APLICACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE DATOS EN LA ENSEÑANZA DE LA TEORÍA DE GRUPOS

Patricia Hernández Romero *
Alvaro Duque, S. J. *
Nelson Urrego Peña *
Jorge García Pabón **

Resumen: en este artículo se presenta una introducción a la teoría de grupos, mediante el concepto de simetrías de un polígono regular. Se muestra un software, desarrollado en la Universidad Javeriana, que permite la construcción de las tablas de grupos diédricos de diferente orden, la visualización del grafo y la simplificación de palabras mediante una simulación animada sobre el grafo.

Abstract: in this paper an introduction to the group theory is presented by means of the regular polygon symmetry concept. A software developed in the Javeriana University, which allows the construction of the dihedric group tables of different order, the visualization of the graph and the simplification of words through an animated simulation on the graph is showed here.

1. Introducción

La teoría de grupos es una rama de las matemáticas, que tiene por objeto de estudio una estructura algebraica denominada grupo; esto es, un conjunto dotado de un procedimiento que permite combinar sus elementos mediante unas sencillas reglas.

Como lo expresarían Baumslag y Chandler [1972]:

> "... Los grupos aparecen en un sorprendente número de materias que aparentemente no están relacionadas entre sí. Así se encuentra en la cristalografía y en la mecánica cuántica, en la geometría y en la topología, en el análisis y en el álgebra, en la física, en la química y aún en la biolo-

* Profesores del Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Javeriana.

** Ingeniero Electrónico, Pontificia Universidad Javeriana, Profesor Instructor, Departamento de Ingeniería de Sistemas, Pontificia Universidad Javeriana.

gía... Los grupos pueden describir la simetría; en realidad muchos de los grupos que se encuentran en la matemática son el producto del estudio de la simetría. Se explica así el por qué de la abundancia de los grupos.

Aunque los grupos son fruto del estudio de otras materias, el estudio de los grupos es sumamente interesante por sí mismo. Existe una intensa investigación de ellos que atrae la imaginación y la dedicación de un gran número de matemáticos."

La formación en álgebra abstracta es muy importante para los alumnos de informática matemática y licenciatura en matemáticas. Dentro de las estructuras de esta área, la teoría de grupos ocupa un lugar central y más de un ingeniero se ha visto tentado por incursionar en esta teoría; ha encontrado dificultades en el cálculo de tablas de grupo. De hecho, dentro de nuestra experiencia docente también hemos detectado las dificultades que tienen los estudiantes al enfrentarse a la elaboración de las tablas de grupo.

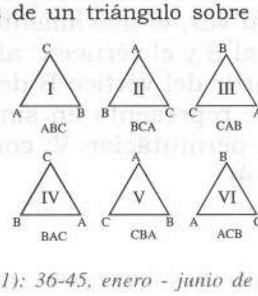
En este artículo nos proponemos mostrar que la estructura de grupo, suficientemente conocida en matemática pura, puede ponerse al alcance de un estudiante promedio, en una carrera donde las matemáticas tengan una componente importante, mediante la enseñanza asistida por computador. Nos ha parecido importante mostrar que la tecnología actual proporciona instrumentos para superar obstáculos pedagógicos, generando herramientas para estar a la altura de las exigencias teóricas.

Teniendo en cuenta los problemas que se han presentado en la materia de teoría de grupos, hemos desarrollado una herramienta que permite generar estas tablas de una manera automática. Esta herramienta se presentará más adelante en el artículo.

1.1 Introducción a la teoría de grupos

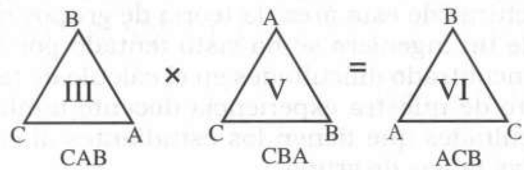
Una noción intuitiva de la situación se puede obtener a través de un ejemplo de un grupo finito de seis elementos. La Figura 1 representa seis posiciones del triángulo I, donde los triángulos II y III resultan de las rotaciones 240° y 120° respectivamente, alrededor del centro del triángulo I. Estos movimientos dan por resultado todas las permutaciones de los vértices del triángulo I. Los triángulos IV, V y VI, resultan de la reflexión del triángulo I con respecto a sus tres alturas; cada una de éstas reflexiones deja fijo un vértice del triángulo I y permuta entre sí los otros dos vértices.

Figura 1. Movimientos rígidos de un triángulo sobre sí mismo.



El producto de dos movimientos se define como el movimiento que resulta después de haber ejecutado los dos movimientos en un determinado orden. Por ejemplo, al componer el movimiento representado en el triángulo III (CAB) seguido del movimiento representado en el triángulo V (CBA), el resultado es el triángulo VI (ACB), ya que es tomar el triángulo III y aplicarle el movimiento del triángulo V. El triángulo V es una reflexión con respecto a la altura del vértice A del triángulo III. En la Figura 2 se ilustra este ejemplo.

FIGURA 2 – Producto de III con V.



La expresión anterior del producto es muy gráfica, pero no es muy práctica; por esta razón, se introduce una simbología especial que, sin suprimir información, no ocupe tanto espacio como la simbología utilizada hasta el momento. De los diferentes métodos de simbolizar lo anterior, vamos a utilizar la representación por permutaciones, que, para el ejemplo de la Figura 1, quedaría de la siguiente forma:

Figura 3. Representación por permutaciones de los seis movimientos rígidos.

$$\underset{I}{\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}} \underset{II}{\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}} \underset{III}{\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}} \cdot$$

$$\underset{IV}{\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}} \underset{V}{\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}} \underset{VI}{\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}}$$

Esta simbología se interpreta así: en la opción I de la Figura 3, se tiene una rotación de 0°, el vértice A pasa al vértice A, el vértice B pasa al vértice B y el vértice C pasa al vértice C; a esta permutación se le llama la permutación **identidad**. En el movimiento rígido III, la permutación hace pasar a A en C, a B en A y a C en B, y corresponde a una rotación de 120°. A su vez, el movimiento rígido V hace pasar el vértice A al C, el vértice B al B y el vértice C al A, y corresponde a una reflexión en la altura a partir del vértice B del triángulo. El producto realizado en la Figura 2 se representa en símbolos transcribiendo la permutación III y luego la permutación V; como resultado se obtiene la permutación VI (Figura 4).

FIGURA 4. Representación de la multiplicación con símbolos.

$$\underset{III}{\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}} \times \underset{V}{\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}} = \underset{VI}{\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}}$$

1.2 La tabla del grupo

Realizar la tabla del grupo significa representar todos los productos posibles en forma tabular. La tabla de los productos de todos los movimientos rígidos, que estamos considerando, es la siguiente:

TABLA 1. Todos los productos de movimientos rígidos del triángulo.

$\times$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$

La Tabla 1 presenta los productos de todos los movimientos rígidos considerados. Puesto que el producto no es conmutativo, generalmente, se hace necesario adoptar una convención; en la aquí adoptada, denominada de fila por columna, el primer factor corresponde a la primera columna y el segundo factor es tomado de la primera fila.

El conjunto de los movimientos se denomina el **grupo** de los movimientos rígidos del triángulo equilátero. Los movimientos se denominan los **elementos** del grupo. Aquí, el grupo tiene seis elementos; por tanto, se puede decir que el **orden** del grupo es seis. Como el grupo no cumple la ley conmutativa, se habla de un grupo **no conmutativo**. Esto se puede comprobar, realizando el producto del movimiento rígido V por el movimiento rígido III; el resultado es el movimiento rígido IV como se muestra en la Figura 5.

FIGURA 5. El producto de la multiplicación V x III.

$$\underset{V}{\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}} \times \underset{III}{\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}} = \underset{IV}{\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}}$$

Es muy natural preguntarse acerca del producto de un elemento consigo mismo, lo que permite simplificar la simbología e introducir la noción de **generador**. Así, por ejemplo, al multiplicar tres veces consigo mismo el elemento II, el resultado es el elemento identidad (Elemento I), como se muestra en la Figura 6.

FIGURA 6. El producto de la multiplicación II x II x II.

$$\underset{II}{\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}} \times \underset{II}{\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}} \times \underset{II}{\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}} = \underset{I}{\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}}$$

Con estas consideraciones, se abre paso a la operación con exponentes. Por ejemplo, el producto anterior se representa como $II^3 = I$. Se puede ver que el movimiento V, repetido dos veces, también vuelve el triángulo a la posición original. Se suele decir que el elemento II tiene **orden** 3 y el elemento V tiene **orden** 2. Persiguiendo una notación aún más compacta, se puede escribir el movimiento identidad con la letra minúscula *e*, el movimiento II con la letra *a* y el movimiento III resulta igual a a^2. Al utilizar, por ejemplo, la letra *b* para el movimiento IV, es posible representar el movimiento V como *ba* y el movimiento VI como *ab*. La Tabla 1 puede ser transformada entonces en la Tabla 2.

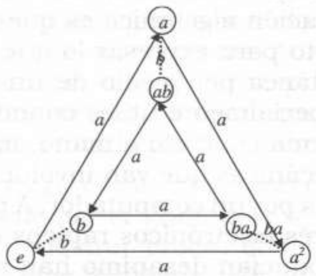
TABLA 2. Movimientos escritos con la terminología breve.

	e	a	a^2	b	ba	ab
E	e	a	a^2	b	ba	ab
A	a	a^2	e	ab	b	ba
a^2	a^2	e	a	ba	ab	b
b	b	ba	ab	e	a	a^2
ba	ba	ab	b	a^2	e	a
ab	ab	b	ba	a	a^2	e

1.3 EL GRAFO DE UN GRUPO FINITO

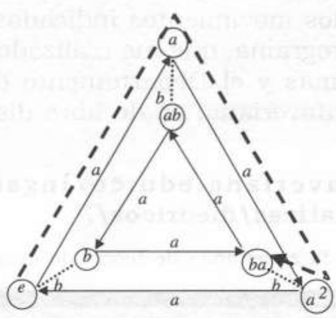
Una forma más simple de calcular la Tabla 2 es mediante la representación de los movimientos, utilizando un grafo [Grossman y Magnus,1964]. En cada uno de los vértices va el movimiento y se utilizan dos tipos de arcos. Cada uno de los tipos de arco corresponde a cada uno de los generadores. Esto produce un grafo dirigido. En la Figura 7, se muestra el grafo correspondiente a los movimientos del triángulo.

FIGURA 7. Grafo correspondiente a los movimientos del triángulo.



En cada uno de los vértices del grafo existen dos posibles caminos: uno, utilizando el generador *a*, el cual es un arco dirigido; el otro camino es el producido por el generador *b*, el cual es un arco no dirigido. Con esta herramienta, es posible calcular de una manera sencilla expresiones generales de productos de movimientos rígidos. Por ejemplo, puede verse en el grafo que la expresión a^2b es igual a *ba*; lo único que hay que hacer para calcular la expresión es realizar el seguimiento de ésta en el grafo, a partir del vértice identidad. Para el ejemplo, anterior el recorrido es el mostrado en la Figura 8.

FIGURA 8. La expresión a^2b simplificada en el grafo.



2. LA IMPLEMENTACIÓN EN EL COMPUTADOR

El ejemplo hasta ahora presentado, describe el grupo de simetrías de un triángulo; sin embargo, si se desease analizar el grupo de simetrías de un polígono regular de *n* lados, habría que manipular permutaciones de *n* vértices, tarea bastante compleja, en la medida en que *n* se incrementa. Por otra parte, se pueden, utilizar de igual manera, dos generadores para obtener una tabla semejante a la Tabla 2. Como el grafo es bastante sencillo de obtener, por analogía con el grafo de la Figura 7, la última tabla mencionada se puede elaborar con mayor eficiencia.

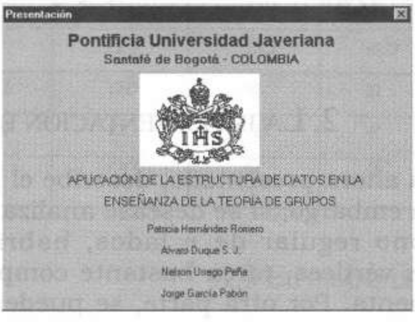
La teoría de grafos está íntimamente ligada con la teoría de grupos [Bollobas, 1985]:

"...los grafos no nos dicen nada acerca del grupo que no pueda expresarse algebraicamente. Sin embargo, la desventaja de la aproximación algebraica es que se requieren muchas líneas de texto para expresar lo que se representa de forma casi instantánea por medio de un solo grafo. Estos diagramas son especialmente útiles cuando requerimos solucionar un problema concreto a mano, mas aún las técnicas puramente mecánicas que van involucradas son ideales para ser procesadas por un computador. A partir de la llegada de los computadores electrónicos rápidos entonces muchos problemas que producían desanimo han sido resueltos por estos métodos..."

Con la ayuda de las estructuras de datos y el programa *C++ Builder* [Villalobos, 1996], se elaboró un software que permite obtener todo el provecho del grafo para elaborar la tabla de movimientos correspondiente. Este software resulta, además, de un gran valor didáctico ya que facilita la enseñanza de la teoría de grupos (Figura 9). El desarrollo del software se basa en la aplicación de la teoría de grupos a la familia de grupos, de orden 6 hasta 80, que pertenecen a la familia de los grupos diédricos. Un grupo diédrico de orden *n*, es el conjunto de simetrías de un polígono de *n* lados, donde una simetría realiza un movimiento que puede ser de rotación con respecto al centro del polígono o de reflexión con respecto a un eje adecuado. La operación del grupo consiste en combinar los movimientos indicados por las simetrías en un orden dado. Este programa, que fue realizado por el Departamento de Ingeniería de Sistemas y el Departamento de Matemáticas de la Pontificia Universidad Javeriana, es de libre distribución y se puede obtener en la página:

http://ainsuca.javeriana.edu.co/ingsis/departamento/investigacion/matematicas/diedricos/.

FIGURA 9. Software para la enseñanza de teoría de grupos.

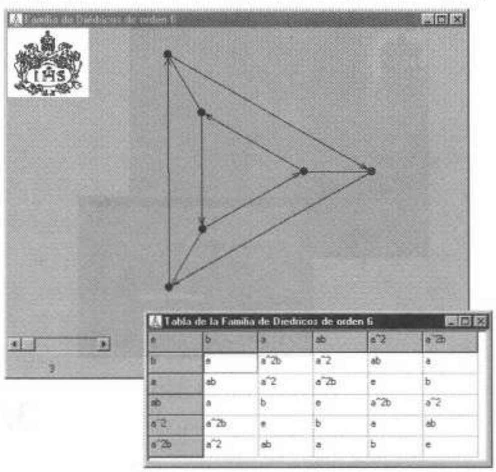


Como se sabe, la familia de grupos diédricos está numerada de acuerdo con el número de lados del polígono regular, cuyas simetrías quedan descritas por los elementos del grupo. En nuestro caso, se desarrolla la implementación de los grupos diédricos a partir de D_3 hasta D_{40}; esto comprende desde el grupo de simetrías del triángulo, hasta el grupo de simetrías del polígono regular de 40 lados.

El manejo del software es mediante menús interactivos con el usuario. Inicialmente, es posible escoger el número del grupo diédrico deseado, con lo que se visualiza el grafo asociado a dicho grupo, así como su correspondiente tabla de movimientos. Además, tiene la opción de introducir una palabra, simplificarla e interpretarla como una trayectoria en el grafo, que parte del elemento identidad y termina en el elemento del grupo representado por la palabra.

El software permite elegir el número n con el que se desea trabajar y presenta, inmediatamente, el grafo correspondiente. Mediante la selección de la opción "mostrar tabla", el software presenta la tabla respectiva al grupo de orden $2n$ (Figura 10). Al oprimir el botón asignado como "evaluar" (Figura 11), aparece una ventana donde se pueden introducir expresiones algebraicas, activando o desactivando el simulador correspondiente.

FIGURA 10. Grafo del grupo diédrico de orden 6 representado por el software.



Para introducir la palabra a simplificar, se selecciona la opción correspondiente al generador y aquélla va apareciendo en la pantalla. Así mismo, es posible escoger o asignar el exponente con el que se desea trabajar (Figura 12). En esta opción, es posible graduar la velocidad de simulación.

FIGURA 11. Barra de herramientas para simplificación de palabras.

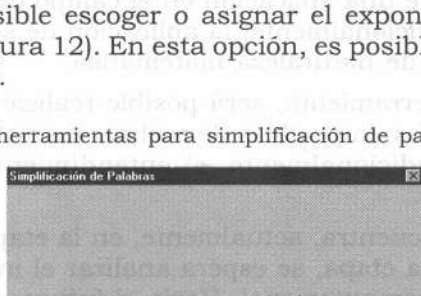
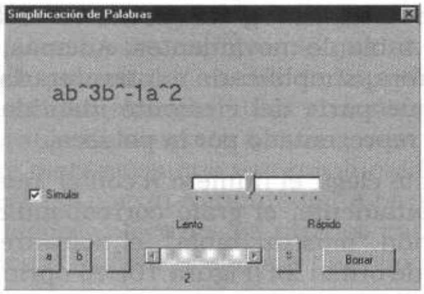
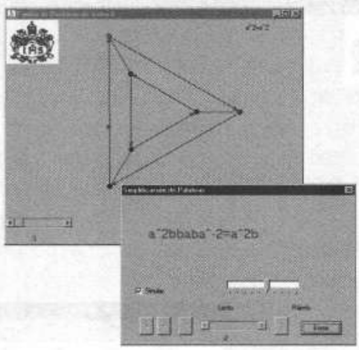


FIGURA 12. Introducción de palabras en el Software.



Los resultados de un ejemplo de simulación de la simplificación de una palabra se muestran en la Figura 13.

FIGURA 13. Simulación de la simplificación de una palabra con el grafo.



3. CONCLUSIONES

El software desarrollado es apenas un ejemplo del diseño, desarrollo e implementación de una aplicación en el campo del álgebra abstracta, que muestra, adicionalmente, la aplicación de soluciones de ingeniería a problemas de naturaleza matemática.

Gracias a esta herramienta, será posible realizar ejercicios de teoría de grupos y grafos, imposibles de realizar manualmente. La herramienta facilitará, adicionalmente, el entendimiento de la teoría de los grupos diédricos.

El software se encuentra, actualmente, en la etapa de pruebas con estudiantes. En esta etapa, se espera analizar el impacto pedagógico de la herramienta computacional. Hacia el futuro, se desea, además, diseñar nuevos módulos para el manejo de subgrupos y desarrollar un programa análogo sobre otro tipo de familias de grupos y otro tipo de estructuras algebraicas diferentes a los grupos.

REFERENCIAS

Baumslag B. y Chandler, B., *Teoría de grupos,* Mc Graw Hill, México, 1972.

Bollobas, B., *Graph Theory: An Introductory Course,* Springer, Berlin, New York, 1985.

Grossman, Y. y Magnus, W., *Groups and Their Graphs,* Random House, New Mathematical Library, Toronto, 1964.

Villalobos, J., *Diseño y manejo de estructura de datos,* Mc Graw Hill, Santa Fe de Bogotá, 1996.