

# SIMULADOR DE MÁQUINAS DE POST: MATEMÁTICA COMPUTACIONAL COMO APOYO A LA DOCENCIA

Álvaro Duque, S.J.\*

Patricia Hernández\*

Fernando Novoa\*

Enrique Ruiz\*\*

**Resumen.** En este artículo se muestra un *software*, desarrollado por los autores, que simula una máquina de Post. Este simulador contiene los elementos básicos que permiten la construcción y ejecución de algoritmos para funciones calculables.

**Abstract.** *The article shows the software we have developed, which simulates a Post machine. The application contains the basic elements which are necessary for building and running algorithms for calculable functions.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Los grandes avances de la lógica y la teoría de algoritmos, en el siglo XX, tienen su fundamento en la introducción de precisiones del concepto de algoritmo como son las máquinas de Post [Post, 1936] y las máquinas de Turing [Turing, 1936].

El contenido de esta teoría de algoritmos no se ha explotado lo suficiente en los cursos de pregrado de informática, lógica y matemáticas. Es difícil —en opinión de los autores— fundamentar un curso teórico práctico sobre funciones calculables sin haber dado una caracterización intuitiva del concepto de algoritmo. Se puede encontrar una ayuda invaluable en la obra de Emil Post (1897-1954), que realizó sus estudios de doctorado en lógica matemática y uno de sus aportes más destacados consistió en darle el relieve que se merecen las funciones calculables. De nuevo, en opinión de los autores de este artículo, el trabajo de Post, concretado en su máquina, ayuda a los que se inician en informática a profundizar en las funciones calculables y las tareas

---

\* Profesores del Departamento de Matemáticas, Pontificia Universidad Javeriana.

\*\* Ingeniero de sistemas. Profesor Instructor, Departamento de Ingeniería de Sistemas, Pontificia Universidad Javeriana.

que desempeñan esas funciones en los fundamentos matemáticos de la informática actual.

Nos hemos esforzado en introducir el tema de la manera más sencilla posible, para que el lector se interese en él y que obtenga, una apreciación clara de las posibilidades didácticas materializadas en una máquina de Post. Con ejemplos bien graduados hemos tratado de hacer inteligible este capítulo de la matemática computacional. Finalmente nos hemos centrado en un simulador de máquinas de Post, que facilita la comprensión y da la posibilidad de usar de manera concreta los aportes de Emil Post y de tomar conciencia del papel central de la teoría de funciones calculables en la formación de los futuros ingenieros de sistemas e informáticos matemáticos.

## 2. LAS MÁQUINAS DE POST

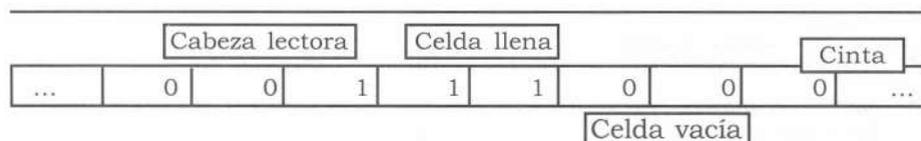
Una máquina de Post es un dispositivo abstracto que intenta dar una caracterización del concepto de algoritmo. Si se entiende por algoritmo un procedimiento mecánico y finito que busca encontrar la solución de un problema dado, resulta ser esta noción un tanto ambigua al tratar con funciones calculables, esto es, funciones aritméticas cuyos valores se encuentran por medio de algoritmos. Este sentido intuitivo del concepto de algoritmo limita un poco el tratamiento matemático de dichas funciones que aparecen en los algoritmos de la aritmética elemental. Por tal razón, en la década de 1930 se desarrollaron investigaciones en lógica matemática, que llevaron a introducir algunas precisiones del concepto de algoritmo, como las máquinas de Turing [Turing, 1936], la  $\lambda$ -definibilidad de Church [Church, 1936] y las máquinas de Post [Post, 1936], entre otras.

El siguiente dispositivo, que se denominará *máquina de Post*, materializa en cierta forma los conceptos matemáticos aportados por Emil Post a la solución del problema precedente.

### 2.1. ELEMENTOS DE UNA MÁQUINA DE POST

En la Figura 1 se muestran las partes que integran el dispositivo físico que sirve de ayuda para dar el paso de lo intuitivo a lo abstracto en la máquina de Post. Ésta consta en primer lugar de una cinta dividida en celdas, que puede extenderse indefinidamente hacia la derecha o hacia la izquierda; además cada celda puede contener un símbolo de un alfabeto consistente en  $\Sigma = \{1,0\}$ , donde 0 indica una celda vacía. Es decir, una celda puede estar vacía (0) o contener un símbolo 1 y existe una cabeza lectora que escudriña cada celda.

Figura 1. Elementos de una máquina de Post



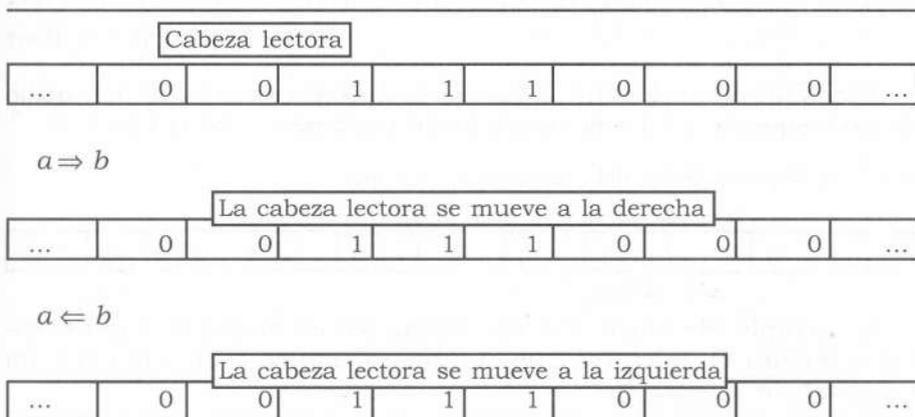
## 2.2. OPERACIONES DE UNA MÁQUINA DE POST

A continuación se ilustran los movimientos y transformaciones que se permiten al manipular la cinta descrita anteriormente y que son indispensables para alcanzar los objetivos propuestos, o sea, una presentación mecánica de algoritmos para las funciones aritméticas.

i) Movimiento de la cabeza lectora: la cabeza lectora se mueve una celda hacia la derecha (Figura 2), lo que se simboliza con  $a \Rightarrow b$ , y se lee: "Por la instrucción  $a$ , se mueve a la derecha la cabeza lectora y se lleva el control a la instrucción  $b$ ".

La cabeza lectora se mueve una celda hacia la izquierda (Figura 2), lo que se simboliza con  $a \Leftarrow b$ , y se lee: "Por la instrucción  $a$ , se mueve a la izquierda la cabeza lectora y se lleva el control a la instrucción  $b$ ".

Figura 2. Movimiento de la cabeza lectora hacia la derecha y hacia la izquierda.



ii) La operación de marcar o imprimir el símbolo: si la celda escudriñada se encuentra vacía, se simboliza  $a \vee b$ , y se lee: "Por la instrucción  $a$ , se marca y se pasa el control a la instrucción  $b$ " (Figura 3).

Figura 3. Marcar una celda vacía.

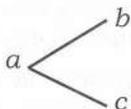


iii) La operación de borrar el símbolo: si la celda se encuentra llena se simboliza  $a \xi b$ , y se lee: "Por la instrucción  $a$ , se borra el símbolo y se pasa el control a la instrucción  $b$ " (Figura 4).

Figura 4. Marcar una celda vacía



iv) Instrucción de decisión: si la celda escudriñada por la cabeza lectora está vacía, la máquina ejecutará la instrucción *b*; si, por el contrario, la celda se encuentra llena, la máquina ejecutará la instrucción *c*. Este hecho se simboliza:



v) Instrucción de detención: indica detener todas las operaciones de la máquina y se simboliza:

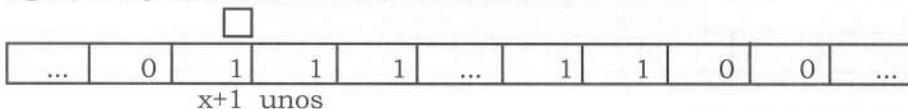


Un conjunto de instrucciones como las descritas anteriormente, recibe el nombre de *programa para una máquina de Post*.

### 2.3. REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES EN LA CINTA DE UNA MÁQUINA DE POST

Si *x* es un número natural, éste se representa en la cinta por medio de un bloque de *x + 1* símbolos tal como se muestra en la Figura 5.

Figura 5. Representación del número *x* en la cinta



Por ejemplo, el número 3 se representa por un bloque de cuatro símbolos (Figura 6), mientras que el número cero se representa con un solo símbolo. (Figura 7)

Figura 6. Representación del número 3

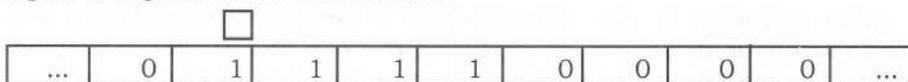
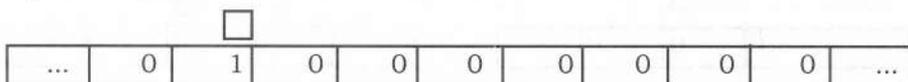
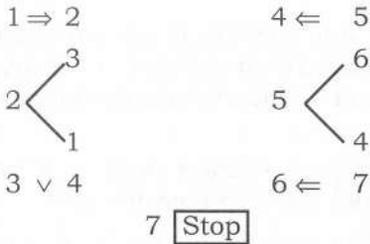


Figura 7. Representación del número cero

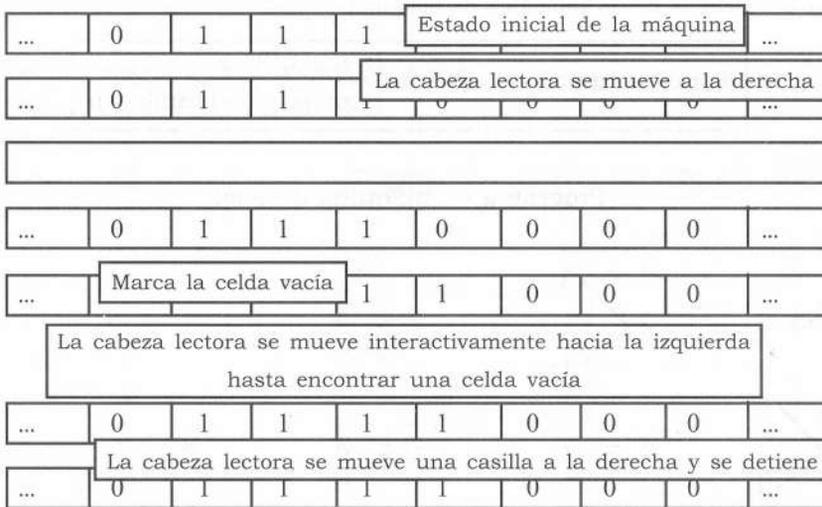


Otro ejemplo de operaciones con máquinas de Post podría ser encontrar el sucesor de un número natural. En el siguiente conjunto de instrucciones, la cabeza lectora se encuentra inicialmente ubicada sobre el símbolo extremo izquierdo. El programa agrega un símbolo a la derecha de un bloque de *n* símbolos y al final deja la cabeza lectora sobre el símbolo extremo izquierdo del bloque.



El efecto de aplicar el programa anterior a un bloque de tres símbolos; es decir, encontrar el sucesor del número 2, se muestra en la Figura 8.

Figura 8. Sucesor del número 2

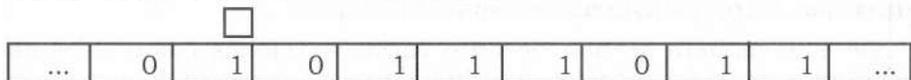


El programa da como resultado la representación matemática del sucesor de un número natural, esto es la función  $s(x) = x + 1$ .

#### 2.4. REPRESENTACIÓN DE UNA N-UPLA DE NÚMEROS NATURALES EN LA CINTA

Si  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  es una  $n$ -upla de números naturales, ésta se representa en la cinta por medio de bloques de  $x_i + 1$  símbolos separados por una celda vacía; así la tripla  $\langle 0, 2, 1 \rangle$  se representa tal como aparece en la Figura 9.

Figura 9: Representación de la tripla  $\langle 0, 2, 1 \rangle$



## 2.5. FUNCIÓN CALCULABLE EN UNA MÁQUINA DE POST

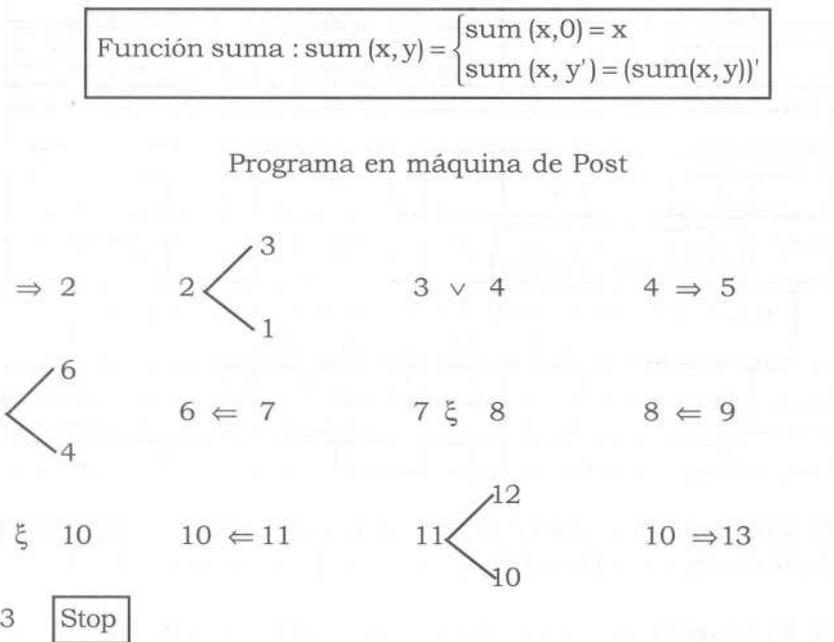
Sea  $f$  una función numérica, esto es una función cuyos argumentos pertenecen a  $\mathbb{N}^n$  y sus valores son números naturales, es decir,  $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ . Se dice que  $f$  es una función calculable en una máquina de Post si existe un programa  $P$ , tal que:

Si  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y$ , el programa  $P$ , que se aplica a  $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  da como resultado final la representación del número  $y$  en la cinta.

Si  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  no está definida, al aplicar el programa  $P$  a  $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  no se puede llegar a un término final para la secuencia de resultados.

En el programa que se muestra en la Figura 10, la cabeza lectora se encuentra inicialmente ubicada en el símbolo extremo izquierdo del primer número y calcula la suma de dos números que se encuentran separados por una celda.

Figura 10. Ejemplo de un programa de máquina de Post



Una inquietud que surge es si es posible hacer más general el proceso ubicando la cabeza lectora inicialmente en cualquier celda al principio del cómputo; el programa que responde a ello, así como los programas función predecesor, función signo, encontrar un número en la cinta y multiplicación de dos números, se pueden obtener en la dirección <http://ainsuca.javeriana.edu.co/post/>.

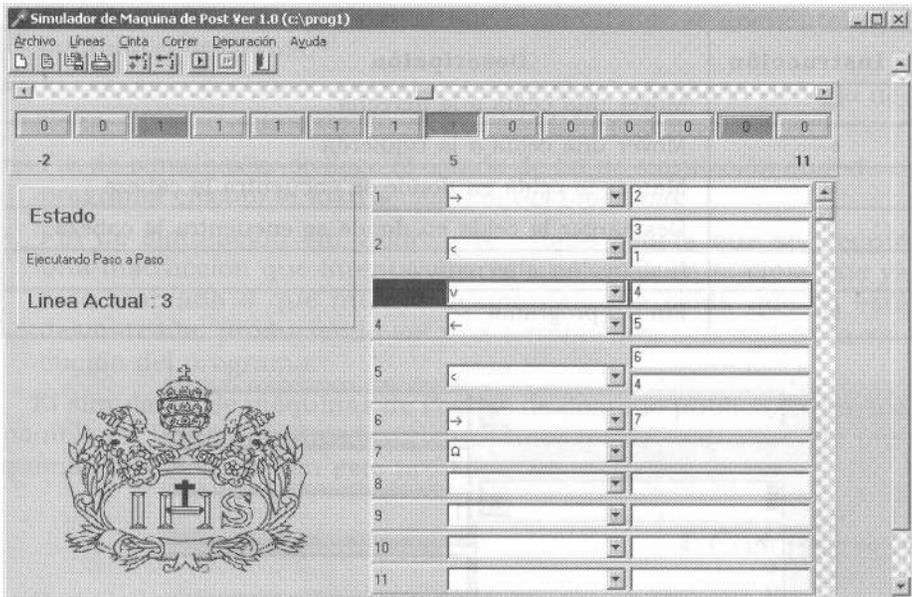
De esta manera se han descrito varias funciones calculables en máquinas de Post y se aclara intuitivamente el concepto de algoritmo.

### 3. EL SIMULADOR DE MÁQUINAS DE POST VERSIÓN 1.0

La máquina de Post descrita presenta inconvenientes muy serios cuando se procesan funciones aritméticas de cierta complejidad; cabe recordar que éstas fueron descritas antes de la aparición de los computadores. Mediante el empleo de un computador se puede elaborar la simulación de la máquina de Post para que la complejidad no sea un obstáculo insalvable en la programación y prueba de máquinas de Post construidas para propósitos específicos.

El simulador diseñado para la escritura y ejecución de algoritmos de una máquina de Post se construyó utilizando como herramienta de desarrollo *Borland Delphi 4.0*. Los requerimientos mínimos del sistema son: procesador *Pentium MMX-233Mhz*, 32 MB de memoria RAM, sistema operativo *Windows 95* o posterior y 50 MB libres en disco duro. La Figura 11 presenta la página principal del simulador desarrollado.

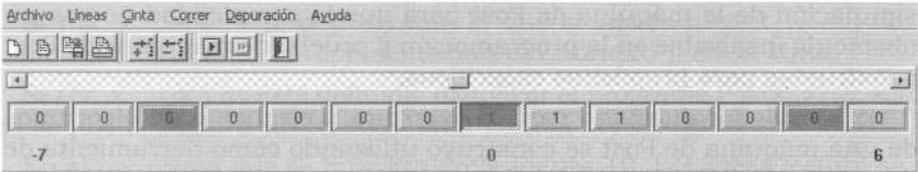
Figura 11. Simulador de máquinas de Post



El simulador de máquinas de Post contiene los elementos básicos, a saber, el editor y la cinta. La cinta se utiliza de manera que sea fácil su visualización para poder hacer el seguimiento a la ejecución de un programa; es en esta cinta donde se reflejan todas las instrucciones del algoritmo. El número de celdas, aunque en teoría de las máquinas de Post es infinito, se ha restringido a 20,000. Sin embargo, este número de celdas se puede modificar en caso de ser necesario. Cada celda puede contener un valor uno o cero; el valor uno indica que la celda se encuentra marcada y el valor cero indica una celda sin marcar.

Los algoritmos son escritos mediante un editor específico para máquinas de Post, que posee operaciones básicas de línea como *modificar*, *insertar* y *eliminar*; también se tienen operaciones de archivo como *abrir*, *guardar* y *cerrar* (Figura 12).

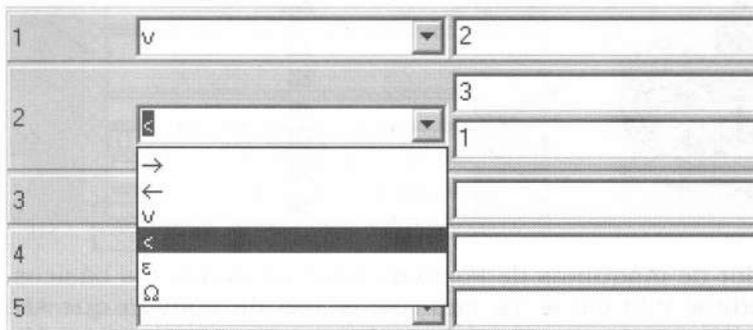
Figura 12. Barra de herramientas y cinta del simulador de máquinas de Post.



Cada línea del editor puede contener una sola instrucción que corresponde al conjunto de instrucciones válidas para máquinas de Post (Figura 13).

Figura 13. Editor para máquinas de Post

Instrucción	Descripción
→	Mover una celda a la derecha
←	Mover una celda a la izquierda
∨	Marcar la celda en donde se encuentra la cabeza
ξ	Desmarcar la celda en donde se encuentra la cabeza
<	Instrucción alternativa
Ω	Fin del programa



Ahora bien, un programa de máquinas de Post puede ser ejecutado de diferentes maneras. Una primera posibilidad es mediante la opción *Simulación* que permite correr un programa de máquinas de Post de manera que el usuario pueda observar en la cinta lo que está sucediendo; así mismo, el editor mediante líneas resaltadas, señala la instrucción que se ejecuta; las velocidades de simulación varían desde 0.1 hasta 1 segundo por instrucción. Esta opción es muy didáctica pero

tiene como inconveniente que la simulación de un programa puede ser bastante lenta.

Cuando el objetivo de la ejecución de un programa no es revisar cómo lo hace, sino conocer el resultado del algoritmo, se puede hacer uso de la opción *Ejecución* que corre el programa a mayor velocidad que en la opción de *Simulación*.

Una tercera posibilidad es hacer uso de la opción *Paso a Paso*, que permite encontrar errores en los algoritmos y facilitar su corrección, lo cual permite al usuario ejecutar una instrucción cuando él lo desee. Esta forma de ejecución se implementó, al observar la utilidad en la depuración de programas en la mayoría de herramientas de desarrollo.

En cualquiera de las tres opciones se presenta la información relacionada con el programa que está en ejecución, como es el número de línea que se procesan y el estado de la simulación, que puede ser cualquiera de los siguientes:

- Simulando: estado que indica que el simulador se encuentra ejecutando el programa.
- Simulación detenida: estado al que se llega cuando el usuario detiene, intencionalmente, la ejecución del programa.
- Fin de simulación: se llega al estado de fin de simulación cuando el programa ejecutó la instrucción *Fin del programa*.
- Fin de simulación sin valor: este estado señala que se ejecutó una instrucción que intenta marcar una celda en la cinta que ya está marcada o que intenta desmarcar una celda que ya está desmarcada, produciendo así una terminación anormal de la ejecución del programa.

El simulador de máquinas de Post es de dominio público y está disponible en <http://ainsuca.javeriana.edu.co/post/>, así como los programas mencionados en este artículo.

#### 4. CONCLUSIONES

Dada la importancia teórica de las máquinas de Post en la teoría de la computabilidad, el advenimiento de los computadores trajo consigo una optimización en los recursos didácticos, indispensables para presentar la teoría en las primeras etapas de la formación del ingeniero de sistemas y el profesional en informática matemática. Con el simulador desarrollado se facilita sustancialmente la elaboración y la prueba de los programas exigidos por el proceso de aprendizaje de este tema.

El simulador fue experimentado por estudiantes de programación algorítmica en la carrera de Ingeniería de Sistemas, quienes concluyeron que la herramienta es aconsejable utilizarla al inicio de cualquier curso de programación para que el estudiante, intuitivamente, pueda deducir el funcionamiento de las instrucciones secuenciales

alternativas y repetitivas, que permiten la construcción de algoritmos en otros lenguajes de programación.

## REFERENCIAS

- CHURCH, A. "An unsolvable Problem of Elementary Number Theory". En: *Amer. J. Math.* 58. 1936. pp. 345-363.
- POST, E. "Finite Combinatory Processes-Formulation 1". En: *Journal of Symbolic Logic*. October 1936, pp. 103-105.
- TURING, A. "On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem". En: *Proceedings of the London Mathematical Society*. Mayo 1936, pp. 230-265.
- URREGO, N. "Una visión introductoria de la teoría de recursión y del concepto de calculabilidad". *XV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, 1998.
- USPENSKI, V., *La máquina de Post*. Moscú: Mir, 1983.
- \_\_\_\_\_, *Leçons sur les fonctions calculables*. Paris: Hermann, 1966.