restricción en la cual los proyectos deben establecerse al principio del horizonte del tiempo.

Referencias

ACUÑA, S. Y. y MADIEDO, E. *Balance de carga de trabajo de empleados en asignación de proyectos*. Trabajo de grado Ingeniería Industrial. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, 2012.

DÍAZ, J. A. y FERNÁNDEZ, E. A tabu seach heuristic for the generalized assignment problem. *European Journal of Operational Research*. 2001, vol. 132, pp. 22-38.

FRANZ, L. S. y MILLER, J. L. Scheduling medical residents to rotations: Solving the large-scale multiperiod staff assignment problem. *Operations Research*. 1993, vol. 41, núm. 2, pp. 269-279.

LARUSIC, J. y PINNEN, A. P. The balanced traveling salesman problem. *Computers & Operations Research*. 2011, vol. 38, pp. 868-875.

LIANG, Z.; GUO, S.; LI, Y. y LIM, A. Balancing workload in project assignment. *Advances in Artificial Intelligence.* 2009, vol. 5866, pp. 91-100.

MARTELLO, S.; PULLEYBLANK, W. R.; TOTH, P. y DE WERRA, D. Balanced optimization problems. *Operations Research Letters*. 1984, vol. 3 núm. 5, pp. 275-278.

MATEUS MAHIQUES, J.; SIRVENT PRADES, R. y SAGASTA PELLICER, S. *Manual de control estadístico de calidad: teoría y aplicaciones*. Valencia: Universidad Jaume, 2006.

PENTICO, D. W. Assignment problems: A golden anniversary survey. *European Journal of Operational Research*. 2007, vol. 176, núm. 2, pp. 774-793.

PRAT BARTES, A.; TORT-MORTORELL LLABRÉS, X.; GRIMA CINTAS, P. y POZUETA FERNÁNDEZ, L. *Métodos estadísticos de control y mejora de la calidad*. México: Alfaomega, 2000.

ROSS, G. T. y SOLAND, R. M. A branch and bound algorithm for the generalized assignment problem. *Mathematical Programming*. 1975, pp. 91-103.

TOPALOGLU, S. y OZKARAHAN, I. A constraint programming-based solution approach for medical resident scheduling problems. *Computers & Operations Research*. 2011, vol. 38, pp. 246-255.