

# ANÁLISIS DE LA ROBUSTEZ EN LA ESTABILIDAD Y EL DESEMPEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL LATERAL PARA AUTOMÓVILES\*

Luis David Prieto Martínez\*\*

**Resumen:** este artículo presenta una aplicación práctica de una moderna metodología para analizar los efectos de incertidumbres estructuradas y no estructuradas en la estabilidad interna y desempeño de un sistema de control multivariable. El método propuesto está basado en una combinación de dos conceptos matemáticos principales: el primero, *Linear Fractional Transformations* (LFT), utilizado como función matricial que permite la representación unificada de diferentes tipos de incertidumbre en un modelo; el segundo, la *Structured Singular Value function* (SSV o  $\mu$ ), en términos de la cual es posible establecer una condición necesaria y suficiente para la prueba de robustez con una moderada complejidad computacional. La metodología es aplicada al Sistema de Control Lateral de un Vehículo (VLCS) desarrollado por un grupo de investigación del Departamento de Automatización del Politecnico di Torino en colaboración con el Centro Ricerca FIAT (CRF) y experimentalmente probado en un automóvil Fiat Brava 1600 ELX en una autopista italiana.

**Palabras clave:** control, control multivariable, automatización industrial.

**Abstract:** This paper presents a practical application of a modern methodology for analyzing the effects of parametric and unstructured uncertainty in the internal stability and performance of a Multivariable control system. The proposed approach is based on the complementary combination of two main mathematical concepts: first, the Linear Fractional Transformation (LFT) used as a matrix function that allows a unified representation of different types of model uncertainty. The second, the Structured Singular Value Function (SSV or  $\mu$ ) that provides a necessary and sufficient condition for the robustness test with a moderate amount of computation complexity. The methodology is applied to a Vehicle Lateral Control System (VLCS) developed by a re-

---

\* Fecha de recepción: 1 de abril de 2004. Fecha de aceptación para publicación: 30 de septiembre de 2004.

\*\* Ingeniero electrónico, Pontificia Universidad Javeriana, candidato de doctorado Politécnico di Torino. Correo electrónico: luis.prieto@polito.it.

search team of the Automation Department of the Politecnico di Torino in partnership with Centro Ricerca FIAT (CRF) and experimentally tested in a Fiat Brava 1600 ELX in an Italian Highway.

**Key words:** control, multivariable control, industrial automation.

## INTRODUCCIÓN

Una práctica común en el diseño de sistemas de control multivariable es el relajamiento del nivel de complejidad de la planta a través de suposiciones que pueden ignorar aspectos importantes como el acople de dinámicas, la variación de parámetros a lo largo del ciclo de vida de la planta, la no linealidad o los efectos parásitos en altas frecuencias. Por otra parte, modelos innecesariamente complejos pueden determinar condiciones de no viabilidad en la síntesis de la ley de control reforzando, de esta manera, la muy lamentada separación entre la teoría y la práctica en el diseño de sistemas de control, común en la década de 1970.

La búsqueda de equilibrio entre estos dos escenarios es el origen de la necesidad de estructurar técnicas de análisis de robustez que puedan apoyar al ingeniero de control en la identificación cuantitativa del conjunto de plantas para las cuales el sistema de control sintetizado será estable y mantendrá sus especificaciones. Los desarrollos recientes en este campo pueden ser examinados con base en dos criterios fundamentales: que el marco conceptual utilizado para representar la incertidumbre del modelo sea en forma estructurada (incertidumbre paramétrica) o como función de la frecuencia (incertidumbre no estructurada) y que el conjunto de condiciones suficientes y necesarias se expresen en forma práctica a través de algoritmos viables y numéricamente estables. Por ejemplo, los métodos basados en el criterio de Nyquist [Fadali, LaForge y Sonbol, 2001] han demostrado que una estimación completa de la estabilidad relativa es posible si las perturbaciones de ganancia y fase son consideradas en forma simultánea. Esta aproximación ofrece ventajas significativas porque si los segmentos de línea y de arcos circulares constituyen los límites del conjunto recíproco de valores de Nyquist de una función de transferencia, y si dichos segmentos y arcos son conocidos, entonces se puede determinar el margen de estabilidad complejo.

Al repetir el proceso a diferentes frecuencias se establece el conjunto de márgenes de estabilidad compleja que constituyen, en sí mismos, la herramienta principal para el análisis de estabilidad. Sin embargo, este método presenta dos grandes desventajas: en primer lugar, la optimización del algoritmo, pues el conjunto de valores recíprocos de Nyquist del cociente de dos polinomios intervalares es una estructura de incertidumbre compleja y su cálculo es particularmente intrincado por la no convexidad del problema y, en segundo lugar, no es posible desarrollar el análisis de robustez del desempeño dentro de este marco teórico. Recientemente se han utilizado ampliamente los algoritmos genéticos (GAs) para resolver problemas de optimización muy complejos tales como estimación de parámetros de control [Sheta y Jong, 1996], control óptimo [Hunt, 1992]; [Kwok y Sheng, 1994] y

diseño de sistemas de control robustos [Tang, Man y Gu, 1996], [Li et al., 1996], [Marrison y Stengel, 1997], [Yahiaoui, Haman y Rocaries, 1997]. La extensión de estos algoritmos a la solución de problemas de estabilidad robusta en sistemas multivariables ha sido casi inmediata y efectivamente demostrada.

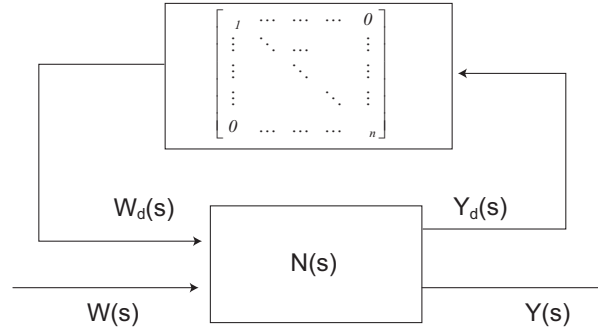
Las ventajas específicas de los GAs en esta aplicación se basan en el hecho de que no requieren linealidad, continuidad u otras restricciones típicas en las aproximaciones clásicas. Más aún, los algoritmos genéticos ofrecen el beneficio de que todos los componentes del espacio viable son potencialmente disponibles para exploración. Esto mejora las propiedades de robustez de la búsqueda genética y de los resultados que se pueden obtener para los problemas bajo investigación. Algunos investigadores han presentado resultados motivadores para la continuidad del trabajo aplicando GAs al análisis de estabilidad robusta de sistemas no lineales [Fadali, Zhang y Louis, 1999]. Sin embargo, una gran limitación de esta aproximación proviene de su incapacidad para generalizar conclusiones. De hecho, si la prueba de robustez utilizando GAs no tiene éxito, no es posible dar ninguna conclusión acerca de la estabilidad o inestabilidad del sistema de control bajo análisis.

El método que se propone en este artículo para el análisis de la robustez de sistemas de control está basado en la combinación complementaria de dos conceptos matemáticos; el primero, las Transformaciones Lineales Fraccionadas (LFT), utilizadas como una función matricial que permiten unificar la representación de diferentes tipos de incertidumbre en el modelo. Esta es una ventaja muy importante porque el análisis de la robustez de sistemas de control multivariable puede ser extendido a incertidumbres paramétricas más que a incertidumbres no estructuradas. El segundo concepto matemático es la Función de Valor Singular Estructurado (SSV o  $m$ ) que provee la condición necesaria y suficiente para la prueba de robustez con una moderada complejidad computacional. Otra contribución importante derivada del uso de la SSV es la posibilidad de transformar la prueba de robustez del desempeño en una prueba tradicional de estabilidad robusta utilizando la representación en forma de LFT (para una explicación detallada ver [Zhou y Doyle, 1998], superando, de esta forma, las limitaciones de otros métodos modernos (GAs, teorema de Kharitonov).

En el conjunto de las matrices funcionales, las LFT ofrecen un marco general para representar el conjunto de plantas a ser controladas como canales normalizados de retroalimentación (Figura 1).

En la Figura 1,  $N(s)$  representa el sistema de control a ser analizado e incluye la conexión en retroalimentación de la planta y el controlador diseñado. En este marco, la Función de Valor Singular Estructurado (SSV o  $m$ ) provee una condición necesaria y suficiente para la estabilidad robusta [Zhou y Doyle, 1998]: un sistema retroalimentado (como el

Figura 1. Modelo aumentado de incertidumbre para el análisis de robustez.



Fuente: el autor.

indicado en la Figura 1) es internamente estable para todas las posibles perturbaciones normalizadas  $\|\Delta(j\omega)\|_{\infty} \leq 1$  si y sólo si el sistema nominal de lazo cerrado es estable y  $\sup_{\omega} \{\mu_s [N_{Y,W_d}(j\omega)]\} < 1$ . Teniendo en cuenta que un cálculo exacto del  $m$  no es matemáticamente viable, algunos algoritmos especializados [Balas et al., 2001] pueden determinar sus límites superior e inferior. Por esta razón, la condición de estabilidad robusta descrita anteriormente está referenciada al límite superior del  $m$ . A través de este artículo se muestra una aplicación práctica de estos conceptos en el análisis de robustez de un sistema de control multivariable. La metodología propuesta se desarrolla a través de tres pasos fundamentales:

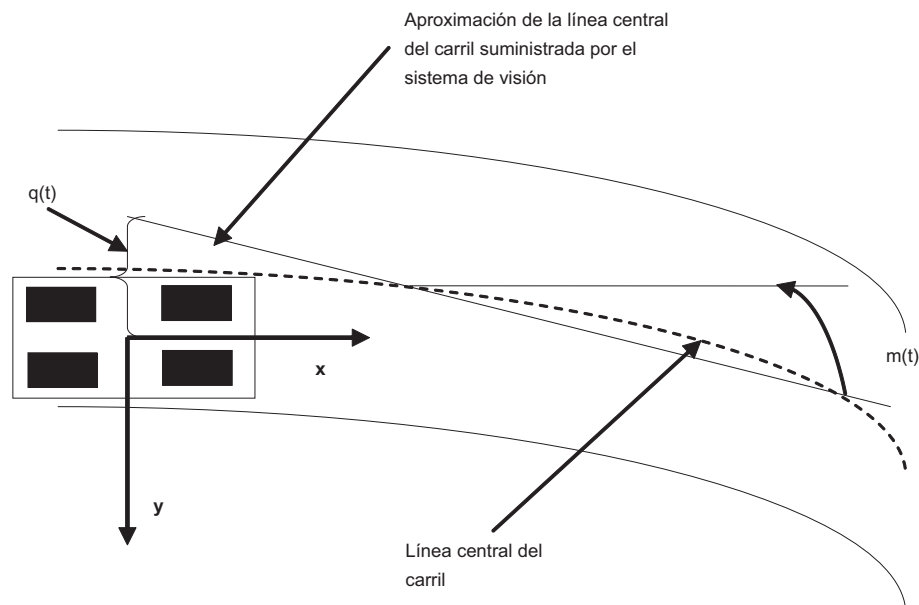
- **Análisis del sistema nominal:** el objetivo de esta etapa es estructurar una base conceptual sólida para comprender los efectos que introduce el controlador y valorar los resultados futuros del análisis de robustez.
- **Análisis de estabilidad robusta:** en este paso se analizan los efectos de la incertidumbre paramétrica y de las dinámicas no modeladas (incertidumbre multiplicativa en salida) en la estabilidad interna del sistema controlado. Las conclusiones se orientan a sopesar el impacto de los dos tipos de incertidumbre y a determinar cuantitativamente los límites de estabilidad robusta.
- **Análisis de desempeño robusto:** una vez verificadas las características de estabilidad robusta, se analizan los efectos en la función de sensibilidad de las incertidumbres admisibles deducidas en el paso anterior.

El sistema a ser analizado es el Sistema de Control Lateral de un Automóvil (VLCS), cuyo principal objetivo es mantener el automóvil dentro del carril de una autopista a través del control automático de su sistema de dirección (*automatic lanekeeping*). Este problema adquiere cada vez mayor importancia debido a la tendencia en la industria automotriz de desarrollar vehículos inteligentes (IVS) que mejoren la segu-

ridad en el manejo y reduzcan la carga de trabajo del conductor. Resultados de investigación en diferentes contextos [Gerdes y Rosseter, 2001], [Kojsecká et al., 1997], [Kojsecká, 1997], [Cerone, Chinu y Regruto, 2002] han determinado una amplia variedad de configuraciones para el diseño e implementación de VLCS. Una de las aproximaciones más interesantes, que evita modificaciones estructurales en las autopistas (*look-down reference systems*), consiste en la integración de sensores de visión en el automóvil para determinar la posición del carril y la desviación lateral del vehículo (*look-ahead sensing schemes*). El VLCS a ser analizado fue desarrollado por un grupo de investigación del Departamento de Automatización del Politecnico di Torino en asocio con el Centro de Investigación FIAT (*Centro Ricerca FIAT, CRF*) y experimentalmente probado en un Fiat Brava 1600 ELX en una autopista italiana [Cerone, Chinu y Regruto, 2002]. El sistema de control está compuesto por los siguientes elementos:

- El sistema de visión, que incluye una video cámara (localizada en la parte interna del vidrio panorámico) y los algoritmos de procesamiento de imagen que suministran una estimación de dos variables: el ángulo ( $m$ ) entre la aproximación lineal del centro del carril y el eje longitudinal del automóvil a una cierta distancia de previsión ( $L$ ) y la distancia ( $q$ ) medida a lo largo del eje  $y$  y entre la mencionada aproximación lineal y el centro de gravedad del vehículo (Figura 2).

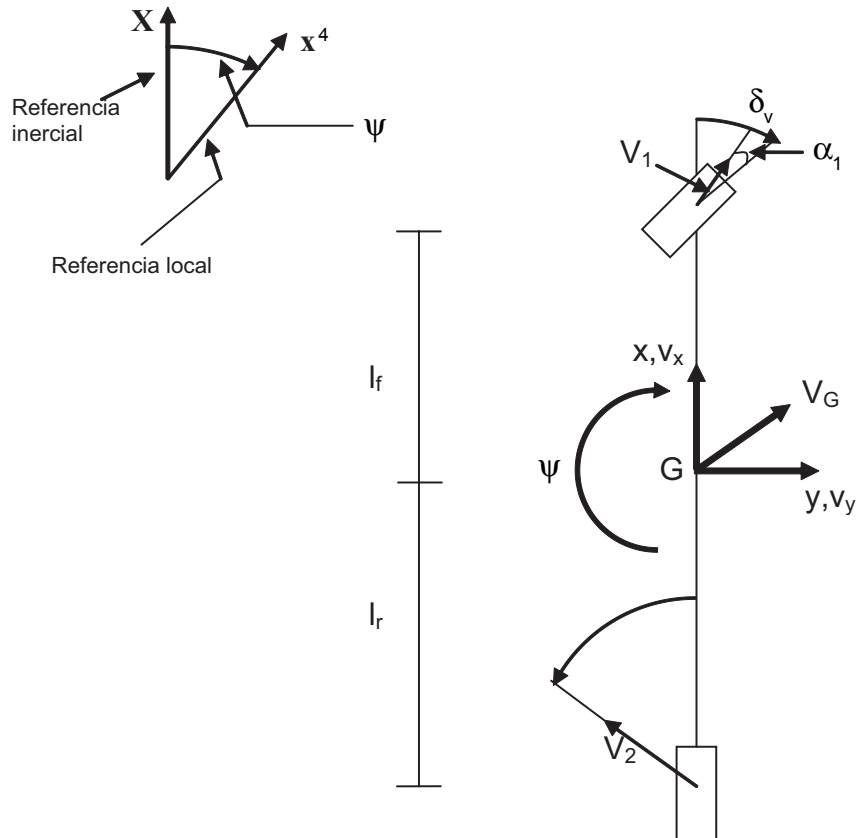
Figura 2. Variables estimadas por el sistema de visión.



Fuente: el autor

- El control diseñado, que usa los valores estimados de  $q$  y  $m$  para determinar el ángulo del sistema de dirección del vehículo ( $\delta_v$ ) y que le permite mantenerse dentro del carril (Figura 3).
- El actuador del sistema de dirección del automóvil, un motor DC sin escobillas controlado localmente.
- Un computador personal (con microprocesador Intel 486) adaptado para aplicaciones industriales, donde son ejecutados los algoritmos de visión y control.

Figura 3. Modelo nominal usado para diseño del controlador



Fuente: el autor.

Al acoplar las dos ruedas frontales con las dos posteriores (Figura 3) se obtiene un modelo nominal conocido como el modelo de bicicleta (ver ecuaciones (1) y (2)) y, también, al considerar las siguientes suposiciones (consistentes con un escenario de prueba en autopista) [Cerone, Chinu y Regruto, 2002]:

- Superficie regular y plana de la autopista.
- Largos radios de curvatura ( $K_L^{-1} > 500$  m), a ser incluidos en el modelo de sistema como disturbios exógenos.

- Velocidad longitudinal ( $v_x$ ) constante.
- Pequeños ángulos de deslizamiento (frontal y posterior) y de dirección.

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \ddot{\psi} \\ \dot{q} \\ \dot{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-a_1}{m_v v_x} & \frac{-m_v v_x^2 + a_2}{m_v v_x} & 0 & 0 \\ \frac{a_3}{I_\psi v_x} & \frac{-a_4}{I_\psi v_x} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & v_x \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ \psi \\ q \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & 0 \\ 0 & -L v_x \\ 0 & v_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_v \\ K_L \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} q \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ \psi \\ q \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_v \\ K_L \end{bmatrix} \quad (2)$$

Con:

$$a_1 = c_f + c_r; a_2 = a_3 = c_r l_r + c_f l_f; a_4 = l_f^2 c_f + l_r^2 c_r; b_1 = \frac{c_f k}{m_v}; b_2 = \frac{c_f l_f}{I_\psi}; k = \frac{\pi}{180 * 18}$$

$v_i$ : vector de velocidad lineal ( $x$  y  $y$ ).

$\psi$ : ángulo de desviación del vehículo.

$m_v$ : masa total del vehículo.

$I_\psi$ : inercia total del vehículo alrededor de su centro de gravedad.

$L$ : distancia de previsión usada por el sistema de visión.

$c_i$ : coeficiente de agarre de las llantas (frontales y posteriores).

## 1. ANÁLISIS DEL SISTEMA NOMINAL

### 1.1 MODELO LINEAL DE LA PLANTA

Las ecuaciones de estado y salida, de acuerdo con los parámetros del Fiat Brava 1600 ELX, son:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \ddot{\psi} \\ \dot{q} \\ \dot{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.14 & -24.19 & 0 & 0 \\ 1.41 & -4.83 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 26.38 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ \psi \\ q \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.04 & 0 \\ 0.02 & 0 \\ 0 & -303.47 \\ 0 & 26.38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_v \\ K_L \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} q \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ \psi \\ q \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_v \\ K_L \end{bmatrix} \quad (4)$$

## 1.2 MODOS Y RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LA PLANTA NOMINAL

Las ecuaciones (3) y (4) describen un sistema lineal multivariable de dos entradas y dos salidas cuya respuesta en frecuencia puede ser analizada aplicando diferentes técnicas a su función matricial de transferencia  $G(s)$ :

$$\begin{bmatrix} Q(s) \\ M(s) \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} \Delta_v(s) \\ K_L(s) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{con } G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

compuesta por:

$$G_{11} = \frac{-0.0408s^2 - 0.2569s - 4.5014}{s^4 + 8.979s^3 + 54.2797s^2}$$

$$G_{12} = \frac{-303.47s^3 - 2028.49s^2 - 10219.66s + 37798.93}{s^4 + 8.979s^3 + 54.2797s^2}$$

$$G_{21} = \frac{-0.0272s^2 - 0.1706s}{s^4 + 8.979s^3 + 54.2797s^2}$$

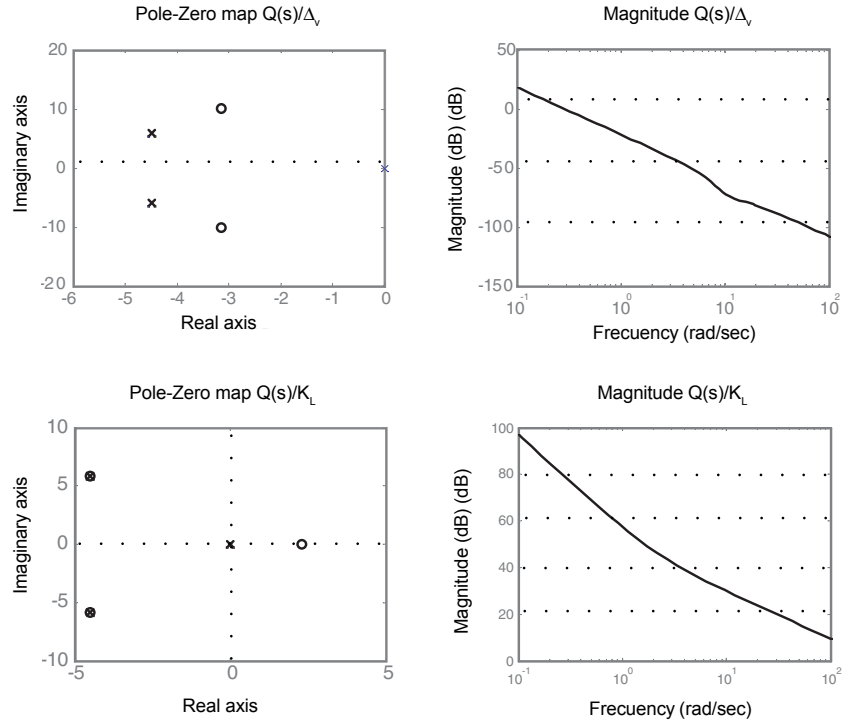
$$G_{22} = \frac{26.38s^3 + 236.94s^2 + 1432.38s}{s^4 + 8.979s^3 + 54.2797s^2}$$

En la Figura 4 se muestran el diagrama de polos y ceros así como el diagrama Bode de magnitud para las funciones de transferencia  $Q(s)/\Delta_v(s) = G_{11}$  y  $Q(s)/K_L(s) = G_{12}$ . Con base en estos gráficos, puede determinarse formalmente que:

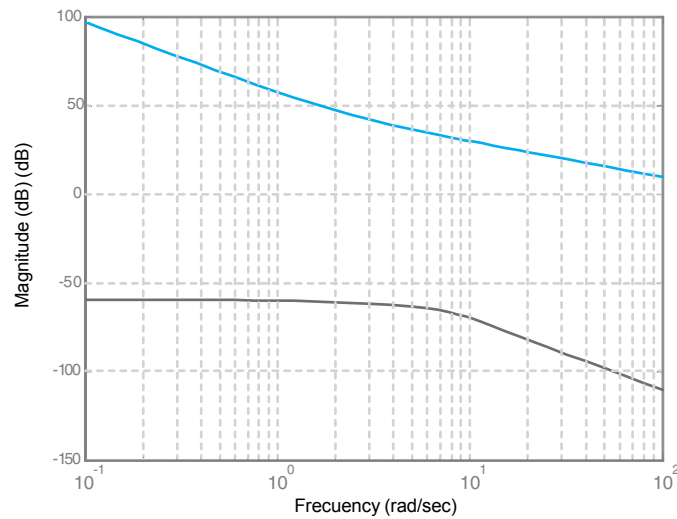
- La planta no es un sistema estable debido a la presencia de múltiples polos en el origen del plano complejo conjugado. Esto significa que las funciones de transferencia SISO  $G_{11}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{21}$  y  $G_{22}$  no son estables de acuerdo con los criterios asintótico y BIBO (*Bounded Input Bounded Output*).
- La cancelación polo-cero en  $G_{12}$  indica que no todos los estados de la planta son afectados por la perturbación  $K_L$ . Esta conclusión será formalmente demostrada en la siguiente sección, donde se desarrollan las pruebas de controlabilidad y observabilidad.
- La ganancia ilimitada de cada función de transferencia de  $G(s)$  indica que el rango de ganancias de la planta (como función de la frecuencia) es también ilimitada. Esto puede ser formalmente demostrado a través de la Descomposición en Valores Singulares (SVD) de la función de transferencia matricial  $G(s)$  y de la representación de sus valores singulares máximo y mínimo como función de la frecuencia (Figura 4).
- Como consecuencia del rango de ganancias ilimitado de  $G(s)$ , la norma  $H_\infty$  de la planta es también ilimitada.



Figura 4. (a) Diagrama de polos-ceros y respuesta en frecuencia de  $Q(s)$  y (b) Rango de ganancias para la Función de transferencia matricial  $G(s)$



**a**



**b**

Fuente: el autor.

### 1.3 CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD DE LA PLANTA NOMINAL

Para el sistema Lineal e Invariable en el Tiempo (LTI) definido en las ecuaciones (3) y (4), la matriz de controlabilidad desde la señal de control ( $\delta_v$ ) tiene rango completo, indicando, de esta manera, que todos los estados de la planta son controlables desde dicha señal. De otra parte, la prueba de controlabilidad desde el disturbio exógeno  $K_L$ , da como resultado una matriz de controlabilidad cuyo rango no es completo. De esta forma, se verifica que no todos los estados de la planta son afectados por los disturbios, tal como era previsible a partir de la observación de la sección anterior sobre la cancelación polo a cero en la función de transferencia que relaciona a  $Q(s)$  con  $K_L$ . Finalmente, conviene resaltar que la prueba de observabilidad permite confirmar que todos los estados de la planta son estimables a partir de las señales de medida y los comandos dados a la planta en periodos finitos de tiempo.

### 1.4 ESTABILIDAD INTERNA DEL SISTEMA DE CONTROL NOMINAL

Una vez analizadas las características más significativas de la planta nominal, el siguiente paso es verificar que el sistema de control nominal (planta y controlador en realimentación) es internamente estable. Para cumplir este objetivo, es importante verificar las condiciones de estabilidad del controlador propuesto:

$$K(s) = [K_{11}K_{12}] \quad (6)$$

$$\text{con, } K_{11} = \frac{8.475s^2 + 93.22s + 84.75}{0.001s^2 + 0.11s + 1} \text{ y } K_{12} = \frac{94.76s^2 + 1072s + 974.6}{0.001s^2 + 0.11s + 1}$$

En la Figura 5 se representan el diagrama de polos y ceros de  $K(s)$  así como su rango de ganancias. Los dos gráficos confirman la estabilidad del controlador y dan información adicional acerca del valor de su norma  $H^\infty$  (cercano a 100dB). La estabilidad interna del sistema de control completo puede ser verificada a través de las siguientes condiciones necesarias y suficientes [Sheta y Jong, 1996]:

- El sistema de control debe estar bien puesto, es decir, la matriz de transferencia  $(I + K(\infty)G(\infty))$  debe ser invertible. En este caso:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (I + K(s)G(s)) = I \quad (7)$$

- El número de polos inestables de  $G(s)K(s)$  deberá ser igual a la suma de polos inestables de  $G(s)$  más el número de polos inestables de  $K(s)$ . Para el caso en análisis, las Figuras 4(a) y 5(a) confirman que este criterio es también satisfecho.
- La matriz de transferencia  $(I - G(s)K(s))^{-1}$  debe ser estable. La Figura 5(b), donde se presentan los mencionados polos para el VLCS bajo estudio, confirma que esta condición se cumple.

Con base en la verificación anterior es posible concluir que el sistema de control nominal es internamente estable y, por tanto, todas sus posibles funciones de transferencia son estables.

## 1.5 ANÁLISIS DE DESEMPEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL NOMINAL

Las dos especificaciones de desempeño para el sistema de control bajo análisis están formuladas en términos de la respuesta de la variable  $q(t)$  a una señal paso de amplitud  $0,002m^{-1}$  suministrada como disturbio al sistema ( $K_I$ ). Específicamente, éstas son:

$$\lim_{t \rightarrow 0} |q(t)| \leq 0.2m \quad (8)$$

$$\max_t |q(t)| \leq 0.27m \quad (9)$$

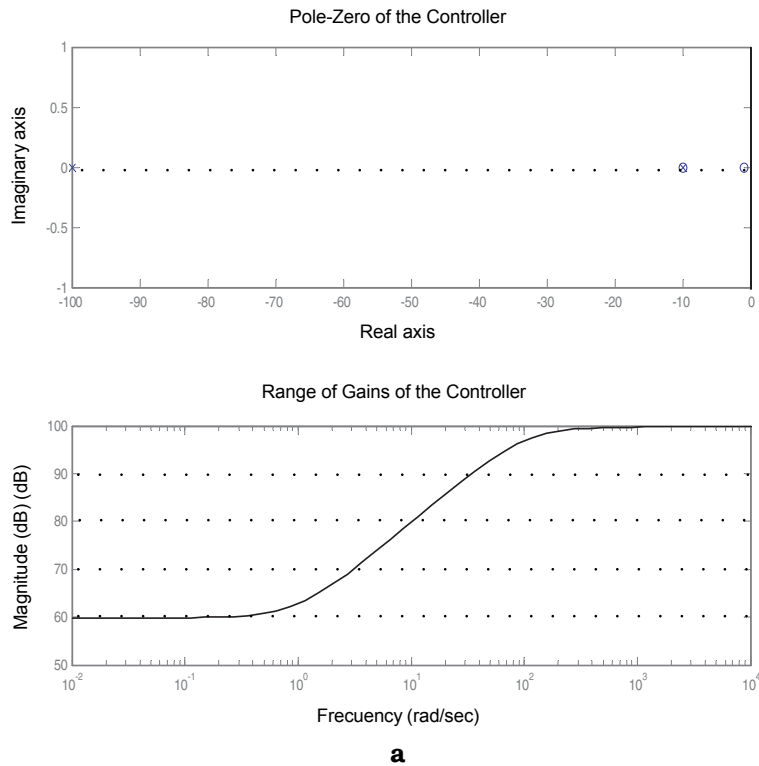
En la Figura 6 se presenta la respuesta de  $q(t)$  a la perturbación propuesta ( $K_I$ ). A partir de esta figura es posible confirmar que el sistema de control nominal responde con los siguientes valores a las especificaciones formuladas:

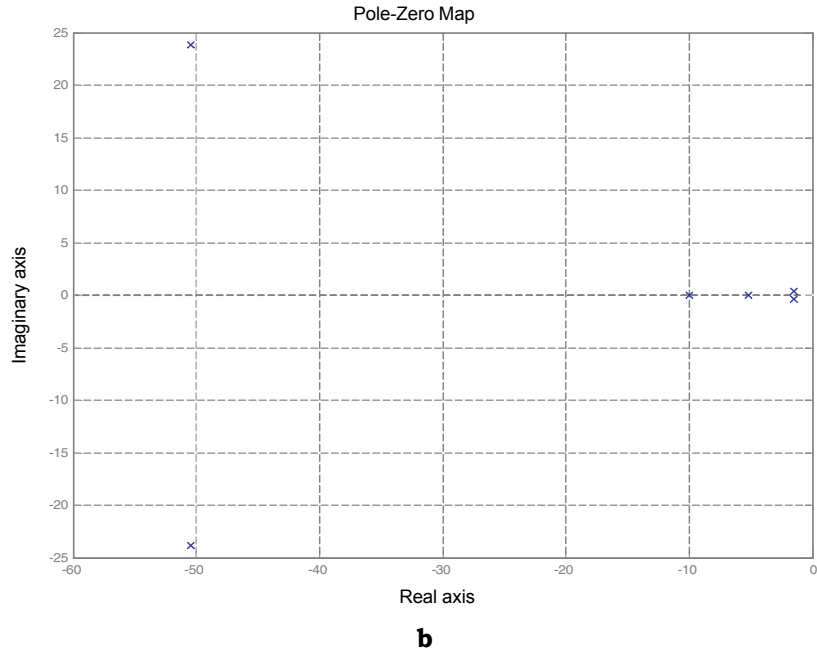
$$\lim_{t \rightarrow 0} |q(t)| = 0.004m \quad (10)$$

$$\max_t |q(t)| = 0.1715 \quad (11)$$

Por tanto, el sistema nominal bajo análisis cumple con los requisitos de desempeño del problema.

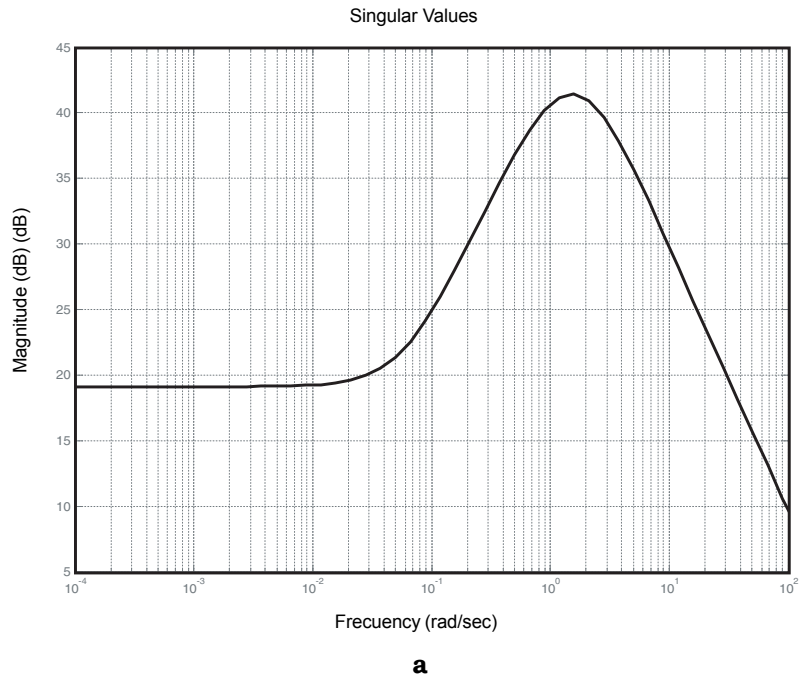
Figura 5. (a) Diagrama de PZ y de Bode de magnitud del controlador. (b) Diagrama de PZ de la función de sensibilidad

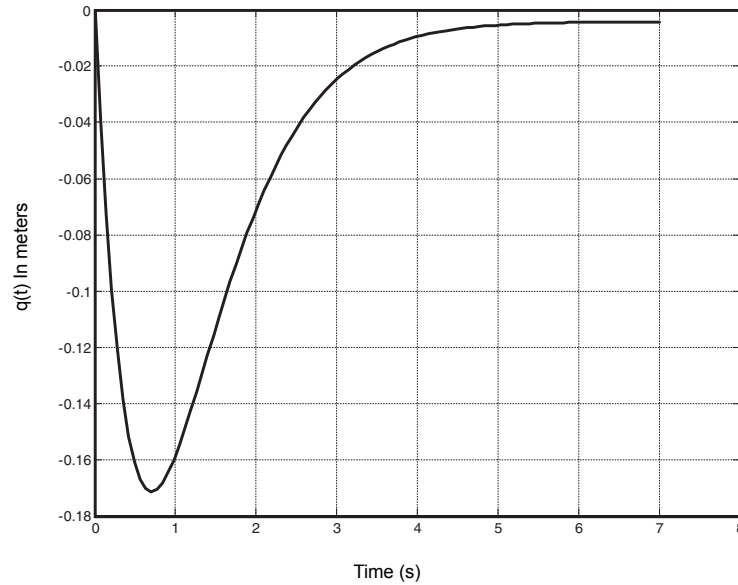




Fuente: el autor.

Figura 6. (a) Rango de ganancias del sistema controlado. (b)  $q(t)$  como respuesta a un disturbio paso de amplitud  $0.002m^{-1}$



**b**

Fuente: el autor.

## 2. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD ROBUSTA

### 2.1 ANÁLISIS DEL TIPO DE INCERTIDUMBRE

Los siguientes tipos de incertidumbre serán considerados en el VLCS propuesto:

- Incertidumbre paramétrica (también conocida como incertidumbre estructurada): el parámetro a ser considerado incierto es la masa del automóvil ( $m_v$ ), que es representado como una variación limitada de 200 kg alrededor del valor nominal:

$$m_v \in \left[ \overline{m}_v + \frac{m_v \max + m_v \min}{2} \Delta_1 \right] \quad (12)$$

$$m_v \in [1426 + 200\Delta_1] \quad (13)$$

con:

$$\Delta_1 \in \left\{ \Delta : \|\Delta\|_\infty \leq 1, \Delta \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \right\}$$

- Dinámicas no modeladas (también conocida como incertidumbre no estructurada): se supone que la planta nominal es exacta (dentro de una banda del 1%) a bajas frecuencias ( $< 1$  rad/s), mientras que es particularmente inexacta (alrededor del 50%) en frecuencias superiores a 50 rad/s. La representación en frecuencia de estos límites en la incertidumbre no estructurada se muestra en la Figu-

ra 7 a partir de una función de primer orden. De esta forma, las dinámicas no modeladas son formalmente representadas como una incertidumbre multiplicativa en la salida, como se muestra a continuación:

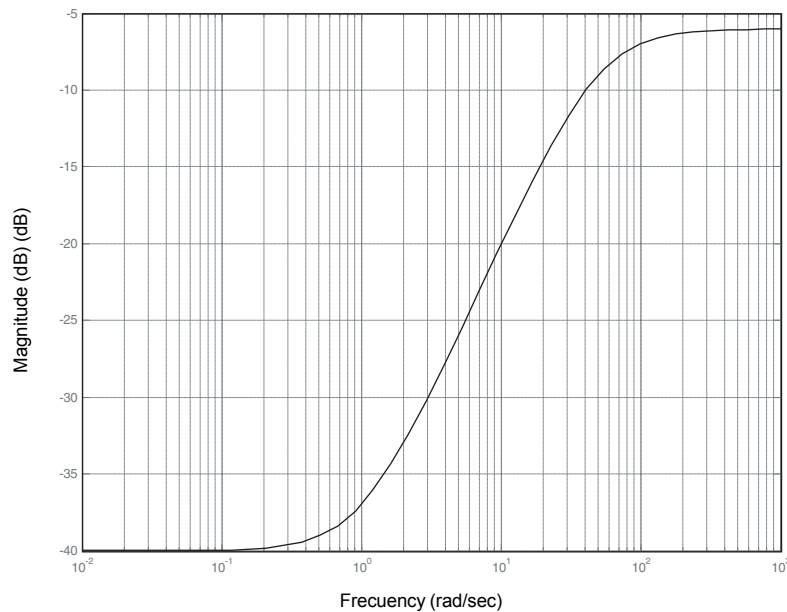
$$G = (I + W(s)\Delta_2)G_{nom} \tag{14}$$

con:

$$\Delta_2 \in \{ \Delta : \|\Delta\|_\infty \leq 1, \Delta \in C^{1 \times 1} \}$$

W(s): función límite de la Figura 7.

Figura 7. Función de peso para las dinámicas no modeladas.



Fuente: el autor.

## 2.2 REPRESENTACIÓN DEL MODELO INCIERTO

Con el propósito de desarrollar el análisis de estabilidad y desempeño del sistema controlado que incluye los diferentes tipos de incertidumbre se construyen tres sistemas aumentados utilizando *Simulink*. En cada uno de ellos se normalizan las funciones de incertidumbre tal como se indica en la Figura 1:

- Sistema aumentado con incertidumbre paramétrica, específicamente se considera únicamente  $m_v$  como parámetro incierto tal como se definió en la ecuación (13).
- Sistema aumentado con incertidumbre estructurada, específicamente se consideran únicamente las dinámicas no modeladas como fuente de incertidumbre, a través de su representación como incertidumbre multiplicativa reflejada en las salidas (variables  $q$  y  $m$ ).

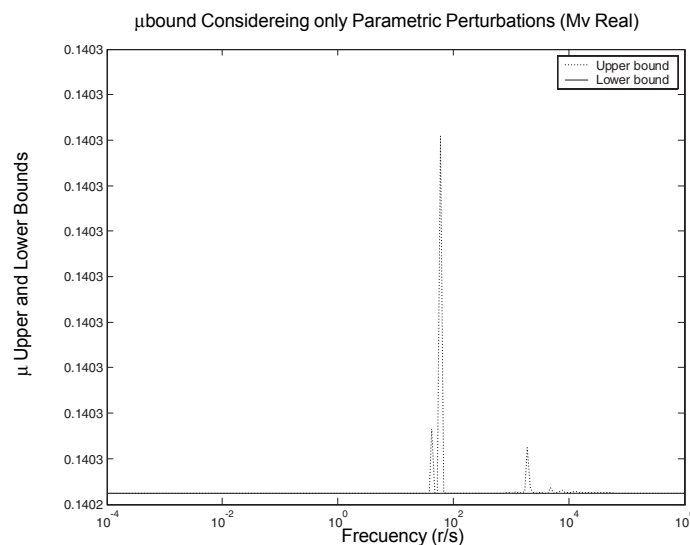
- Sistema aumentado con incertidumbre paramétrica y no estructurada, es decir, en este esquema se considera el conjunto completo de incertidumbre.

### 2.3 RESPUESTA EN FRECUENCIA Y ANÁLISIS DE LOS LÍMITES DEL SSV

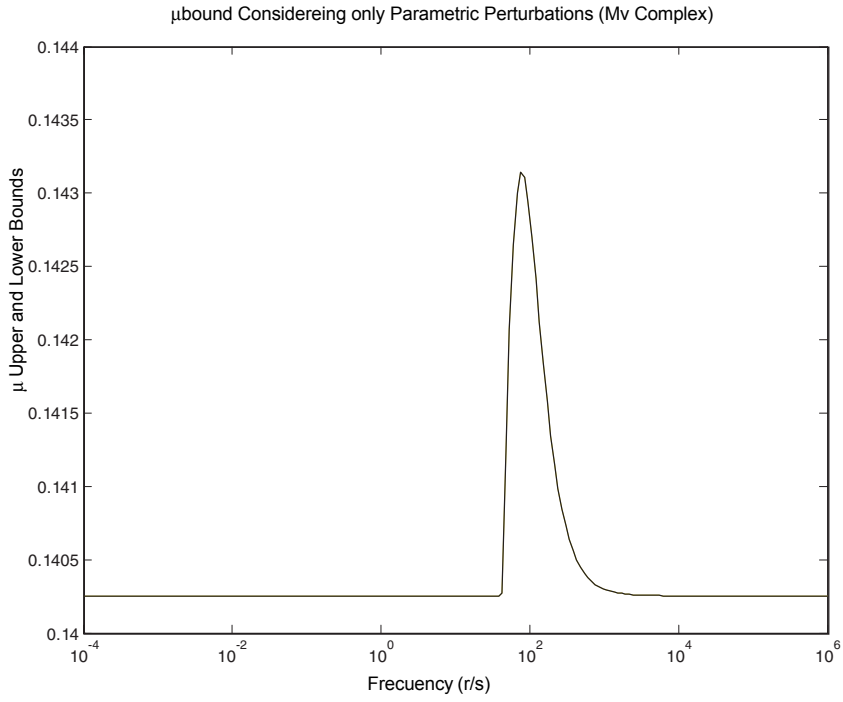
Una vez construidos los sistemas aumentados, se calculan sus respectivas respuestas en frecuencia y límites para el valor del SSV utilizando el  $\mu$  *Analysis and Synthesis Toolbox* [Hunt, 1992]. Los principales resultados (límites superior e inferior del SSV) son indicados en la Figura 8. Con base en estos diagramas es posible concluir que:

- El sistema de control lateral para el automóvil (VLCS) es internamente estable para variaciones en la masa del vehículo entre 1.226 kg y 1.626 kg. De hecho, el pico del límite superior del SSV (Figura 8(a)) es aproximadamente 0,1403, indicando que es admisible una variación mayor en la masa del automóvil antes de alcanzar condiciones de inestabilidad, tal como será matemáticamente deducido en la próxima sección. Es importante subrayar que el SSV no es necesariamente una función continua cuando todos los bloques de incertidumbre son reales. Este hecho es demostrado en [Barmish et al., 1989] e indica que el algoritmo utilizado por el respectivo módulo de *Matlab* puede tener problemas de convergencia en el cálculo del límite inferior del SSV. Una solución para este problema es propuesta por [Hunt, 1992] y consiste en adicionar una componente compleja (entre el 1% y 10%) al bloque de incertidumbre real. Aplicando esta alternativa al problema en referencia (Figura 8(b)), los resultados obtenidos son más conservadores, los límites superior e inferior del SSV coinciden y no tienen discontinuidades.

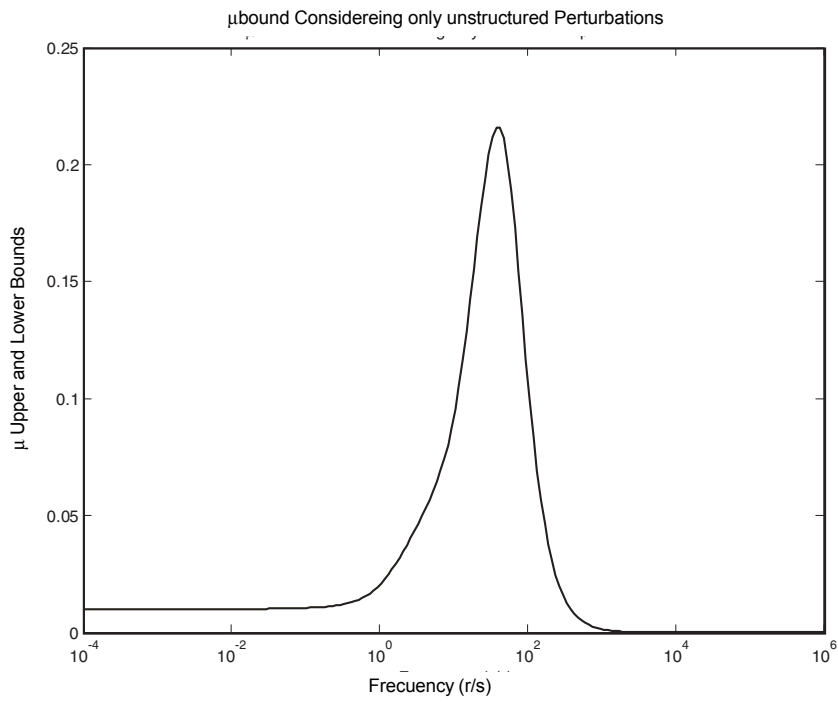
Figura 8. Límites del SSV para el análisis de estabilidad robusta.



**a**

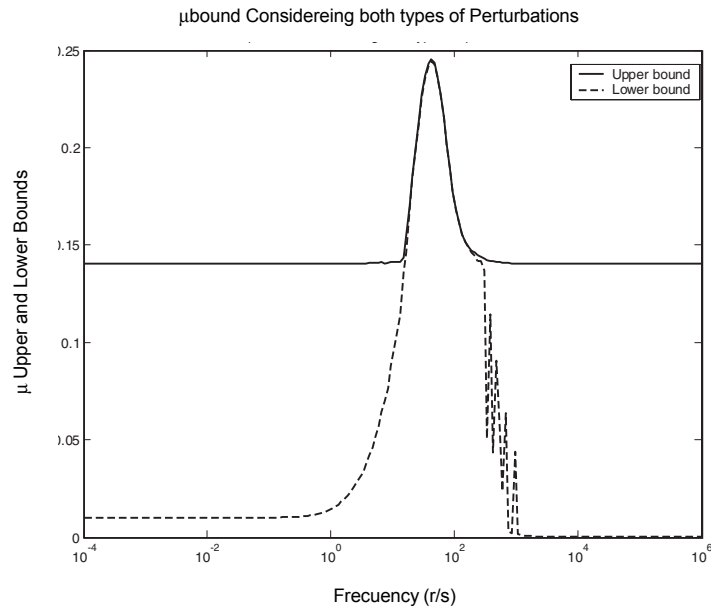


**b**



**c**





Fuente: el autor.

- La diferencia entre el límite superior e inferior del SSV (Figura 8(a)), es menor a  $1e-4$ , lo que refleja una buena convergencia alrededor de su verdadero valor. En este caso, de acuerdo con Balas, et al. [2001], el límite superior puede considerarse igual al SSV si al máximo existe un bloque escalar repetido describiendo la incertidumbre.
- Los límites del SSV mostrados en la Figura 8(c) son menores a uno, lo que confirma que el VLCS es internamente estable para errores en el modelo utilizados equivalentes a los límites indicados en la Figura 1. De otra parte, los límites superior e inferior del SSV coinciden, en este caso, indicando que el respectivo algoritmo de cálculo converge a su valor exacto.
- Al comparar las Figuras 8(a) y 8(c) puede concluirse que el VLCS es más sensible a errores en el modelo (como los representados en la Figura 7) que a variaciones en la masa del automóvil (como se describe en la ecuación 13).
- Cuando se consideran simultáneamente la incertidumbre estructurada y no estructurada, el cálculo de los límites del SSV confirman que el sistema de control diseñado es internamente estable (Figura 8(d)). La diferencia entre el límite superior y el inferior es menor a 0,25 y se presentan algunas discontinuidades en el límite inferior después de 400 rad/s. Este hecho se debe a la incertidumbre real utilizada y puede solucionarse considerando  $m_v$  como un parámetro complejo, es decir, una función de transferencia cuyo diagrama de Nyquist recae al interior de un disco con centro en 1.226 (el valor nominal de  $m_v$ ) y radio 200 (la máxima variación permitida alrededor del valor nominal).

## 2.4. MÍNIMA PERTURBACIÓN DESESTABILIZANTE

Cuando la estabilidad interna ha sido confirmada para los tipos de incertidumbre consideradas, es importante determinar y usar la mínima perturbación desestabilizante, tal como se indica a continuación:

- Construcción: la mínima perturbación desestabilizante (SDP) puede ser determinada a partir de la solución de la siguiente expresión:

$$\inf_{\omega} \left\{ \min_{\Delta(j\omega)} \{ \bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] \} \text{ such that } \det\{I + N_{y_d} w_d(j\omega)\Delta(j\omega)\} = 0 \right\} \quad (15)$$

- Verificación de su estructura: una vez incorporada la SDP en el modelo aumentado (Figura 9), se verifica que la estabilidad interna se pierde a partir de las siguientes funciones:

$$\Delta_{1,2,3} = -4.096$$

$$\Delta_{4,5} = \frac{-4.096s + 32.03}{s + 7.818}$$

Al usar estas  $\Delta_i$  en las ecuaciones (13) y (14), es posible traducir en un sentido práctico las mínimas incertidumbres desestabilizantes como el límite máximo que pueden alcanzar las incertidumbres (paramétricas antes que de error en el modelo) dentro del sistema de control, antes de ocasionar inestabilidad interna:

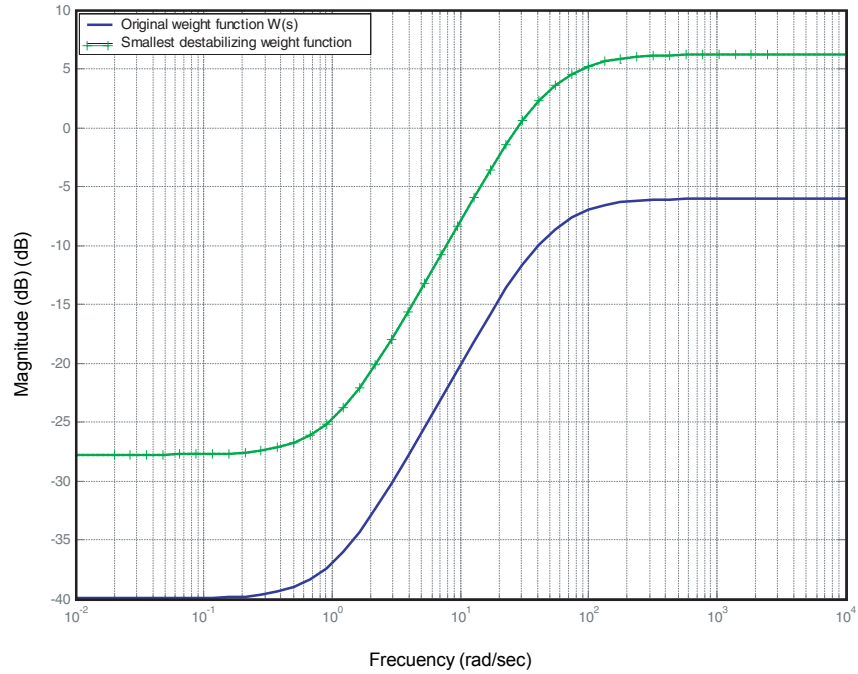
- Máxima variación de masa, a partir del valor nominal: -819,24 kg.
- Máximo error en el modelo nominal (Figura 9(a)): 4% en frecuencias menores a 1 rad/s y 204% en frecuencias por encima de 50 rad/s.

El efecto de las SDP se verifica analíticamente conectando las mínimas perturbaciones desestabilizantes en los correspondientes canales de realimentación del sistema aumentado (Figura 1). Al graficar el correspondiente diagrama de polos y ceros (Figura 9(b)) se observa que el sistema perturbado tiene diez polos (cuatro de la planta nominal, dos del controlador diseñado y cuatro de la SDP correspondiente a la caracterización del error de modelo) con dos de ellos posicionados en el eje imaginario.

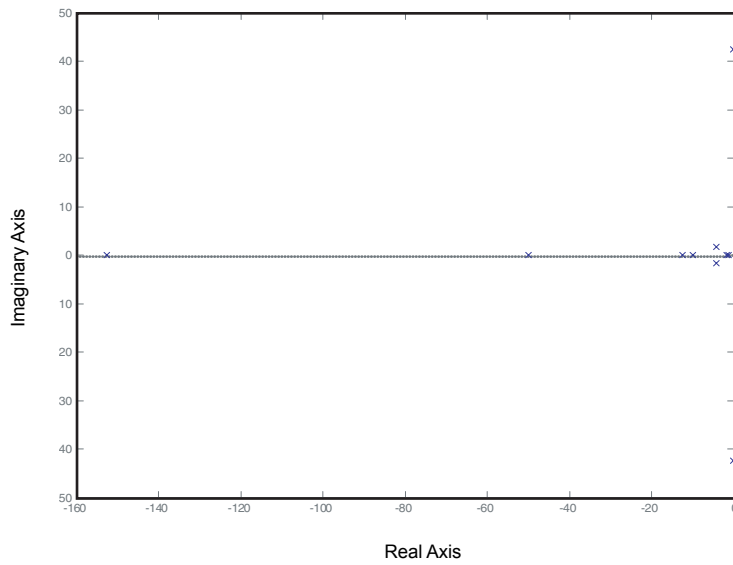
## 3. ANÁLISIS DE DESEMPEÑO ROBUSTO

Como se demuestra en [Zhou y Doyle, 1998], la determinación de las posibles variaciones de la planta para las cuales todavía se cumplen las especificaciones de desempeño de las ecuaciones (8) y (9) es un problema que puede ser formulado como un análisis extendido de estabilidad robusta. Allí se propone que se adicione un elemento de incertidumbre “ficticio” (representando los límites de desempeño en el dominio de la frecuencia) al bloque original de perturbaciones representado como una LFT (Figura 1). En las siguientes secciones se determina aquella perturbación adicional y se desarrolla, paso a paso, el respectivo análisis de estabilidad extendido.

Figura 9. Mínima perturbación desestabilizante.



**a**



**b**

Fuente: el autor.

Ing. Univ. Bogotá (Colombia), 8 (2): 113-138, julio-diciembre de 2004

131

### 3.1 ANÁLISIS DE LAS ESPECIFICACIONES DE DESEMPEÑO

Las dos especificaciones de desempeño para el sistema de control bajo análisis están formuladas en términos de la respuesta de la variable  $q(t)$  a una señal paso de amplitud  $0,002 m^{-1}$  suministrada como disturbio al sistema ( $K_L$ ). Estas especificaciones son:

$$\lim_{t \rightarrow 0} |q(t)| \leq 0.2m \quad (16)$$

$$\max_t |q(t)| \leq 0.27m \quad (17)$$

Mediante el teorema del valor final la primera especificación conduce a un límite para la función de sensibilidad ( $S = Q(s)/K_L(s)$ ) para las bajas frecuencias ( $\omega = 0 \text{ rad/s}$ ). Específicamente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |q(t)| = s \lim_{s \rightarrow 0} |sQ(s)| \leq 0.2m \quad (18)$$

esto significa que,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{sQ(s)K_L(s)}{K_L(s)} \right| \leq 0.2 \quad (19)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{sQ(s)0.002}{K_L(s)s} \right| \leq 0.2 \quad (20)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{Q(s)}{K_L(s)} \right| \leq 100 \quad (21)$$

$$|S(j\omega)|_{\omega=0} \leq 40dB \quad (22)$$

La segunda especificación es un valor de atenuación de disturbios que establece un límite para la función de sensibilidad para frecuencias por encima de  $0 \text{ rad/s}$ . En particular:

$$\zeta = 0.3 \text{ debido a la especificación de sobreimpluso del } 35\% \quad (23)$$

$$M_r = \frac{100}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 44.85dB \text{ máxima ganancia para } \omega > 0 \text{ r/s} \quad (24)$$

por tanto,

$$|S(j\omega)|_{\omega>0} \leq 44.85dB \quad (25)$$

Al relacionar los dos límites obtenidos para la función de sensibilidad ( $S$ ), el resultado es una función de peso con un diagrama de Bode de magnitud como el indicado en la Figura 10(a) y que es analíticamente aproximado mediante la siguiente expresión:

$$W_6^{-1} = \frac{10000s + 100}{57.24s + 1} \quad (26)$$

Esto significa que:

$$\|W_6 S(j\omega)\|_{\infty} \leq 1 \quad (27)$$

### 3.2 MODELO AUMENTADO PARA EL ANÁLISIS DE DESEMPEÑO ROBUSTO

Como se ha indicado anteriormente, el análisis de desempeño robusto requiere de la adición de una incertidumbre “ficticia” que represente el siguiente límite en la función de sensibilidad pesada:

$$\|W_s S(j\omega)\|_\infty \leq \|\Delta_6\|_\infty \quad (28)$$

con  $\|\Delta_6\|_\infty \leq 1$

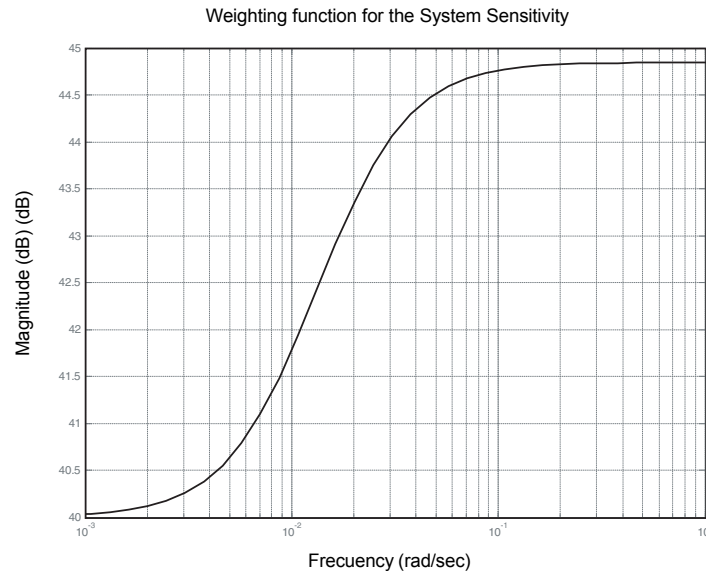
De esta forma, el análisis de desempeño robusto puede ser formulado como una prueba de estabilidad robusta cuyos principales resultados se indican a continuación.

### 3.3 RESPUESTA EN FRECUENCIA Y ANÁLISIS DE LOS LÍMITES DEL SSV

Una vez construidos los sistemas aumentados se calculan sus respectivas respuestas en frecuencia y límites para el valor del SSV utilizando el  $\mu$  *Analysis and Synthesis Toolbox* [Hunt, 1992]. Los principales resultados (límites superior e inferior del SSV) se indican en la Figura 10(b). A partir de este diagrama es posible concluir que:

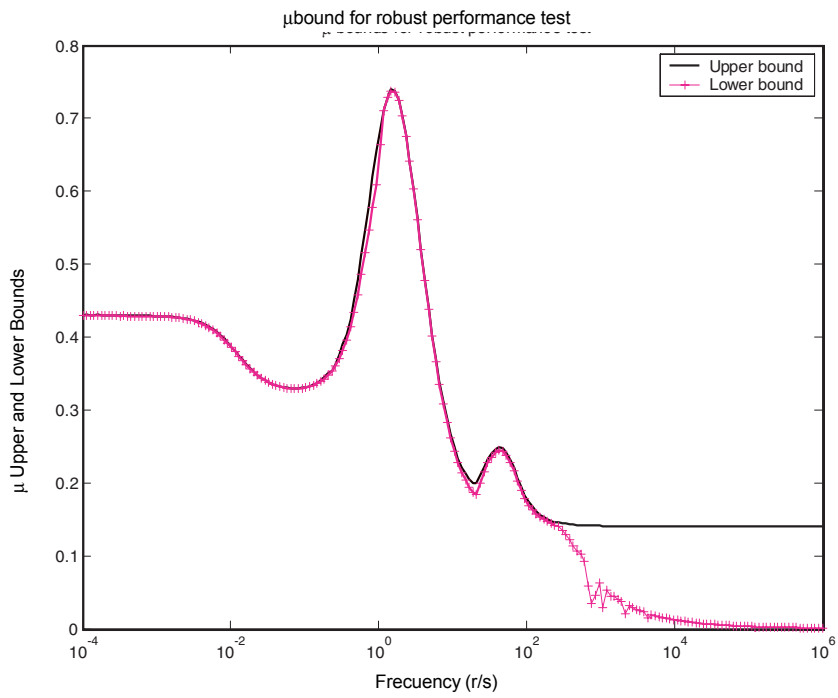
- El VLCS satisface sus especificaciones de desempeño en presencia de variaciones de la masa del automóvil comprendidas entre 1.226 kg y 1.626 kg, así como para errores en el modelo dentro de los límites indicados en la Figura 7. De hecho, el pico del límite superior del SSV (Figura 10(b)) es aproximadamente 0,72 indicando que pueden admitirse perturbaciones con una norma  $H_\infty$  mayor ( $\|\Delta\|_\infty < 1.39$ ).

Figura 10. Análisis de desempeño robusto.

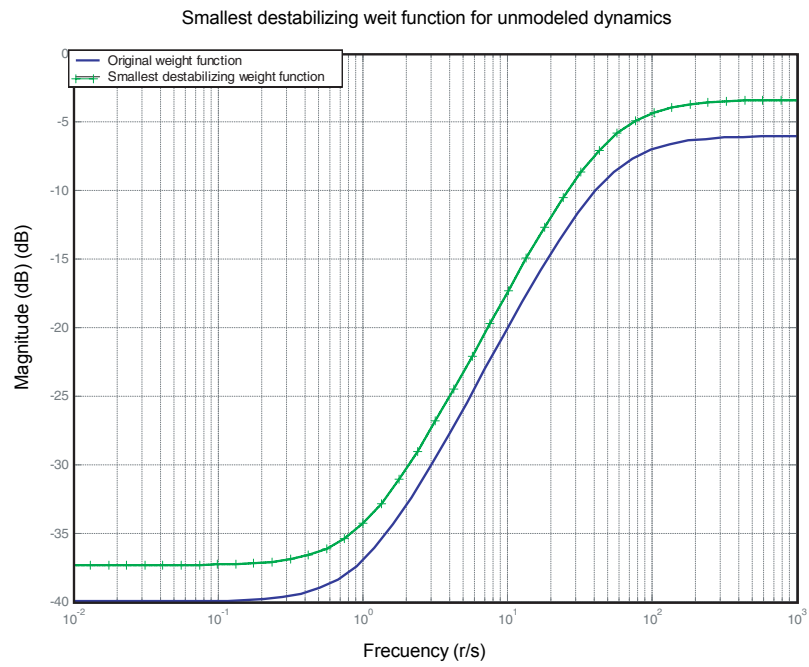


**a**

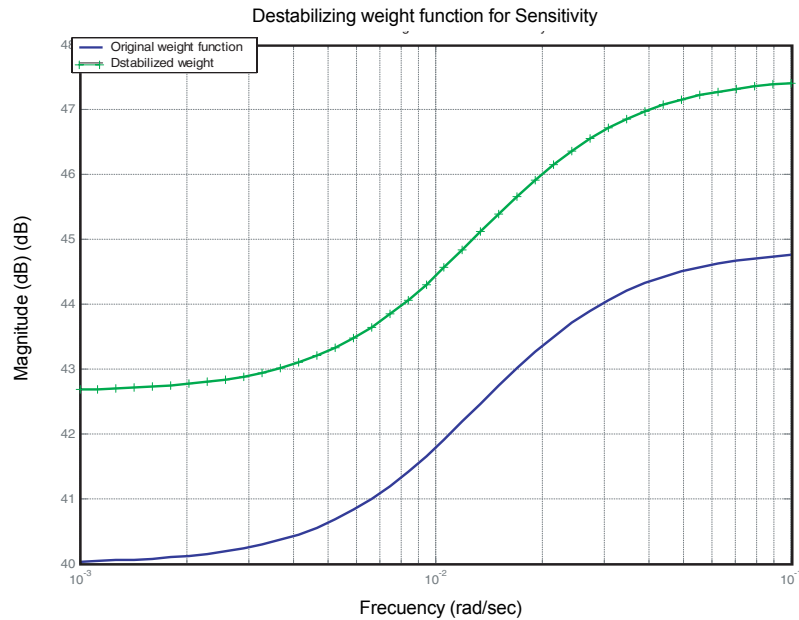
Fuente: el autor.



**b**



**c**



**d**

- La diferencia entre el límite superior y el inferior del SSV (Figura 10(b)) es menor a  $2e-2$  para frecuencias  $\omega < 200 \text{ rad/s}$  y menor a  $17e-2$  para frecuencias  $\omega > 200 \text{ rad/s}$ , indicando, en general, una buena convergencia del algoritmo alrededor del verdadero valor SSV.
- Si se comparan las Figuras 8(d) y 10(b), es evidente que los cambios en la incertidumbre tienden a afectar más el desempeño que la estabilidad interna.

### 3.4 MÍNIMA PERTURBACIÓN DESESTABILIZADORA

Cuando el desempeño robusto ha sido confirmado para los tipos de incertidumbre consideradas es importante determinar y usar la mínima perturbación desestabilizante, tal como se indica a continuación:

- Construcción: la mínima perturbación desestabilizante (SDP) puede ser determinada a partir de la solución de la ecuación (15).
- Verificación de su estructura: una vez incorporada la SDP en el modelo aumentado (como se indica en la Figura 1) se verifica que la estabilidad interna del sistema utilizado para determinar el desempeño robusto se pierde a partir de las siguientes funciones:

$$\Delta_{1,2,3} = 1.396$$

$$\Delta_{4,5} = \frac{-1.396s + 7.621}{s + 5.461}$$

$$\Delta_6 = \frac{1.396s - 24.46}{s + 17.53}$$

Al reemplazar estas  $\Delta_i$  en las ecuaciones (13), (14) y (28) se obtienen los siguientes resultados:

- Máxima variación de masa a partir del valor nominal: 279,14 kg.
- Máximo error en el modelo nominal (Figura 10(d)): 1,41% en frecuencias menores a 1 rad/s y 141,3% en frecuencias por encima de 50 rad/s.

#### 4. CONCLUSIONES

Gracias a la aplicación de una moderna metodología para el análisis de la estabilidad y desempeño robustos se deducen y verifican, analíticamente, las máximas incertidumbres permitidas (en términos de la variación de masa y error de modelo) para un VLCS para un automóvil Fiat Brava 1600 ELX, antes de alcanzar inestabilidad interna o de incumplir con sus especificaciones funcionales. El uso de este tipo de metodologías es altamente recomendado para determinar las características de robustez y las limitaciones en desempeño de un sistema de control multivariable antes de su implementación, de tal forma que puedan minimizarse discrepancias con el comportamiento real de la planta.

El método propuesto está basado en la combinación complementaria de dos conceptos matemáticos. El primero de ellos es el de las Transformaciones Lineales Fraccionadas (LFT) utilizadas como una función matricial que permite unificar la representación de diferentes tipos de incertidumbre en el modelo. Ésta es una ventaja muy importante porque el análisis de la robustez de sistemas de control multivariables puede ser extendido más a incertidumbres paramétricas que a incertidumbres no estructuradas. El segundo concepto matemático es la Función de Valor Singular Estructurado (SSV o  $\mu$ ) que provee la condición necesaria y suficiente para la prueba de robustez con una moderada complejidad computacional. Otra contribución importante derivada del uso de la SSV es la posibilidad de transformar la prueba de robustez del desempeño en una prueba tradicional de estabilidad robusta utilizando la representación en forma de LFT superando, de esta forma, las limitaciones de otros métodos modernos (Algoritmos Genéticos, teorema de Kharitonov).

La metodología propuesta se desarrolla a través de tres pasos fundamentales:

- Análisis del sistema nominal: el objetivo de esta etapa es estructurar una base conceptual sólida para comprender los efectos que introduce el controlador y valorar los resultados futuros del análisis de robustez.
- Análisis de estabilidad robusta: en este paso se analizan los efectos de la incertidumbre paramétrica y de las dinámicas no modeladas (incertidumbre multiplicativa en salida) en la estabilidad interna del sistema controlado. Las conclusiones se orientan a sopesar el impacto de los dos tipos de incertidumbre y a determinar cuantitativamente los límites de estabilidad robusta.



- Análisis de desempeño robusto: una vez verificadas las características de estabilidad robusta, se analizan los efectos en la función de sensibilidad de las incertidumbres admisibles deducidas en el paso anterior.

A través de la integración de los resultados obtenidos en cada uno de los pasos indicados anteriormente, el sistema de control diseñado puede ser reexaminado y su desempeño puede ser mejorado gracias a una adecuada compensación del impacto de la incertidumbre en el comportamiento general del sistema.

## AGRADECIMIENTOS

El autor agradece, por el apoyo e información brindadas para el desarrollo de este artículo, al grupo de investigación del Politécnico di Torino, que tuvo a su cargo el desarrollo del VLCS utilizado como caso de estudio, compuesto por los profesores Mario Milanese, Vito Cerone y Michele Taragna y el ingeniero Diego Regruto.

## REFERENCIAS

- BALAS, G., et al. (2001), m Analysis and Synthesis Toolbox, User's Guide Version 3, Natick, the MathWorks.
- BARMISH, B. et al. (1989), Robustness Margin need not be a continuous function of the Problem Data, en: *Systems and Control Letters*, 15, 91-98.
- CERONE, V., A. Chinu, D. Regruto (2002), Experimental Results in Vision-based Lane Keeping for Highway Vehicles, en: *Proceedings of IEEE American Control Conference*, Anchorage, May, 869-874.
- FADALI, S., L. LaForge, A. Sonbol (2001), Linear Time Computation of Robust Stability Margins, en: *Proceedings of IEEE American Control Conference*, June.
- \_\_\_\_\_, Y. Zhang, J. Louis (1999), Robust Stability Analysis of Discrete-Time Systems Using Genetic Algorithms, en: *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 29(5).
- GERDES, J.C., E. J. Rossetter (2001), A unified Approach to Driver Assistance Systems based on Artificial Potential Field, en: *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 123, septiembre, 431-438.
- HUNT, K. J. (1992), Polynomial LQG and H infinite Controller Synthesis: a genetic Algorithms Solution, en: *Proceedings of 31st IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 4, no. 865, 3.604-3.609.
- KOJSECKÁ, J. et al. (1997), Vision based lateral Control of Vehicles, en: *Proceedings of Intelligent Transportation Systems Conference*, Boston.

- KOJSECKÁ, J. (1997), Vision-based lateral Control of Vehicles: look-ahead and Delay Issues, Internal Memo, Department of EECS, University of California Berkeley.
- KWOK, D. P., F. Sheng (1994), Genetic Algorithm and simulated Annealing for optimal Robot Arm PID Control, en: *Proceedings of the 1st IEEE Conference on Evolutionary computation*, 708-713.
- LI, Y. et al. (1996), Genetic Algorithm automated Approach to the Design of Sliding mode Control System, en: *International Journal of Control*, 63(4), 721-739.
- MARRISON, C. I., R. F. Stengel (1997), Robust Control System Design using Random Search and genetic Algorithms, en: *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(6), 835-839.
- SHETA, A. F., K. D. Jong (1996), Parameter Estimation of nonlinear System in noisy Environments using genetic Algorithms, en: *Proceedings of International Symposium on Intelligent Control*, 360-365.
- TANG, K. S., K. F. Man, D. W Gu (1996), Structured genetic Algorithm for robust H infinite Control Systems Design, en: *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 43(5), 575-582,
- YAHIAOUI, K., Y. Haman, F. Rocaries (1997), Constrained genetic Algorithm-based computer-aided Control System Design fixed versus variable Size Population, en: *Proceedings of International Symposium on Intelligent Control*, 425-430.
- ZHOU, K., J. Doyle (1998), *Essentials of Robust Control*, New Jersey, Prentice Hall.