



Evaluación bayesiana de la incertidumbre en mediciones indirectas comparada con GUM y Monte Carlo^a

Bayesian Evaluation for Uncertainty of Indirect Measurements in Comparison with
GUM and Monte Carlo

Recibido: Diciembre 08, 2019 | Aceptado: Marzo 17, 2021 | Publicado: Julio 14, 2022

Juan Daniel Molina-Muñoz*

Centro de Investigación en Matemáticas CIMAT, Guanajuato, México

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8583-8889>

Luis Fernando Giraldo-Jaramillo

Instituto Tecnológico Metropolitano ITM, Medellín, Colombia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8539-6475>

Edilson Delgado-Trejos

Instituto Tecnológico Metropolitano ITM, Medellín, Colombia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4840-478X>

^a Reporte de caso

* Autor de correspondencia. Correo: juan.molina@cimat.mx

DOI: <https://doi.org/10.11144/javeriana.iued26.beui>

Como citar este artículo:

J. D. Molina-Muñoz, L.F. Giraldo-Jaramillo, E. Delgado-Trejos, "Evaluación bayesiana de la incertidumbre en mediciones indirectas comparada con GUM y Monte Carlo" Ing. Univ. vol. 26, 2022.
<https://doi.org/10.11144/Javeriana.iued26.beui>

Resumen

Objetivo: Proponer un procedimiento metodológico que sirva de guía para aplicar técnicas en la evaluación de la incertidumbre de medida, como son GUM, MMC y Bayes; además, de desarrollar una aplicación en un caso de estudio no trivial. **Materiales y métodos:** En el presente artículo, se proponen un conjunto de pasos que permiten validar la evaluación de incertidumbre de medida a partir de técnicas como GUM, MMC y Bayes; estas se aplicaron como estrategia para evaluar la incertidumbre de un proceso de medición indirecta, donde el experimento de pruebas consistió en determinar el nivel de un fluido a través de la medición de presión hidrostática que genera el fluido en estado estacionario sobre la base de un contenedor. Se compararon los resultados obtenidos con cada técnica. **Resultados y discusión:** se encontró que el uso de la GUM es válido en el fenómeno caso de estudio, sin embargo, los resultados obtenidos aplicando el enfoque Bayesiano y el MMC ofrecieron información complementaria de mucha utilidad, como es la función de densidad de probabilidad (FDP) del mensurando, que permitió una mejor descripción del fenómeno. Asimismo, las FDP a posteriori obtenidas con Bayes permitieron aproximar a valores más cercanos en torno de los verdaderos valores del mensurando, y los intervalos de los posibles valores fueron más amplios que los que ofrecieron el MMC y la GUM. **Conclusiones:** En el contexto del caso de estudio se tiene que el enfoque bayesiano presenta resultados más realistas que GUM y MMC; además de la ventaja conceptual que presenta Bayes, de la posibilidad de actualizar los resultados de la evaluación de incertidumbre ante la presencia de nueva evidencia.

Palabras clave:

Evaluación de incertidumbre, GUM, Método de Monte Carlo, Inferencia Bayesiana, Medición indirecta

Abstract

Objective: To propose a methodological procedure that serves as a guide for applying techniques in the measurement uncertainty evaluation, such as GUM, MMC, and Bayes; in addition, to develop an application in a non-trivial case study. **Materials and methods:** In this paper, a set of steps are proposed that allow validating the measurement uncertainty evaluation from techniques such as GUM, MMC, and Bayes; these were applied as a strategy to evaluate the uncertainty of an indirect measurement process that sought to determine the level of a fluid by measuring the hydrostatic pressure generated by it at rest on the bottom of a container. The results obtained with each technique were compared. **Results and discussion:** the use of the GUM was found to be valid for the case under study, and the results obtained by applying the Bayesian approach and the MC technique provided highly useful complementary information, such as the Probability Density Function (PDF) of the measurand, which enables a better description of the phenomenon. Likewise, the posterior PDF obtained with Bayes allowed us to approximate closer values around the true values of the measurand, and the ranges of the possible values were broader than those offered by the MMC and the GUM. **Conclusions:** In the context of the case under study, the Bayesian approach presents more realistic results than GUM and MMC; in addition to the conceptual advantage presented by Bayes, the possibility of updating the results of the uncertainty evaluation in the presence of new evidence.

Keywords: Uncertainty estimation, GUM, Monte Carlo method, Bayesian inference, indirect measurement

Introducción

La determinación del valor numérico de un mensurando puede realizarse de forma directa o indirecta. Para ambos casos, el resultado de dicha medición debe incluir el valor estimado de duda o incertidumbre, que según la guía para la expresión de la incertidumbre de medida (GUM), se define como: “el parámetro asociado al resultado de una medición, que caracteriza la dispersión de los valores que podrían ser razonablemente atribuidos al mensurando” [1]. Existen factores que inciden sobre la incertidumbre asociada con la medición que dependen del mensurando, del fenómeno físico involucrado, del protocolo de medición, de las características metrológicas de los equipos usados, entre otros. El propósito es cuantificar el aporte de cada factor seleccionado sobre el valor global de incertidumbre asociada al mensurando, incluyendo las posibles relaciones que puedan existir entre los mismos factores. La selección de la cantidad de factores y su influencia sobre el mensurando es responsabilidad del experto técnico, quien, por lo general, es una persona que desempeña funciones en el área de la instrumentación o la metrología.

Tradicionalmente, para estimar la incertidumbre de una medición se utiliza la GUM como procedimiento, sin embargo, existen situaciones en que no es recomendable hacer uso de esta guía, e.g., sistemas con no linealidades muy marcadas o cuando se evidencia que el comportamiento del sistema es complejo, e.g., se dificulta la predicción de la evolución dinámica futura [2]. También hay inconvenientes cuando la distribución de probabilidad de la magnitud de salida no es de tipo normal o de fácil aproximación a dicha distribución [3]. Bajo estas condiciones, se recomienda utilizar el Método de Monte Carlo (MMC), basado en el concepto de propagación de distribuciones [4]. El MMC asigna a cada una de las magnitudes de entrada una función de densidad de probabilidad (FDP), y a partir de muestreo aleatorio, se generan múltiples valores de estas magnitudes que se insertan en el modelo, lo que genera observaciones de la magnitud de salida [5]. A partir de dichas observaciones, se construye la FDP de la magnitud de salida, de la cual se extrae la evaluación de la incertidumbre [6]. En [7], se evalúa la incertidumbre de medición del volumen de agua que entrega un recipiente volumétrico con GUM y MMC, y se evidencia que el límite de cobertura de la GUM resultó ser ligeramente más amplio que el del MMC para el mismo nivel de confianza. Con estas dos técnicas se han logrado resultados muy similares [8], aunque se percibe una fuerte dependencia de la naturaleza estadística de las mediciones en la serie de tiempo [9].

Alternativamente, la incertidumbre de medición puede evaluarse con un enfoque Bayesiano [10], el cual se considera más natural y adecuado para este fin [11]. Esto significa que a los parámetros asociados con las magnitudes de entrada se les asigna una FDP que se define

como a priori, la cual puede estar basada en conocimientos de expertos del fenómeno, o usando tendencias de la literatura en cuanto al fenómeno [12], o con base en datos previos disponibles [13]. Las FDP a priori también pueden elegirse no informativas, si no se tiene mucha información previa sobre la magnitud de entrada, lo que busca mayor objetividad [14]. A partir del teorema de Bayes, las FDP a priori se combinan con datos obtenidos vía experimentación, generándose distribuciones a posteriori para cada uno de los parámetros asociados con las magnitudes de entrada. Con base en el modelo que relaciona las magnitudes de entrada con la magnitud de salida y de las FDP a posteriori para las magnitudes de entrada se obtiene la FDP a posteriori del mensurando, utilizada para realizar la evaluación de la incertidumbre de la medida [15].

En [16] se reportan beneficios del enfoque bayesiano respecto de la GUM, en cuanto al intervalo y la probabilidad de cobertura. Así, también, sin información previa o deficiente, el enfoque bayesiano funciona bien, mientras la GUM puede conducir a dificultades insidiosas [17] [18]. En general, cuando no existan cantidades de entrada dominantes con incertidumbre tipo A y bajo número de repeticiones, los resultados con MMC, GUM, o su modificación bayesiana, llegan a ser muy similares. En el caso opuesto, la GUM da incertidumbres ampliadas subestimadas (hasta un 20-25%), respecto a los otros dos enfoques [19]. A pesar de que los modelos estadísticos y de inferencia, como son [20]: regresión por cópula probabilística, kriging bayesiano, modelos combinados de regresión y agrupaciones lineales y logarítmicas, proporcionan la maquinaria técnica necesaria para evaluar y propagar la medición de la incertidumbre, la verificación de las bondades del enfoque bayesiano para estimar la incertidumbre en mediciones indirectas puede conducir a nuevos análisis cuando la posibilidad de actualizar la distribución de los datos es aprovechable, si se cuenta con información nueva.

En este artículo se analizan las ventajas que implica el uso del enfoque Bayesiano para la evaluación de incertidumbre de medida, tomando en cuenta que después de desarrollar un estudio sobre un determinado fenómeno, las distribuciones a posteriori obtenidas en dicho estudio referentes a las magnitudes de entrada pueden tomarse como a priori de las mismas en un estudio futuro, sobre el cual se pueden realizar nuevas mediciones experimentales. Adicionalmente, se discute sobre la posibilidad de lograr nuevas FDP a posteriori más refinadas y cada vez más ajustadas a la realidad del fenómeno, lo cual permitiría una mejor evaluación de la incertidumbre, dado que los resultados obtenidos por medio del enfoque Bayesiano pueden actualizarse continuamente a través del ingreso de nuevas evidencias [21].

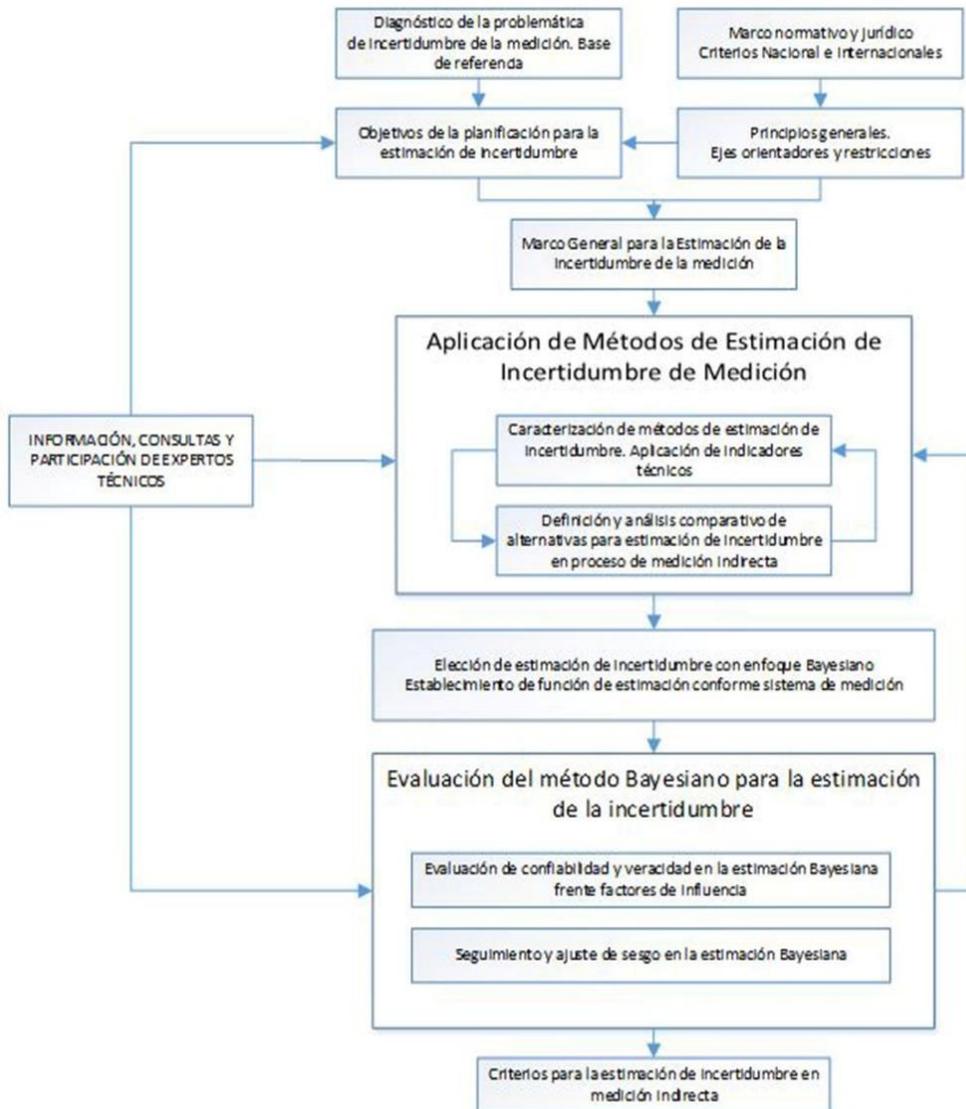
Materiales y métodos

Esquema metodológico propuesto

La selección del método bayesiano para la estimación de incertidumbre en un proceso de medición indirecta debe estar delimitada por elementos que permitan dar confirmación a la aplicación del método. Esta confirmación debe relacionar criterios para asegurar la veracidad y repetibilidad en los resultados de medición. Los criterios resultan del producto tanto de la comparación entre la normativa vigente, como del análisis realizado por expertos técnicos. En esta sección, se establece el marco general para la estimación de incertidumbre y se presenta la caracterización y análisis de los métodos de estimación de incertidumbre, conforme la confiabilidad esperada para un sistema de medición indirecta. Aquí, la competencia de los expertos soporta la validación de la eficacia de los criterios técnicos en el momento de propagar la confiabilidad de los resultados obtenidos por la metodología Bayesiana.

En la Figura 1, se expone el esquema metodológico propuesto para la determinación de los criterios que delimitan el proceso de estimación de la incertidumbre. En este esquema, se relacionan los principales elementos de estimación y sus relaciones respecto el flujo de información en el proceso de estimación de la incertidumbre y selección del método de Bayes.

Figura 1. Esquema metodológico propuesto para la selección del método bayesiano



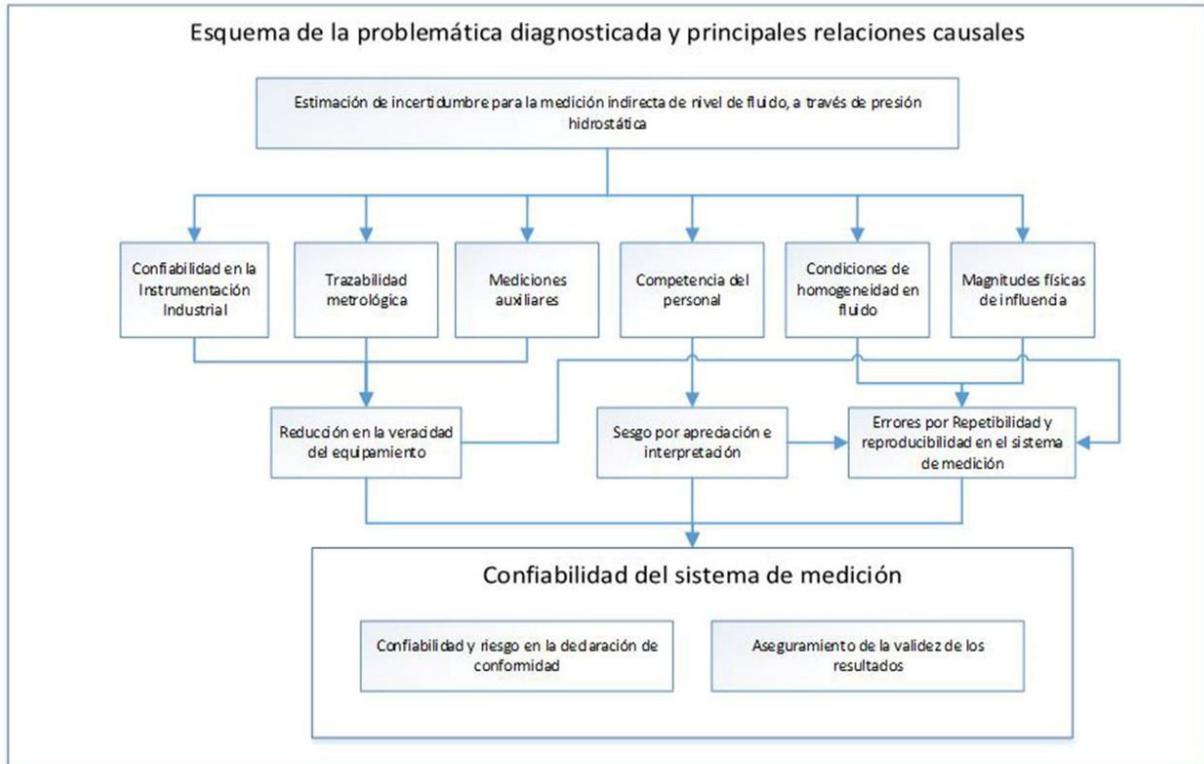
Fuente: Elaboración propia

La selección del método Bayesiano implica la evaluación de la confiabilidad y veracidad de los resultados de una medición indirecta. Estos aspectos tienen dependencia y relación con la condición metrológica del instrumento de medición de la magnitud dependiente (multímetro). En tal sentido, Bayes permite el seguimiento y ajuste del sesgo relacionado con el multímetro al establecer los criterios para la sintonización y estimación de incertidumbre en el sistema de medición indirecta.

El esquema metodológico y conceptual de la Figura 1 es el referente para el desarrollo de la estimación de la incertidumbre conforme al método seleccionado. Se hace necesario exponer como punto de partida la problemática diagnosticada y sus principales relaciones

causales. En este sentido, la Figura 2 ilustra el esquema del problema para el caso de estudio, como insumo en la implementación de los métodos de estimación de la incertidumbre y sobre los cuales se determina la mejor expresión que define la confiabilidad del sistema de medición.

Figura 2. Esquema de la problemática diagnosticada y principales relaciones causales



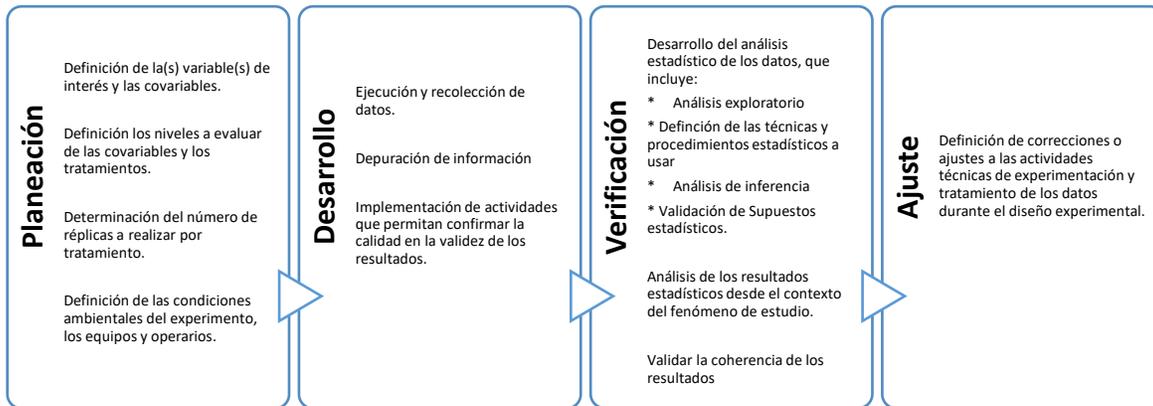
Fuente: Elaboración propia

Para la implementación de cada uno de los estudios desarrollados en la presente investigación, se realizó un desarrollo experimental ordenado acompañado de un análisis estadístico que soporta la calidad en la validez de los resultados y confirma la veracidad en la aplicación de los métodos de incertidumbre.

La incertidumbre de la medición asociada a los resultados arrojados por el multímetro como instrumento de medición indirecta depende significativamente de su precisión, del sesgo evidenciado posterior a su calibración, y de otros aspectos relacionados, tales como la deriva, la resolución y los errores intrínsecos. Por esta razón, se identifican aquellas características que presentan una correlación significativa con el instrumento y las demás que no influyen en cambios de presión atmosférica que pueda afectar los resultados del transmisor.

En la Figura 3, se exponen las fases que integran el aseguramiento de la validez de los resultados, lo que contribuye a la confiabilidad en la selección, naturaleza y tratamiento de la información vinculada en cada una de las estimaciones con los diferentes métodos.

Figura 3. Secuencia experimental para asegurar la validez de los resultados.



Fuente: Elaboración propia

Descripción general del experimento

El sistema de medición caso de estudio tiene por objeto determinar de forma indirecta el nivel de un fluido en reposo dentro de un recipiente no aforado. Es decir, como mensurando o magnitud de salida, se tiene la altura del fluido (h), y como magnitudes de entrada se tiene la presión hidrostática (P_h), la densidad del fluido (ρ) y la gravedad local (g), convencionalmente relacionadas en (1) [22].

$$h = \frac{P_h}{g\rho} \quad (1)$$

Para la estimación de la gravedad local, que en este modelo se asume constante, se tuvo en cuenta el procedimiento ME-017 de la CEM [23], que obtuvo un valor de $g = 9.775768 \frac{m}{s^2}$ para las condiciones de experimentación. Se utiliza un transmisor con tecnología HART (*Highway Addressable Remote Transducer*) marca *Waterpilot* (modelo FMX21), compuesto por una célula de medición cerámica sin aceite de relleno. Previo a la prueba experimental, se realiza ajuste de zero y span conforme condiciones físicas del contenedor de fluido, las cuales influyen en la delimitación de los intervalos mínimo y máximo de la

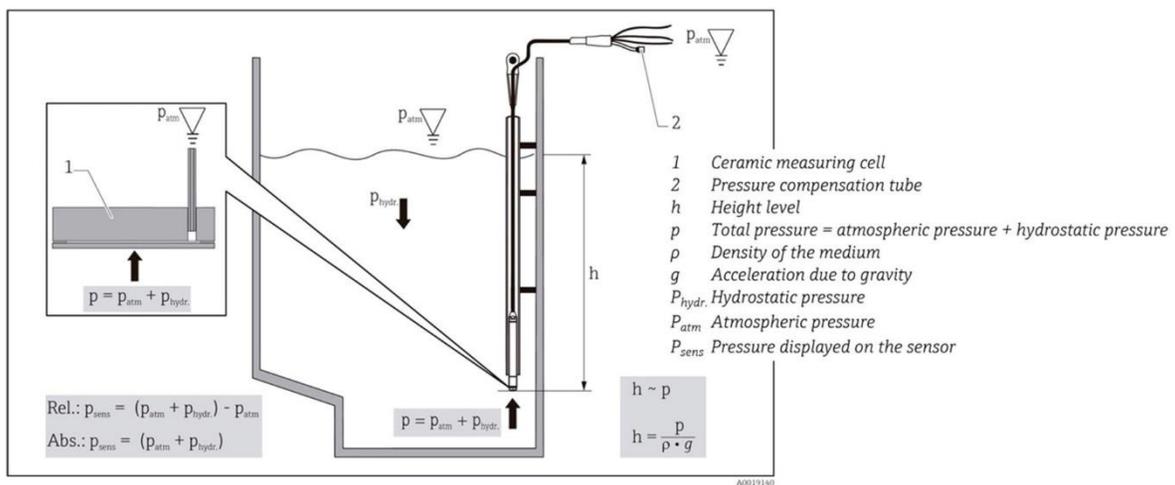
presión de entrada entre $[0 - 5]$ bar, que corresponde a los valores de altura del fluido dentro del tanque entre $[0 - 50]$ cm, y de la señal eléctrica de salida entre $[4 - 20]$ mA.

Teniendo en cuenta que para la experimentación se utilizó agua potable como fluido de prueba, se hizo necesario activar la medición de nivel con compensación de densidad y la medición de temperatura integrada del fluido a través de un medidor PT100. Se consideraron cinco (5) niveles de referencia y diez (10) réplicas para cada nivel. Es decir, se tomaron cincuenta (50) mediciones en total. El orden de la realización de cada una de estas mediciones se definió de forma aleatoria. Durante las mediciones se aseguraron las siguientes características de funcionamiento:

- Temperatura del medio: $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ a $70\text{ }^{\circ}\text{C}$ ($14\text{ }^{\circ}\text{F}$ a $158\text{ }^{\circ}\text{F}$)
- Intervalo de medición: 0 a 20 bar / $200\text{ m H}_2\text{O}$ (0 a 300 psi / $600\text{ pies H}_2\text{O}$), de tal forma que se asegure una desviación: $\pm 0,2\%$ sobre toda la escala de medición
- Temperatura ambiente controlada a $20\text{ }^{\circ}\text{C} \pm 3\text{ }^{\circ}\text{C}$
- Flujo constante tanto de ingreso como de salida para asegurar estado estacionario del nivel del fluido
- Uso de equipos de medición calibrados.

Una vez el equipo se encuentra en condiciones de uso, se determina la curva característica con el objeto de identificar errores de cero, de linealidad, de angularidad o cualquier otro tipo de error que pueda influir en el resultado de la medición. La Figura 4 ilustra el principio de funcionamiento del transmisor de presión a través de la relación existente entre la magnitud de salida y las magnitudes de entrada.

Figura 4. Gráfica ilustración del modelo físico



Source: Ficha Técnica Del Transmisor De Presión “Waterpilot Fmx21 [24]

Dado que el comportamiento del transmisor tiene pérdida de linealidad para valores de presión por debajo de 0.05 *bar*, el equipo tiene uso restringido para presiones entre 0.1 *bar* y 20 *bar*. El total del volumen contenido dentro del recipiente fue dividido en cinco niveles, los cuales representan alturas referenciadas a través del instrumento vernier con resolución de 0.05 *mm*. El fluido cuenta con una densidad promedio de 992.29 $\frac{kg}{m^3}$, determinada a través de método gravimétrico utilizando balanza clase II y probeta graduada de vidrio clase A, con base hexagonal de vidrio de 10 *ml*.

Los factores que son influyentes en el resultado de la medición, e.g., experticia del personal operador, condiciones ambientales, procedimiento, equipos de medición principales o auxiliares, y tiempo de medición, exigieron una etapa de evaluación de repetibilidad y ausencia de datos atípicos para tomar las mediciones como válidas para este estudio. De esta manera, a los resultados obtenidos durante la experimentación se les realiza confirmación de método analizando dos factores: hora de medición y personal que desarrolla el procedimiento de medición. Como resultado de dicha confirmación, se busca el no rechazo de una hipótesis nula, la cual plantea igualdad en los resultados de las experimentaciones realizadas en diferentes momentos y por personal diferente. Adicionalmente, la instrumentación se usa bajo condiciones de funcionamiento sugeridas por el fabricante.

Se establecen como entradas o factores de variación de incertidumbre de la medición del mensurando aquellas relacionadas con el instrumento multímetro y asociadas con: incertidumbre por precisión, incertidumbre por calibración, incertidumbre por deriva, incertidumbre por resolución, incertidumbre por errores implícitos la instrumento.

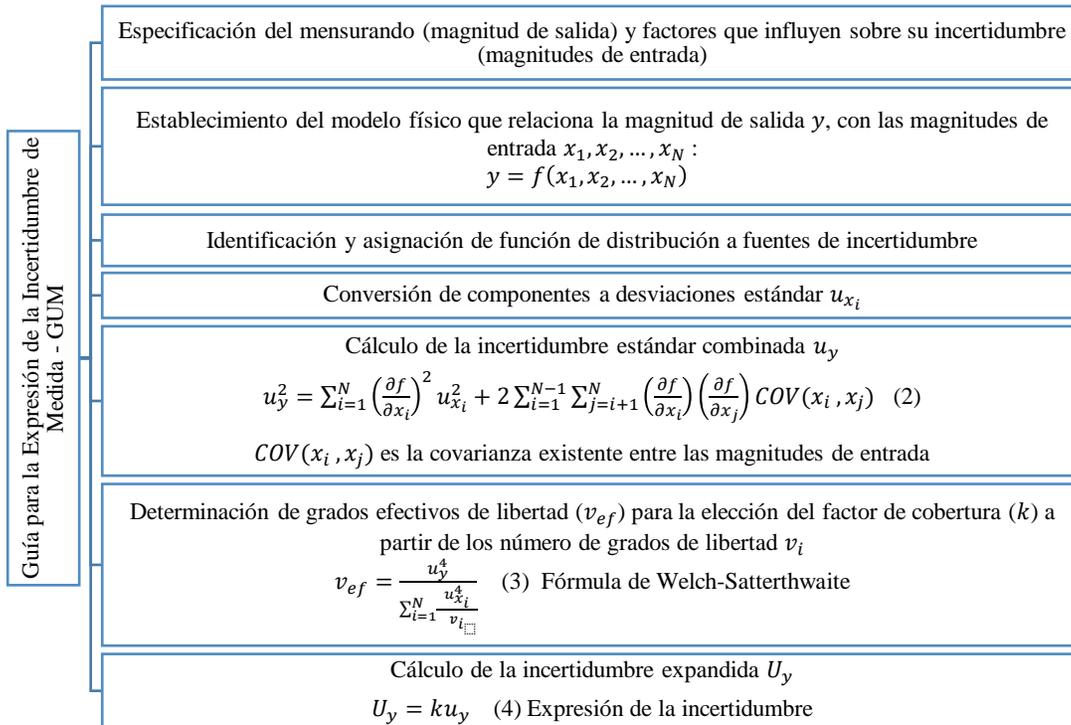
La evaluación de estimación de la incertidumbre de medición propuesta en este estudio incluye la comparación de los resultados arrojados por el método basado en el enfoque bayesiano frente los resultados obtenidos por aplicación de la GUM y el MMC. Así, el resultado de la comparación antes mencionado permite contrastar la hipótesis nula H_0 en donde se argumenta que la aplicación del enfoque bayesiano genera más información útil que los métodos GUM y MMC, con el fin contribuir al estudio de confiabilidad del proceso de medición y, sobre todo, de la mejora de la estimación de la incertidumbre.

Evaluación de la incertidumbre de medida usando la GUM

Una vez definido el modelo físico, se evalúan los factores que inciden sobre la incertidumbre del mensurando. En la Figura 5, se esquematiza el modelo determinístico propuesto por la GUM, el cual representa para el caso de estudio tanto el análisis estadístico

de la serie de observaciones que componen la repetibilidad del sistema de medición como la caracterización, cuantificación y dispersión de las de fuentes de incertidumbre que se propagan y se asocian al resultado de desviación de la medición indirecta.

Figura 5. Secuencia para la estimación de incertidumbre de medición conforme la GUM



Fuente: Elaboración propia

El análisis se realiza teniendo como referente el procedimiento normalizado ME-017 de la CEM [23], de forma que las estimaciones de incertidumbre están dadas en unidades de presión y los resultados se presentan en unidades de longitud, conforme la proporcionalidad existente entre la presión hidrostática y el nivel del fluido. Asimismo, se determina la incertidumbre debida a la variación del medidor de presión o incertidumbre tipo A (U_a), al ser el componente que especifica la variación típica del medidor bajo condiciones de repetibilidad de proceso. En la ecuación (5) se presenta la expresión con que se calcula la incertidumbre tipo A.

$$U_a = \frac{R_P}{L_E - l_E} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left[l_i - \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{n} \right]^2}{n - 1}}, \quad (5)$$

Donde, R_P es el rango de medida del instrumento en unidades de presión, L_E es el mayor valor del rango eléctrico, l_E es el menor valor del rango eléctrico, l_i es la indicación del multímetro para una determinada presión nominal y n es el número de medidas consideradas. Según la GUM, esta es la única fuente de incertidumbre considerada como tipo A.

Posterior a la estimación de la incertidumbre tipo A, se procede a establecer las fuentes de incertidumbre consideradas como tipo B. Donde, la medición indirecta se realiza determinando el valor en corriente eléctrica (mA en DC) a la salida del transmisor de presión diferencial, la cual es proporcional a la presión ejercida por el fluido sobre la base del tanque, que a su vez depende del nivel del fluido dentro del mismo. Por lo anterior, se debe estimar la contribución de incertidumbre por parte del medidor de corriente eléctrica, donde se hace uso del certificado de calibración del multímetro, tomando esta fuente como tipo B, así:

- a) Incertidumbre tipo B por calibración del multímetro, $u(\delta(\text{med})_E)$: Corresponde a la medida de la señal eléctrica, la cual, asumiendo distribución normal, estará caracterizada por la expresión (6) [23].

$$u(\delta(\text{med})_E) = \frac{R_P}{L_E - l_E} \cdot \frac{U_{\text{cert}E}}{k}, \quad (6)$$

Donde, k es el factor de cobertura [1] y $U_{\text{cert}E}$ es la incertidumbre del certificado de calibración del medidor eléctrico. En caso de que en el certificado de calibración del multímetro no se reporte la incertidumbre en miliamperios (mA), se procede a usar la función matemática de incertidumbre reportada por el laboratorio proveedor de la calibración [23].

- b) Incertidumbre tipo B asociada con la deriva del multímetro, $u(\delta(\text{der})_E)$: se asocia en gran medida a las condiciones de uso y mantenimiento del equipo. Si se asume que el histórico de las calibraciones sucesivas del instrumento siguen una distribución rectangular (es lo usual para la variable de estudio), se aplica la expresión (7) [23].

$$u(\delta(\text{der})_E) = \frac{R_P}{L_E - l_E} \cdot \frac{\text{der}(E)}{\sqrt{3}}, \quad (7)$$

Donde $der(E)$ es la diferencia máxima en valor absoluto entre las correcciones obtenidas para el medidor en dos certificados de calibración consecutivos. Cuando sólo se tiene una calibración, se pueden utilizar las especificaciones del fabricante del equipo [23].

- c) Incertidumbre debida a la resolución del instrumento, $u(\delta(res)_E)$: es la debida a la división de escala del transductor para cada medición, que, como mínimo será la del multímetro. Si se asume distribución rectangular de los datos, se obtiene con la expresión (8) [23].

$$u(\delta(res)_E) = \frac{R_P}{L_E - l_E} \cdot \frac{res(E)}{2\sqrt{3}}, \quad (8)$$

Donde $res(E)$ es el valor de resolución del instrumento.

- d) Incertidumbre debida a la histéresis del medidor, $u(\delta(hist)_E)$: es un factor de incertidumbre debida a que la medición puede variar dependiendo de si se incrementa o decrementa el valor de la variable a medir. Para distribución rectangular, la estimación es como se expresa en (9) [23].

$$u(\delta(hist)_E) = \frac{R_P}{L_E - l_E} \cdot \frac{|I_{baj} - I_{sub}|}{2\sqrt{3}}, \quad (9)$$

Donde, I_{baj} corresponde a la media de los valores medidos en sentido decreciente, mientras I_{sub} es la media de los valores medidos en sentido ascendente.

Teniendo en cuenta la estabilidad de las condiciones ambientales del laboratorio y la repetibilidad que representa el valor de densidad en cada pila de experimentos, dentro de la evaluación de incertidumbre basado en la GUM se despreció la incertidumbre por densidad de fluido. La Tabla 1 presenta una síntesis de los factores considerados en la evaluación de la incertidumbre y las características de estos a manera de presupuesto.

Tabla 1. Presupuesto de incertidumbre

| Fuente | Estimación | Incertidumbre típica | Distribución de probabilidad | Coefficiente de sensibilidad |
|---------------------------|-----------------|----------------------|------------------------------|------------------------------|
| Variación del medidor | $\delta(Var)$ | U_a | Normal | 1 |
| Calibración de multímetro | $\delta(med)_E$ | $u(\delta(med)_E)$ | Normal | 1 |
| Deriva de multímetro | $\delta(der)_E$ | $u(\delta(der)_E)$ | Rectangular | -1 |
| Resolución del medidor | $\delta(res)_E$ | $u(\delta(res)_E)$ | Rectangular | -1 |
| Histéresis del medidor | $\delta(his)_E$ | $u(\delta(his)_E)$ | Rectangular | -1 |

Fuente: Elaboración propia

Una vez estimadas las incertidumbres tipo A y tipo B, se procede a calcular la incertidumbre combinada, que para el caso de estudio queda definida por (10).

$$u_y = [u(\delta(Var))^2 + u(\delta(med)_E)^2 + u(\delta(der)_E)^2 + u(\delta(res)_E)^2 + u(\delta(hys)_E)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

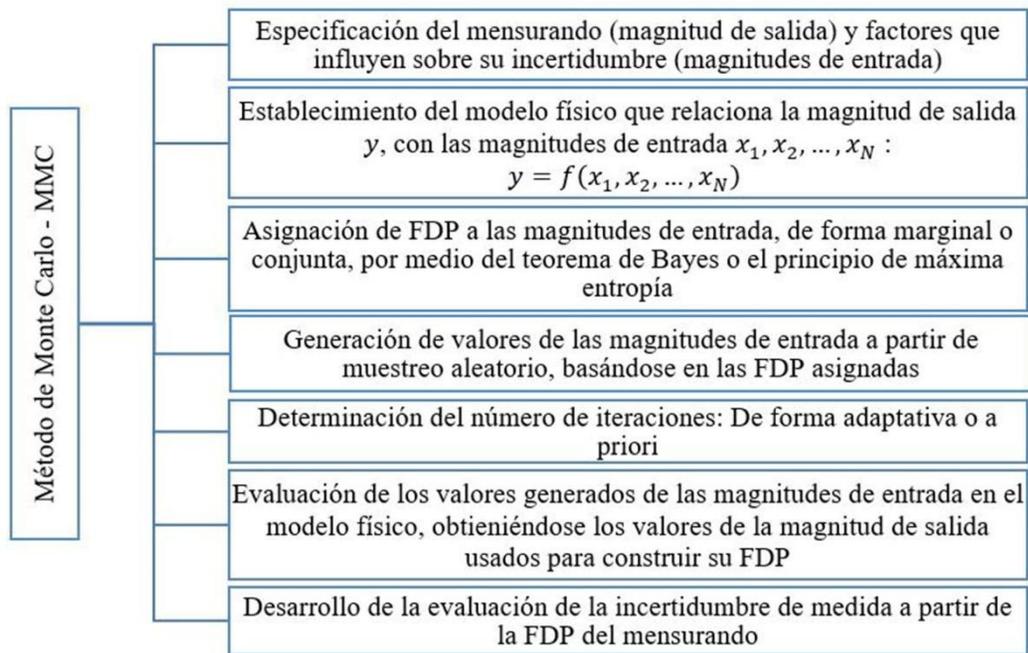
Las fuentes de incertidumbre debidas a los factores que afectan la medida como la presión hidrostática (P_h), la densidad del fluido (ρ) y la gravedad local (g), se consideran de forma sinérgica en la expresión (10) debido a que están embebidas en el estudio del instrumento de medición de la magnitud dependiente (multímetro), lo que hace cobrar valor a la medición indirecta. Es importante resaltar que se evaluaron las covarianzas de argumentos correlacionados entre factores y se obtuvo cero como resultado. Al percibir algún tipo de interacción entre los factores o fuentes de incertidumbre, se procedió a verificar la selección aleatoria en diferentes niveles de los parámetros o factores correlacionados. Luego, se debe calcular la incertidumbre expandida usando la expresión (4), donde es necesario estimar los grados efectivos de libertad que garanticen la validez del factor de cobertura (con $k=2$) y un nivel de confianza del 95.45%, a través de la fórmula de Welch-Satterthwaite expresada en la ecuación (3).

Evaluación de la incertidumbre de medida usando MMC y MMC adaptativo

En la Figura 6, se ilustra la secuencia para la estimación de la incertidumbre por Monte Carlo, el cual usa esquemas probabilísticos y simulación de modelos matemáticos con el fin de imitar el comportamiento aleatorio del sistema de medición, lo que permite a la estimación de incertidumbre el análisis del riesgo sobre sí misma.

El método de Monte Carlo (MMC), al igual que la GUM, parte del modelo físico ya definido, que relaciona la magnitud de salida con las magnitudes de entrada, como se expresa en (1), para luego asignar funciones de densidad de probabilidad (FDP) a las magnitudes de entrada.

Figura 6. Secuencia para la estimación de incertidumbre por método Montecarlo



Fuente: Elaboración propia

En cuanto a las condiciones experimentales de este estudio, la estimación de la incertidumbre del mensurando se discriminó por nivel de referencia de la altura del fluido, teniendo en cuenta que se trabajaron 5 niveles de referencia (8 cm, 16 cm, 24 cm, 32 cm y 40 cm). Aunque teóricamente se entiende que la presión hidrostática P_h y la densidad del fluido ρ son cantidades directamente proporcionales [22], se plantea la hipótesis de asumirlas como cantidades independientes, dado que el fluido que se utilizó fue agua potable durante la experimentación, y durante el proceso su densidad no cambió de manera considerable. El promedio global de la densidad del fluido utilizado en la experimentación

fue de $992.29 \frac{kg}{m^3}$, con una desviación estándar muestral de $1.72 \frac{kg}{m^3}$, con lo cual se tiene un coeficiente de variación muestral alrededor de 0.17%, que es un valor considerablemente pequeño. Para validar la hipótesis de independencia entre P_h y ρ , se usa el test de Hoeffding [25] por medio del software estadístico R [26]. La prueba de hipótesis que se contrasta con el test es la siguiente:

$$H_0 : F(P_h, \rho) = G(P_h)H(\rho) \text{ vs. } H_1 : F(P_h, \rho) \neq G(P_h)H(\rho), \quad (11)$$

Donde, $F(P_h, \rho)$ representa la función de distribución acumulada (FDA) conjunta de P_h y ρ , y $G(P_h)$ y $H(\rho)$ representan la FDA marginal de P_h y ρ , respectivamente. Bajo H_0 se quiere comprobar que P_h y ρ son independientes. Al realizar el test de forma global (considerando todas las observaciones y discriminando por cada nivel de referencia), se encontró que en todos los casos no se pudo rechazar H_0 , por lo que se concluye que es posible asumir independencia entre P_h y ρ .

Por otra parte, se planteó una hipótesis a fin de comprobar que las magnitudes de entrada de forma marginal seguían una distribución normal. Para probar esta hipótesis, se aplicó el test de Shapiro-Wilk [27], de forma global usando todos los datos para ρ , y discriminado por nivel de referencia para P_h . En todos los casos, se evidenció el no rechazo de la hipótesis nula consistente en que los datos seguían distribución normal. Para el caso de ρ , se contaron con 50 datos y se hizo el cómputo con 10 datos de cada nivel de referencia para P_h .

Luego, se generaron valores de las magnitudes de entrada usando muestreo aleatorio por medio del software estadístico R [26], en el cual se introducen las respectivas FDP de las magnitudes de entrada para cada nivel de referencia, definiendo el número de iteraciones $M = 1 \times 10^6$. Los valores generados de las magnitudes de entrada se evaluaron en el modelo que relaciona la salida con la entrada, obteniéndose así para cada nivel de referencia, M valores en la magnitud de salida. Con lo cual, se realizaron estimaciones de la media, la desviación estándar, intervalo de cobertura, y la FDP del mensurando en cada nivel de referencia.

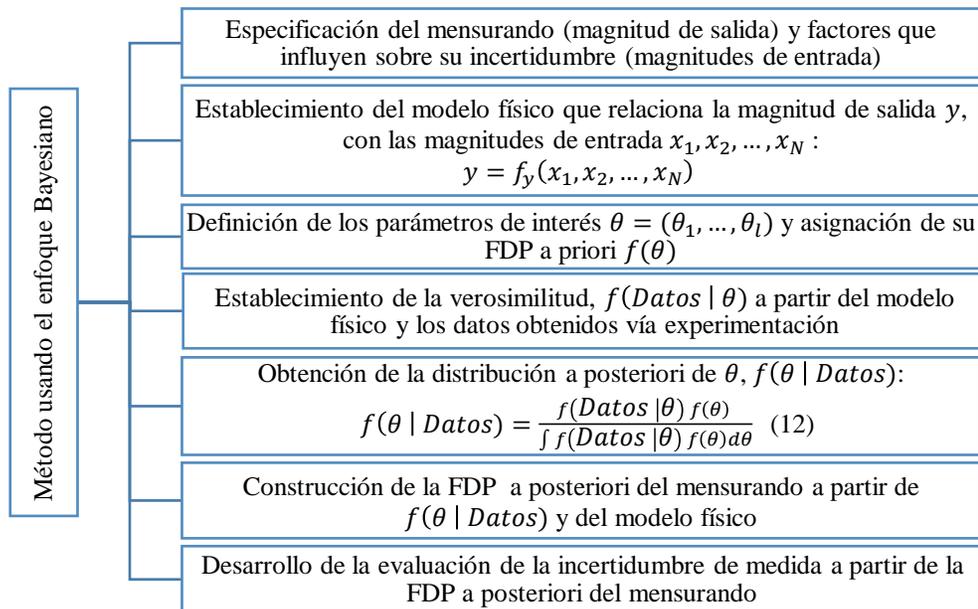
Además de la estimación de la incertidumbre mediante MMC, también se hicieron pruebas con una derivación de este método denominado *MMC adaptativo*, donde se busca definir el número de iteraciones necesarias en cada uno de los niveles de referencia, de manera que se garantice la estabilización de los resultados. Para establecer la tolerancia numérica se fijó el número de cifras significativas igual a 2, y dada la magnitud de la desviación estándar del

mensurando en cada nivel, se fijó la tolerancia numérica como $\delta = 0.05 \text{ cm}$. Después de aplicar el MMC adaptativo en cada uno de los niveles de referencia del mensurado, se encontró que en todos los casos la estabilización de los resultados ocurre con un número de iteraciones menor a $M = 1 \times 10^6$.

Evaluación de la incertidumbre de medida desde el enfoque bayesiano

En la Figura 7, se presenta la teoría de Bayes para la estimación de la incertidumbre en sistemas de medición, tomando como base el conocimiento intrínseco. Dentro de esta figura, la ecuación (12) muestra cómo se calcula la distribución posterior de los parámetros de interés, en la que se basa la estimación de la incertidumbre de medida.

Figura 7. Secuencia para la estimación de incertidumbre desde el enfoque Bayesiano



Fuente: Elaboración propia

El enfoque Bayesiano también debe partir del modelo físico, donde se relaciona la magnitud de salida con las magnitudes de entrada, y deben tenerse disponibles datos experimentales que sean representativos del fenómeno que hayan sido validados. Además, la asignación de las distribuciones a priori exige el conocimiento de las condiciones y características del fenómeno de estudio. En particular, para el caso de estudio, la evaluación de la incertidumbre de medida a partir del enfoque Bayesiano debe discriminarse por nivel de referencia de altura del fluido. Inicialmente, se considera la función de verosimilitud presentada en (13).

$$P_h \sim N(\mu_{P_h}, \sigma_{P_h}^2) \quad \text{and} \quad \rho \sim N(\mu_\rho, \sigma_\rho^2), \quad (13)$$

Donde, P_h y ρ son independientes. Asumiendo la gravedad local como constante, se obtiene que $g\rho \sim N(\mu_{g\rho}, \sigma_{g\rho}^2)$ con $\mu_{g\rho} = g\mu_\rho$ y $\sigma_{g\rho} = g\sigma_\rho$ y cada observación de la altura del fluido $h_i = \frac{P_h}{g\rho}$ tiene distribución con función de densidad de probabilidad, como se presenta en (14) [28]:

$$f_{h_i}(h_i) = \frac{b(h_i)d(h_i)}{a^3(h_i)\sqrt{2\pi}\sigma_{P_h}\sigma_{g\rho}} \left[\Phi\left(\frac{b(h_i)}{a(h_i)}\right) - \Phi\left(-\frac{b(h_i)}{a(h_i)}\right) \right] + \frac{e^{-\frac{c}{2}}}{a^2(h_i)\pi\sigma_{P_h}\sigma_{g\rho}}, \quad (14)$$

Donde, $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución normal estándar acumulada, y $a(h_i)$, $b(h_i)$, c y $d(h_i)$, son bloques de sustitución que corresponden a las ecuaciones presentadas en (15).

$$\begin{aligned} a(h_i) &= \sqrt{\frac{h_i^2}{\sigma_{P_h}^2} + \frac{1}{\sigma_{g\rho}^2}} & b(h_i) &= \frac{\mu_{P_h} h_i}{\sigma_{P_h}^2} + \frac{\mu_{g\rho}}{\sigma_{g\rho}^2} \\ c &= \frac{\mu_{P_h}^2}{\sigma_{P_h}^2} + \frac{\mu_{g\rho}^2}{\sigma_{g\rho}^2} & d(h_i) &= \exp\left(\frac{b^2(h_i) - 2a^2(h_i)}{2a^2(h_i)}\right) \end{aligned} \quad (15)$$

Sean, $\theta = (\mu_{P_h}, \mu_{g\rho}, \sigma_{P_h}, \sigma_{g\rho})$ y $h = (h_1, \dots, h_n)$, los vectores de parámetros de interés y observaciones, respectivamente. Dado que las observaciones son independientes entre sí (pues cada observación representa una réplica del experimento), la función de verosimilitud $f(h|\theta)$ quedaría con la estructura de ecuación (16).

$$f(h|\theta) = \prod_{i=1}^n f_{h_i}(h_i) \quad (16)$$

Posteriormente, se requiere que se asignen distribuciones a priori a los parámetros relacionados con las magnitudes de entrada. Dado que, teóricamente, se espera que la

densidad del agua sea $1000 \frac{kg}{m^3}$, y que no exista variabilidad considerable en la densidad del fluido utilizado (agua potable), se asume $\mu_\rho \sim N\left(1000 \frac{kg}{m^3}, \left(50 \frac{kg}{m^3}\right)^2\right)$, por lo cual,

$$\mu_{g\rho} \sim N\left(1000 \frac{kg}{m^3} \times g, \left(50 \frac{kg}{m^3} \times g\right)^2\right) \quad \text{con } g = 9.775768 \frac{m}{s^2}$$

Además, se plantea $\sigma_\rho < 100 \frac{kg}{m^3}$, y se asume $\sigma_\rho \sim U\left(0, 100 \frac{kg}{m^3}\right)$ y $\sigma_{g\rho} \sim U\left(0, 100 \frac{kg}{m^3} \times g\right)$.

Para los parámetros relacionados con la presión hidrostática, se considera que $P_h = g\rho h$, por lo que para cada nivel con valor de referencia h_{ref} en metros, se asume $\mu_{P_h} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ con $\mu_1 = 1000gh_{ref} Pa$ y $\sigma_1 = \frac{1000g(h_{ref}+0.01)-1000g(h_{ref}-0.01)}{2} = 10g Pa$, donde g es el valor de la gravedad, Pa es la unidad en pascuales que sigue la conversión de $1 Pa = 1 \frac{kg}{m s^2}$ y U hace referencia a la distribución uniforme. Se plantea $\sigma_{P_h} < 20g Pa$, en el entendido de que, si se fija la densidad del fluido, la variación en la medición de la presión hidrostática no generará un valor de altura del fluido que difiera en más de $2 cm$ del valor real. En este caso, se asume $\sigma_{P_h} \sim U(0, 20g Pa)$.

Al asumir independencia entre los parámetros, $f(\theta)$ es igual al producto de las FDP a priori marginales. De manera que la distribución a posteriori de θ , podría expresarse como se presenta en (17).

$$f(\theta|h) \propto f(h|\theta)f(\theta) \quad (17)$$

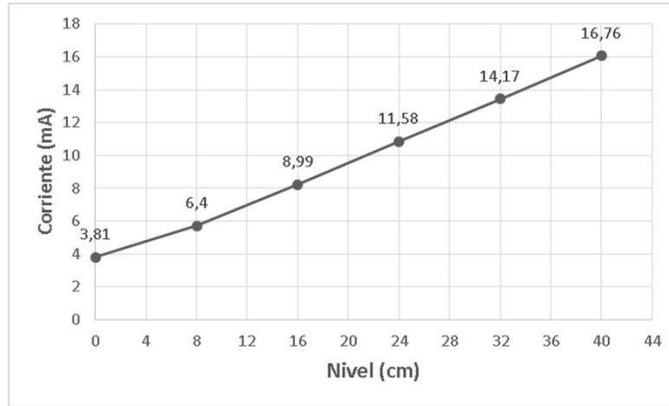
Para las pruebas experimentales del caso de estudio, se generaron valores de $f(\theta|h)$ vía MCMC (Markov Chain Monte Carlo), utilizando el algoritmo t -walk [29], lo que generó 1.1×10^6 valores, con un quemado inicial de 1×10^5 valores. Finalmente, reemplazando los valores generados de θ en el modelo que relaciona la magnitud de salida con las magnitudes de entrada, se obtuvo la FDP a posteriori del mensurando.

Resultados

Obtenidos a partir de la GUM

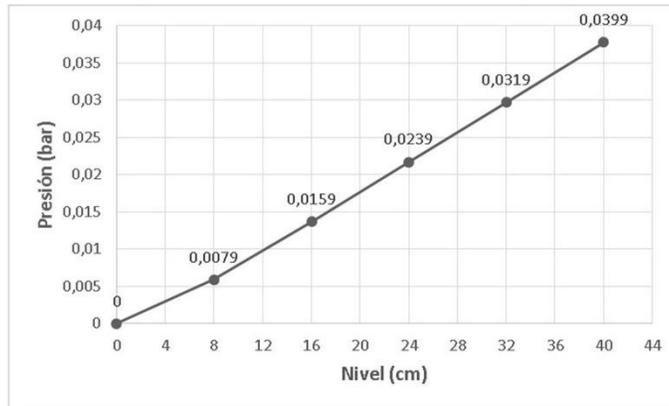
En las Figuras 8 y 9, se observa la relación directamente proporcional que existe entre la presión y la altura del fluido, donde la presión se representa a través de la señal de salida del transmisor en mA .

Figura 8. Nivel del fluido Vs Corriente (mA)



Fuente: Elaboración propia

Figura 9. Nivel del fluido Vs Presión (bar)



Fuente: Elaboración propia

Conforme lo expresado en (5), se obtiene el valor de incertidumbre tipo A, la cual especifica la variación típica del transmisor de presión bajo condiciones de repetibilidad de proceso. Al calcularlo, se obtiene el resultado presentado en (18).

$$U_a = 8.0 \times 10^{-5} \text{ bar} \quad (18)$$

Como primera fuente de incertidumbre tipo B, se relaciona la aportada por la calibración del medidor de corriente eléctrica, retirando su factor de cobertura, para obtener el valor más real posible. Aplicando (6), se obtiene el resultado presentado en (19).

$$u(\delta(\text{med})_E) = 9.1 \times 10^{-8} \text{ bar} \quad (19)$$

Otra fuente de incertidumbre tipo B relaciona la deriva del multímetro, $u(\delta(\text{der})_E)$. Para esto se utiliza la ecuación (7), satisfaciendo la información suministrada por el fabricante

respecto de la exactitud del equipo para mediciones de corriente eléctrica de $\pm 0.8 \text{ mA DC}$, equivalente a 0.128 mA , obtenemos el resultado presentado en (20).

$$u(\delta(\text{der})_E) = 3.3 \times 10^{-5} \text{ bar} \quad (20)$$

Para la estimación de incertidumbre por resolución del multímetro se emplea la ecuación (8), siendo $\text{res}(E)$ la resolución de la indicación eléctrica para el medidor, que para este caso es $0,01 \text{ mA DC}$. Obtenemos el resultado presentado en (21).

$$u(\delta(\text{res})_E) = 9.0 \times 10^{-6} \text{ bar} \quad (21)$$

Con lo expresado en la ecuación (9), se obtiene la incertidumbre debida a la histéresis del medidor, $u(\delta(\text{hist})_E)$, el resultado es presentado en (22).

$$u(\delta(\text{hist})_E) = 8.7 \times 10^{-5} \text{ bar} \quad (22)$$

Se procede a determinar el valor de la incertidumbre combinada y expandida, según lo expresado en (10) y (4), respectivamente. Por lo tanto, obtenemos los resultados presentados en (23).

$$u_y = 1.2 \times 10^{-4} \text{ bar} \quad \text{and} \quad U_y = 2.5 \times 10^{-4} \text{ bar} \quad (23)$$

La Tabla 2 presenta los resultados de la evaluación de la incertidumbre de medida mediante la GUM, discriminados por nivel de referencia de la altura del fluido en unidades de altura. Aquí, SD es la desviación estándar y se asocia la proporcionalidad entre la presión y la altura del fluido (ver Figura 9), dividido el valor de la estimación de la incertidumbre en la medición de presión entre el producto de la densidad del fluido promedio para el determinado nivel de referencia y la gravedad local. Todo esto considera los cambios de unidades necesarios para llevar los resultados a *cm*.

Tabla 2. Resultados evaluación de la incertidumbre mediante la GUM

| Nivel (cm) | Media (cm) | SD (cm) | Intervalo al 95% | Amplitud (cm) |
|------------|------------|---------|-------------------|---------------|
| 8 | 8.10 | 0.140 | (7.830 ; 8.377) | 0.55 |
| 16 | 16.13 | 0.138 | (15.851 ; 16.413) | 0.56 |
| 24 | 24.17 | 0.125 | (23.923 ; 24.414) | 0.49 |
| 32 | 32.15 | 0.121 | (31.912 ; 32.387) | 0.48 |
| 40 | 40.16 | 0.119 | (39.922 ; 40.390) | 0.47 |

Fuente: Elaboración propia.

De la Tabla 2, se observa que las estimaciones de la media del mensurando para todos los casos se acercan a los valores nominales, siempre por encima de 0.1 cm. Las estimaciones de la desviación estándar fluctúan alrededor de 0.2 y 0.1 cm para los diferentes niveles y los intervalos de confianza siempre contuvieron el valor nominal del nivel de referencia.

Obtenidos usando MMC y MMC adaptativo

En la Tabla 3, se presentan los parámetros estimados para P_h por nivel de referencia (para ρ se asignó una media de $992.29 \frac{kg}{m^3}$ y una desviación estándar de $1.72 \frac{kg}{m^3}$). En la Tabla 4, se presentan estimaciones de la media, desviación estándar e intervalo de cobertura, mientras en la Figura 10, se visualiza la FDP del mensurando para cada nivel de referencia.

Tabla 3. Parámetros asignados para P_h por nivel de referencia.

| Nivel (cm) | P_h (Pa) | |
|------------|------------|--------------------------|
| | Media | Desviación estándar (SD) |
| 8 | 786.38 | 13.91 |
| 16 | 1565.5 | 15.47 |
| 24 | 2341.88 | 24.09 |
| 32 | 3118.94 | 19.82 |
| 40 | 3896.88 | 19.97 |

Fuente: Elaboración propia

Tabla 4. Resultados evaluación incertidumbre con MMC

| Nivel (cm) | Media (cm) | SD (cm) | Intervalo al 95% | Amplitud |
|------------|------------|---------|-------------------|----------|
| 8 | 8.110 | 0.144 | (7.827 ; 8.392) | 0.565 |
| 16 | 16.158 | 0.162 | (15.841 ; 16.476) | 0.635 |
| 24 | 24.195 | 0.252 | (23.702 ; 24.690) | 0.988 |
| 32 | 32.186 | 0.212 | (31.771 ; 32.602) | 0.831 |
| 40 | 40.197 | 0.218 | (39.770 ; 40.623) | 0.853 |

Fuente: Elaboración propia

Aplicando el enfoque Bayesiano

En la Tabla 5, se presentan los resultados obtenidos a partir de la FDP a posteriori del mensurando en cada nivel de referencia.

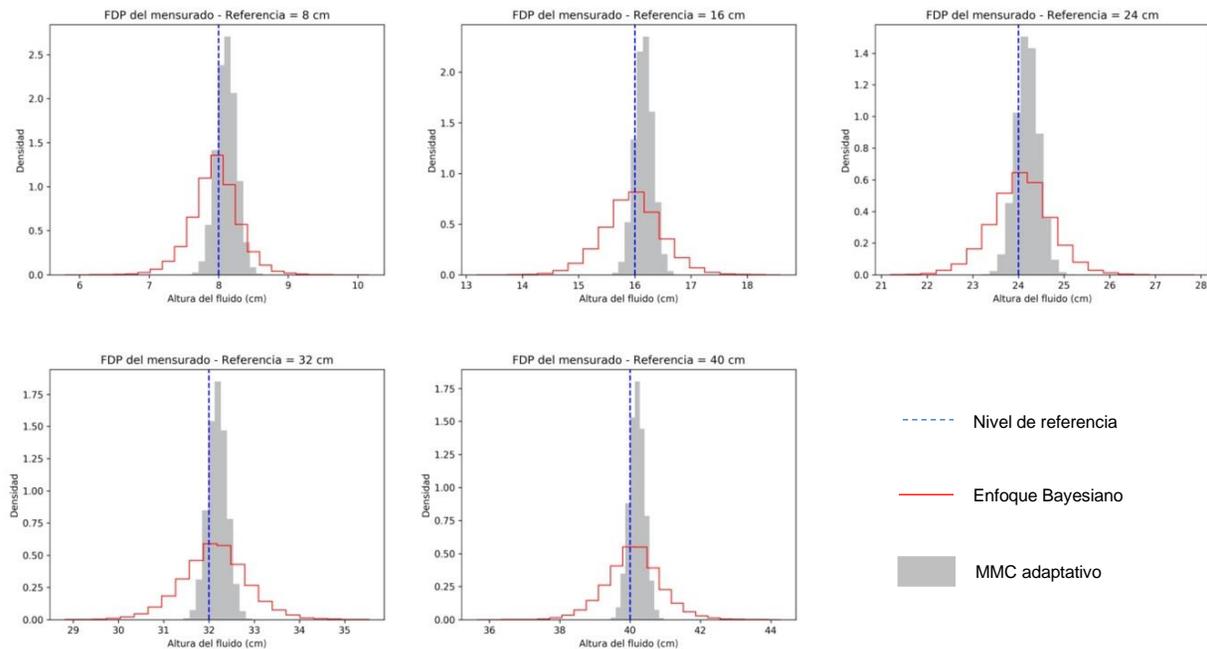
Tabla 5. Resultados evaluación incertidumbre – Enfoque Bayesiano

| Nivel (cm) | Media (cm) | SD (cm) | Intervalo al 95% | Amplitud (cm) |
|------------|------------|---------|-------------------|---------------|
| 8 | 8.08 | 0.41 | (7.50 ; 8.716) | 1.21 |
| 16 | 16.06 | 0.58 | (15.261 ; 16.685) | 1.42 |
| 24 | 24.07 | 0.71 | (23.399 ; 24.952) | 1.55 |
| 32 | 32.07 | 0.81 | (31.185 ; 32.905) | 1.72 |
| 40 | 40.08 | 0.89 | (39.694 ; 41.504) | 1.81 |

Fuente: Elaboración propia

De la Tabla 5, se observa que, en cada uno de los niveles de referencia de la altura del fluido, la estimación de la media del mensurando es cercana al valor nominal del respectivo nivel, con una diferencia entre la estimación y el valor de referencia inferior a 0,8 cm. En todos los casos, la estimación de la desviación estándar es inferior a 1 cm y las amplitudes de los intervalos de cobertura siempre son inferiores a 2 cm, lo que indica que para cada uno de los niveles de referencia el intervalo de cobertura contiene al valor de referencia. Finalmente, en la Figura 10, se comparan los resultados de la FDP del mensurando para cada nivel de referencia usando el enfoque bayesiano y el MMC adaptativo.

Figura 10. Comparación del FDP del mensurando entre MMC adaptativo y Enfoque Bayesiano



Fuente: Elaboración propia

Conclusiones

En este artículo se valida una metodología, esquematizada en las Figuras 1, 2 y 3, que puede tomarse como una guía para la aplicación de técnicas de buen desempeño en la evaluación de la incertidumbre, como son: GUM, MMC y Bayes, donde se aportan elementos conceptuales que facilitan la comprensión del aporte funcional, en cuanto a la aplicación y análisis de resultados para un caso de estudio no trivial y poco examinado en la literatura. En particular, se obtuvieron hallazgos mediante la comparación de los resultados de evaluación de la incertidumbre en un método de medición indirecta, aplicando el enfoque bayesiano respecto de las estimaciones con la GUM y el MMC, para un caso de estudio que consistió en determinar el nivel de un fluido a través de mediciones de la presión hidrostática generado por el mismo fluido en estado estacionario sobre la base de un contenedor. De acuerdo con los resultados experimentales, existen diferencias entre los resultados que se obtienen al realizar la evaluación de incertidumbre de medida con las metodologías implementadas y discutidas en este artículo, que sirven como elementos de criterio a la hora de decidir por una de ellas en particular. Los resultados que ofrece la GUM se relacionan con las estimaciones para la obtención de la media y la desviación estándar del mensurando, además del intervalo de confianza. Por su parte, MMC y Bayes ofrecen información complementaria que en un caso determinado puede ser de mayor utilidad como es la FDP del mensurando, por medio de la cual puede ampliarse el análisis con la estimación de la media, la desviación estándar, la mediana, la moda, los cuantiles, el análisis de simetría y el cálculo de un intervalo de cobertura para el mensurando. La diferencia entre la FDP obtenida por MMC y la obtenida con Bayes es que esta última metodología ofrece una FDP a posteriori que puede reactualizarse si se cuenta con información nueva.

Así mismo, a partir del MMC adaptativo, se encontró que la aplicación de la GUM en el caso de estudio discutido en este artículo tuvo una validación adecuada, lo cual se explica en que el modelo que relaciona la magnitud de salida con las magnitudes de entrada sigue un comportamiento simple. Esto es, en cada uno de los niveles de referencia se encontró que la FDP del mensurando es simétrica y con forma de campana, siendo este un resultado común cuando se aplicó tanto MMC como Bayes. Este hecho confirma el supuesto sobre el que se basa la GUM, cuando se parte del establecimiento de que la FDP del mensurando es normal o aproximadamente normal.

Un aporte derivado de la estructura de pruebas experimentales presentadas en este trabajo, como es la aplicación de la GUM, el MMC y el enfoque de Bayes en un fenómeno no trivial, de utilidad industrial y no frecuente en la literatura, se dirige hacia los resultados que demuestran la capacidad del enfoque de Bayes a obtener resultados más ajustados al plano real de medición que los ofrecidos por GUM y MMC. Se observó que esta ventaja de

precisión numérica del enfoque de Bayes obedecía a que las FDP del mensurando obtenidas para cada nivel de referencia le asignaron la más alta probabilidad al intervalo que contenía el valor nominal o verdadero. Adicionalmente, Bayes brinda como ventaja teórica la re-actualización o refinamiento de la inferencia a medida que se cuenta con nuevos datos. De otra parte, con Bayes los intervalos de posibles valores del mensurando son más amplios que los que ofrecen MMC y GUM.

Bibliografía

- [1] Joint Committee for Guides in Metrology, Evaluation of measurement data – guide to the expression of uncertainty in measurement, BIPM, 2008. [Online]. Available: https://www.bipm.org/documents/20126/2071204/JCGM_100_2008_E.pdf/cb0ef43f-baa5-11cf-3f85-4dcd86f77bd6
- [2] T. Dietza, K. Klamrothb, K. Kraus, et al., “Introducing multiobjective complex systems,” *European Journal of Operational Research*, vol. 280, no. 2, pp. 581-596, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.07.027>
- [3] C. Cai, J. Wang and Z. Li, “Assessment and modelling of uncertainty in precipitation forecasts from TIGGE using fuzzy probability and Bayesian theory,” *Journal of Hydrology*, vol. 577, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2019.123995>
- [4] T. B. Schön, , A. Svensson, L. Murray and F. Lindsten, “Probabilistic learning of nonlinear dynamical systems using sequential Monte Carlo,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 104, pp. 866-883, 2018. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1703.02419>
- [5] T. Hou, D. Nuyens, S. Roles and H. Janssen, “Quasi-Monte Carlo based uncertainty analysis: Sampling efficiency and error estimation in engineering applications,” *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 191, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.ress.2019.106549>
- [6] Joint Committee for Guides in Metrology, JCGM 101:2008 – Evaluation of measurement data - Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method, BIPM, 2008.
- [7] J. M. M. R. Roberto Arias R., “Determinación de la incertidumbre de medición del volumen de patrones volumétricos, determinado a partir del método de pesado de doble sustitución,” Santiago de Querétaro, 2002.
- [8] M. A. Azpurua, C. Tremola and E. Paez, “Comparison of the gum and Monte Carlo methods for the uncertainty estimation in electromagnetic compatibility testing,” *Progress In Electromagnetics Research B*, vol. 34, pp. 125 - 144, 2011. <https://doi.org/10.2528/PIERB11081804>
- [9] S. F. dos Santos and H. S. Brandi “Application of the GUM approach to estimate uncertainty in measurements of sustainability systems,” *Clean. Techn. Environ. Policy*, 2015. <https://doi.org/10.1007/s10098-015-1029-3>
- [10] K. Weise and W. Woger, “A Bayesian theory of measurement uncertainty,” *Meas. Sci. Technol*, vol. 4, no. 1, 1992. <https://doi.org/10.1088/0957-0233/4/1/001>
- [11] I. Lira, “The GUM revision: The Bayesian view toward the expression of measurement uncertainty,” *European Journal of Physics*, vol. 37, no. 2, p. 025803, 2016. [Online]. Available: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0143-0807/37/2/025803>
- [12] D. G. I Lira, “Bayesian assessment of uncertainty in metrology: a tutorial,” *Metrologia*, n° 47, pp. R1 - R14, 2010. [Online]. Available: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0026-1394/47/3/R01>
- [13] J.-H. Y. Heung-Fai Lam, “An innovative Bayesian system identification method using autoregressive model,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 133, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.106289>
- [14] J. Berger, “The case for objective Bayesian analysis,” *Bayesian Analysis*, vol. 1, n° 3, pp. 385- 402, 2006. <https://doi.org/10.1214/06-BA115>
- [15] L. S. Katafygiotis, “Sequential Bayesian estimation of state and input in dynamical systems using

- output-only measurements,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 131, pp. 659-688, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.06.007>
- [16] I. Lira and W. Wöger “Bayesian evaluation of the standard uncertainty and coverage probability in a simple measurement model,” *Measurement Science and Technology*, vol. 12, no. 8, pp. 1172 –1179, 2001. [Online]. Available: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0957-0233/12/8/326/meta>
- [17] F. Attivissimo, N. Giaquinto and M. Savino, “A Bayesian paradox and its impact on the GUM approach to uncertainty,” *Measurement*, vol. 45, no. 9, pp. 2194-2202, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2012.01.022>
- [18] C. Elster and Blaza Toman, “Bayesian uncertainty analysis under prior ignorance of the measurand versus analysis using the Supplement 1 to the Guide: a comparison,” *Metrología*, vol. 46, no. 3, pp. 261 – 266, 2009.
- [19] M. Vilbaste, G. Slavin, O. Saks, V. Pihl and I. Leito, “Can coverage factor 2 be interpreted as an equivalent to 95% coverage level in uncertainty estimation? Two case studies,” *Measurement*, vol. 43, no. 3, pp. 392–399, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2009.12.007>
- [20] A. Possolo, “Five examples of assessment and expression of measurement uncertainty,” *Applied Stochastic Models Bussines and Industry*, vol. 22, no. 1, pp. 1-18, 2012. <https://doi.org/10.1002/asmb.1947>
- [21] A. Gelman, J. Carlin, H. Stern and D. Rubin, *Bayesian data analysis*, Boca Raton, FL, USA: Chapman & Hall/CRC, 2014.
- [22] F. White, *Fluid Mechanics*, 6th Ed., McGraw-Hill, 2008.
- [23] Centro Español de Metrología, *Procedimiento ME - 017 para la calibración de transductores de presión con salida eléctrica*, Madrid, España, 2003.
- [24] Endress+Hauser. (2015). *Technical Information Waterpilot FMX21*. https://portal.endress.com/wa001/dla/5000557/8038/000/05/TI00431PEN_1413.pdf
- [25] W. Hoeffding, “A non-parametric test of independence,” *The annals of mathematical statistics*, vol. 19, no. 4, pp. 546-557, 1948. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177730150>
- [26] R Core Team, “R: A language and environment for statistical computing,” R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2017.
- [27] S. S. Shapiro and M. B. Wilk, “An analysis of variance test for normality (complete samples),” *Biometrika*, vol. 52, no. 3/4, pp. 591-611, 1965. <https://doi.org/10.2307/2333709>
- [28] T. Pham-Gia, N. Turkkan and E. Marchand, “Density of the ratio of two normal random variables and applications,” *Communications in Statistics-Theory and Methods*, vol. 9, no. 35, pp. 1569-1591, 2006. <https://doi.org/10.1080/03610920600683689>
- [29] J. A. Christen and F. Colin, “A general purpose sampling algorithm for continuous distributions (the t-walk),” *Bayesian Analysis*, vol. 2, no. 5, pp. 263-281, 2010. <https://doi.org/10.1214/10-BA603>