

# ANÁLISIS ESPECTRAL DE PROPAGACIÓN DE ONDAS PARA ANÁLISIS DE PRUEBAS DE INTEGRIDAD DE PILOTES\*

*Jorge Alberto Rodríguez Ordóñez\*\*  
Victor Hugo Restrepo Botero\*\*\**

**Resumen:** se presenta un desarrollo analítico para el estudio de propagación de ondas en pilotes con el fin de modelar el ensayo de integridad de pilotes de bajas deformaciones (PIT) cuando se presentan cambios de sección, considerando la disipación de energía en el material del pilote y por efecto de la interacción con el suelo. Se hace el análisis de la propagación de un pulso de onda de compresión para estudiar la continuidad y cambios de impedancia a lo largo del pilote. El modelo considera un elemento unidimensional de sección variable con tramos uniformes con fuerzas de fricción a lo largo, una fuerza de reacción en la base y un impulso transiente en la cabeza. Se evaluaron diferentes alternativas para la solución del problema y se seleccionó el método del análisis espectral. La solución se implementó utilizando el programa Matlab y se utilizó para modelar la prueba de integridad en pilotes con cambios de sección. Los parámetros del modelo analítico se calibraron a partir de modelos numéricos de interacción suelo-estructura y se validaron por comparación con resultados de pruebas reales.

**Palabras clave:** propagación de ondas, análisis espectral, prueba de integridad de pilotes.

**Abstract:** an analytical solution is obtained for the problem of wave propagation along a concrete pile. The problem consider a longitudinal element with a piece wise varying section, friction forces along the element and a reaction force at the tip, with a transient stress pulse applied at the top. This problem is representative of low strain pile

---

\* Fecha de recepción: 10 de febrero de 2006. Fecha de aceptación para publicación: 31 de julio de 2006.

\*\* Ingeniero Civil, Universidad Nacional de Colombia. M. Sc. in Civil Engineering, University of North Carolina. Ph.D. in Civil Engineering, North Carolina State University. Profesor Asociado, Departamento de Ingeniería Civil, Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: rodriguezja@javeriana.edu.co

\*\*\* Ingeniero Civil, Pontificia Universidad Javeriana. Correo electrónico: hrestrep@yahoo.com

integrity tests. Different alternatives for the solution of the problem were considered, and the spectral analysis method was chosen and implemented using Matlab. The test was modeled for several cases, comparing the results with actual PIT measurements. The parameters for the analytical model were obtained from numerical models of soil-pile interaction.

**Key words:** wave propagation, spectral analysis, pile integrity test.

## 1. INTRODUCCIÓN

Durante la construcción de cimentaciones profundas se presentan diferentes circunstancias que pueden llegar a afectar la forma final de los pilotes, contribuyendo a que no se alcance la profundidad, secciones transversales y calidad del material previsto en el diseño (Figura 1).

Figura 1. Pilote defectuoso fundido in situ



Fuente: <http://www.fernandeztadeo.com/foto2.htm>

Para realizar el control de calidad de dichos elementos se utiliza un método que consiste en aplicar un impacto en la cabeza del pilote, el cual produce una onda de compresión de bajas deformaciones que se propaga a lo largo del pilote y se refleja en la punta del pilote o donde haya cambios de impedancia (sección o densidad del material). La señal de tiempo se registra en la cabeza del pilote con la que se pueden analizar las ondas reflejadas para interferir las condiciones del pilote [Carino, 2001], [Likins y Piscsalko, 2000]. Existen en el mercado equipos PIT (Pile Integrity Tester) compuestos por un martillo de mano, un acelerómetro y un computador que llevan a cabo la prueba de integridad de pilotes (Figura 2) [PDI, 2003].

Los golpes dados por el martillo generan una onda de esfuerzos que recorre el pilote y sufre reflexiones al encontrar variaciones de las

características del material en cuanto a sección transversal o densidad. Dichas reflexiones son percibidas por el acelerómetro y procesadas por el computador del equipo para ser convertidas en una señal de fácil interpretación.

Figura 2. Prueba de Integridad del Pilote (PIT)



Fuente: [Likins, 2000].

Aun cuando el método es el más usado por ingenieros geotecnistas para determinar la continuidad y estimar la forma del pilote bajo el suelo [Massoudi, 2004], [Morgano, 1996], [Rausche, 1979], en algunos casos presenta dificultades en la interpretación de la señal asociadas a la interacción suelo-pilote, variación de densidad del material y grandes cambios de sección cerca de la cabeza del pilote [Chernaukas y Paikowsky, 1999]. Debido a que existen estas limitaciones en la interpretación de resultados de la prueba y entendiendo que la teoría que enmarca el fenómeno que ocurre al interior del pilote es la teoría de propagación unidimensional de ondas en barras, en el presente artículo se revisa la teoría físico-matemática respectiva para utilizar una solución analítica del problema, incorporando los efectos de las fuerzas retardantes y lograr la simulación de la prueba PIT mediante un programa aplicativo.

Con el programa desarrollado, se logra representar gráficamente la propagación de ondas en pilotes considerando diferentes geometrías, pulsos y tipos de suelo, de tal manera que puede ser usado como herramienta de interpretación de resultados para la prueba de integridad de pilotes (PIT).

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Por la naturaleza del golpe y del medio en que viaja la onda de esfuerzo, se considera que el fenómeno de propagación se hace en una dimensión y, por tanto, se rige por la siguiente ecuación diferencial parcial [Koshlyakov, 1964]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

Donde,

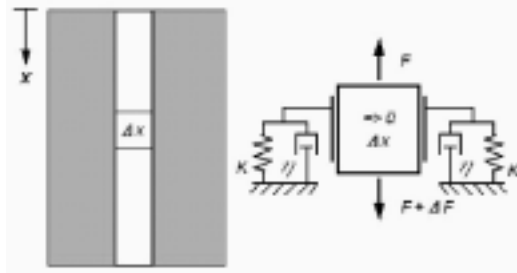
- $u$ : función de desplazamiento
- $t$ : variable de posición de onda en el tiempo
- $c$ : velocidad de propagación de onda
- $x$ : variable de posición de onda en el espacio

La velocidad de propagación de onda para barras delgadas ( $c$ ) resulta de la formulación de la ecuación diferencial de propagación unidimensional de ondas en un medio elástico y es función del módulo de elasticidad ( $E$ ) y la densidad del material ( $\rho$ ) mediante la expresión:

$$c_p = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{2}$$

La ecuación (1) representa la propagación de ondas en una dimensión en su caso más sencillo, sin considerar los efectos de fuerzas retardantes. Para poder ajustar mejor la ecuación (1) a las condiciones reales del pilote, se incorporan en la ecuación los componentes que corresponden a los efectos de fricción del suelo (resorte) y disipación de energía en el pilote (amortiguador), como se observa en la Figura 3 y en la ecuación (3).

Figura 3. Elemento diferencial del pilote bajo influencias externas



Fuente: [Restrepo, 2005].

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Ku - \eta \frac{\partial u}{\partial t} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3}$$

Donde:

- $E$ : módulo de elasticidad del material del pilote
- $A$ : área transversal del pilote
- $K$ : constante para modelar el efecto del suelo
- $\eta$ : constante para modelar la amortiguación del pilote

### 3. SOLUCIÓN BÁSICA

La ecuación (1) se puede resolver de diferentes formas [Duffy, 1986]. Se pueden hallar soluciones mediante métodos matemáticos analíticos o numéricos. En el presente caso se decidió trabajar con una solución analítica con el propósito de evitar las limitaciones de precisión que son inherentes a las soluciones por métodos numéricos. Para seleccionar el método se estudiaron las siguientes posibilidades:

1. Método de las características
2. Método de separación de variables
3. Método de transformada de Laplace
4. Metodología de análisis espectral

En función de las condiciones iniciales y de frontera del sistema se obtienen soluciones del mismo tipo por los métodos de separación de variables y transformada de Laplace que cuentan con soluciones armónicas. Sin embargo, debido a la presencia de fuerzas retardantes planteadas en la ecuación (3) y la forma del pulso de esfuerzos, la solución por estos métodos resulta difícil.

De igual manera se estudió la solución a la ecuación (1) mediante el método de las características, el cual brinda una solución adecuada para el estudio de propagación de la onda a lo largo del pilote, pero se hacía complejo su análisis ante la presencia de los efectos del suelo y pilote que se desean simular.

Teniendo en cuenta las limitaciones de los otros métodos, la solución analítica implementada para la solución de la ecuación (3) hizo uso de la metodología de análisis espectral usando la transformada de Fourier, entre otras por las siguientes razones:

- Remueve la variación del tiempo para replantear la ecuación diferencial parcial de forma espectral haciendo que ésta se vuelva ordinaria y pueda ser integrada directamente.
- Facilidad de incorporar a la ecuación diferencial parcial los efectos de fuerzas retardantes debidas a la interacción con el suelo y al amortiguamiento del pilote, sin complicar la solución a la ecuación diferencial parcial.
- Facilidad en el entendimiento conceptual de la solución al ser representada como una onda que viaja hacia la izquierda y otra a la derecha, teniendo en cuenta las condiciones de frontera del sistema.
- Facilidad de incorporar discontinuidades y cambios de sección a la solución de problemas más específicos.

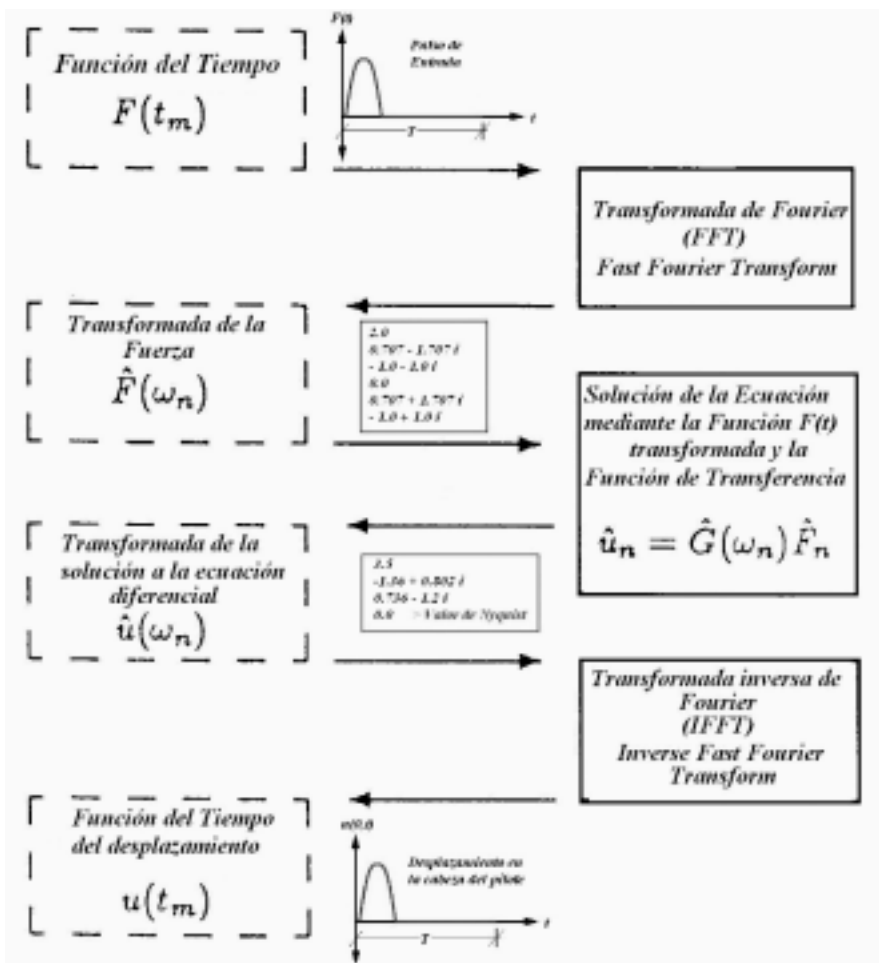
Así como lo afirma Doyle [1989], “cabe anotar que aunque el método de análisis espectral implementado hace uso de un computador, no es un método numérico en el sentido común ya que la descripción analítica de las ondas se mantiene”, y por tanto, es considerado como una solución analítica. Para la implementación numérica se utiliza la transformada rápida de Fourier.

En la Figura 4 se observa que el esquema del algoritmo básico para llevar a cabo la solución de la ecuación (3) consiste primero en convertir la señal de entrada  $F(t)$  en su forma espectral  $\hat{F}_n$  a través del uso de la transformada rápida de Fourier (FFT). La solución transformada se obtiene al evaluar el producto de la función de fuerza  $\hat{F}_n$  y la función de transferencia  $\hat{G}(k_{mn})$ :

$$\hat{u}_n = \hat{F}_n G(k_{mn}) \tag{4}$$

para cada frecuencia. Finalmente, la solución se reconstruye en el dominio del tiempo por medio del uso de la función de la transformada de Fourier inversa (IFFT).

Figura 4. Metodología general de análisis espectral para propagación de ondas



Fuente: Adaptado de [Doyle, 1989].

La ecuación (3) tiene la siguiente representación espectral:

$$EA \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + [\omega^2 \rho A - K - i\omega \eta] \hat{u} = 0 \quad (5)$$

que tiene solución de la forma:

$$\hat{u}(x) = Ae^{-ikx} + Be^{+ikx} \quad (6)$$

Donde

$$k = \pm \left[ \omega^2 \frac{\rho}{E} - \frac{K}{EA} - i\omega \frac{\eta}{EA} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Donde

A y B: amplitudes indeterminadas para cada frecuencia.

Cuando se evalúa la variación en el tiempo, la solución corresponde a dos ondas, una que viaja en dirección positiva y otra que viaja en dirección negativa. Esto es,

$$u(x, t) = \sum A e^{-i(kx - \omega t)} + \sum B e^{+i(kx + \omega t)} \quad (8)$$

Los valores de A, B,  $k$ , etc., se calculan para cada frecuencia  $\omega_n$  y dependen de las condiciones iniciales y de frontera.

#### 4. REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN DE ONDAS ANTE UN CAMBIO DE IMPEDANCIA

Cualquier cambio en la sección transversal del pilote o en las propiedades del material produce nuevas ondas. Para el análisis espectral unidimensional se consideran una onda incidente  $A_1$ , una onda reflejada  $B_1$  y una onda transmitida  $A_2$ . Por tanto, para dos secciones del pilote con valores de impedancia diferentes, el valor del desplazamiento respectivo sería:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= A_1 e^{-ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} \\ \hat{u}_2 &= A_2 e^{-ik_2 x} \end{aligned} \quad (9)$$

El análisis para dicho fenómeno se lleva a cabo considerando continuidad de fuerza y desplazamiento en la discontinuidad o cambio de impedancia, obteniendo la solución para los coeficientes de la onda reflejada  $B_1$  y la onda transmitida  $A_2$  de la siguiente manera:

$$B_1 = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} A_1 \quad (10)$$

$$A_2 = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} A_1 \quad (11)$$

Donde la impedancia  $Z$  está definida mediante la ecuación

$$Z = A\sqrt{\rho E} = \frac{EA}{c} \text{ para la respectiva sección del pilote.}$$

### 5. IMPLEMENTACIÓN DE LA SOLUCIÓN

La aplicación de la solución analítica descrita en el numeral anterior, que utiliza la metodología espectral para analizar el fenómeno de propagación de ondas en pilotes, se ha implementado en una aplicación computacional con entorno gráfico. Para la implementación de la solución se utilizaron las funciones de manejo de variable compleja, transformadas de Fourier y las facilidades para la creación de interfaces gráficas del paquete Matlab [Math Works, 2005]. Se consideran dos tramos de pilote con propiedades independientes con compatibilidad de deformaciones y esfuerzos en su interfaz, y se aplican las funciones de transferencia espectral para cada tramo con el fin de obtener la solución al problema.

Se consideró que el análisis del pilote con dos secciones es suficiente para la interpretación práctica del ensayo de PIT, ya que aun en el caso en que el pilote tenga varios cambios de impedancia a lo largo de su longitud, es muy difícil, y para propósitos prácticos imposible, pretender identificar el efecto de diferentes cambios a partir de una prueba de este tipo. El efecto de un solo cambio importante determina la respuesta en el ensayo, y es lo que es importante identificar e interpretar adecuadamente en la prueba.

La Figura 5 presenta la interfaz gráfica del programa Pitgraph desarrollado para la implementación de la solución.

Figura 5. Interfaz gráfica del programa Pitgraph para Matlab

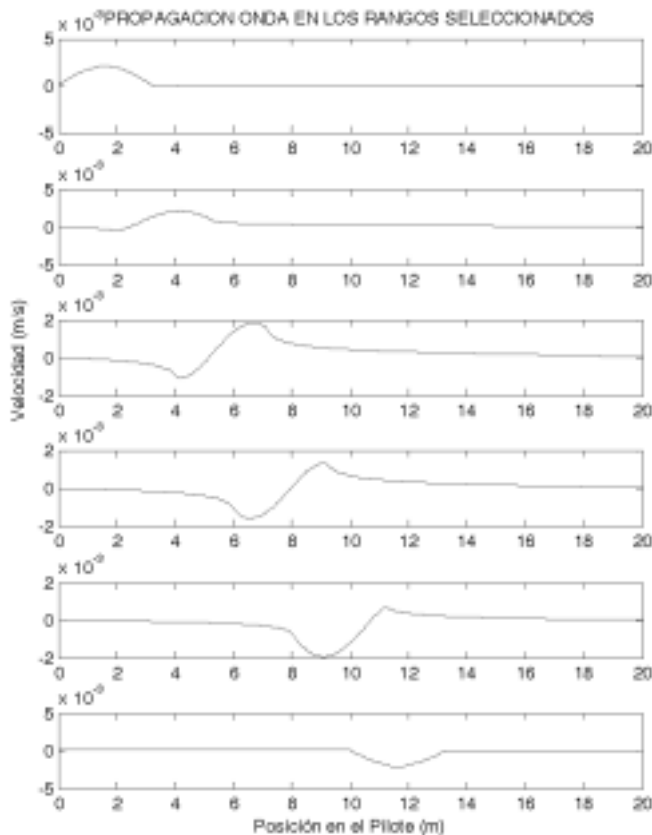


Fuente: [Restrepo, 2005].



Mediante el programa Pitgraph se puede llevar a cabo el análisis gráfico de propagación de la onda generada en diferentes posiciones para parámetros de desplazamiento, velocidad, aceleración, esfuerzo, deformación, fuerza de reacción y un análisis conjunto de todos los anteriores en una sola gráfica. En la Figura 6 se muestran algunos resultados obtenidos para la propagación de onda analizando la velocidad desde la posición  $X=0$  (cabeza del pilote) hasta  $X=10$  (punta del pilote), con las propiedades del pilote y pulso inicial predeterminados por el programa.

Figura 6. Solución de la ecuación de onda para la velocidad evaluada desde  $X=0$  hasta  $X=10$ . Onda que viaja a la derecha. Valores predeterminados del programa



Fuente: [Restrepo, 2005].

La gráfica de velocidad contra posición en el pilote es la más usada para llevar a cabo el estudio de integridad del pilote y, en este caso, se puede apreciar cómo la onda va cambiando su forma de manera paulatina hasta llegar a la punta del pilote en donde se refleja en su totalidad, ya que en el caso ilustrado se considera que el pilote tiene su extremo libre.

El programa para simular la prueba PIT permite realizar análisis de diferentes pilotes que incluyan una disminución o aumento de impedancia en cualquier posición a lo largo del fuste del mismo. De igual manera, el programa permite incluir en los análisis las propiedades del suelo alrededor y en la punta del pilote e incluir valores de amortiguamiento por el material del mismo.

Para la calibración del programa se llevaron a cabo modelaciones para tres casos característicos: el caso de un pilote de sección uniforme y casos de reducción o ampliación de la sección transversal del pilote, como se muestra en la Figura 7. Estos son los casos que más frecuentemente requieren una interpretación en la práctica geotécnica.

En la primera gráfica se muestra un pilote sin problemas de integridad que, al encontrar la punta el suelo de fundación, y bajo los efectos del suelo circundante y amortiguamiento, presenta un aumento de velocidad en dicha zona. Este resultado es típico para pilotes con adecuada construcción y buenas condiciones del suelo. La segunda gráfica muestra el resultado típico de un pilote con reducción de impedancia, en donde se presenta una reflexión de la onda con un aumento de velocidad en dicho punto y la correspondiente reflexión en la punta. Un caso como este se presenta cuando existen problemas que no permiten la construcción del pilote con el diámetro de diseño y, en consecuencia, se evalúan de manera especial para determinar cómo pueden llegar a afectar la capacidad de soporte del elemento. De manera similar, la tercera gráfica muestra un pilote con aumento de impedancia y reflexión en la punta.

## 6. EJERCICIO DE APLICACIÓN

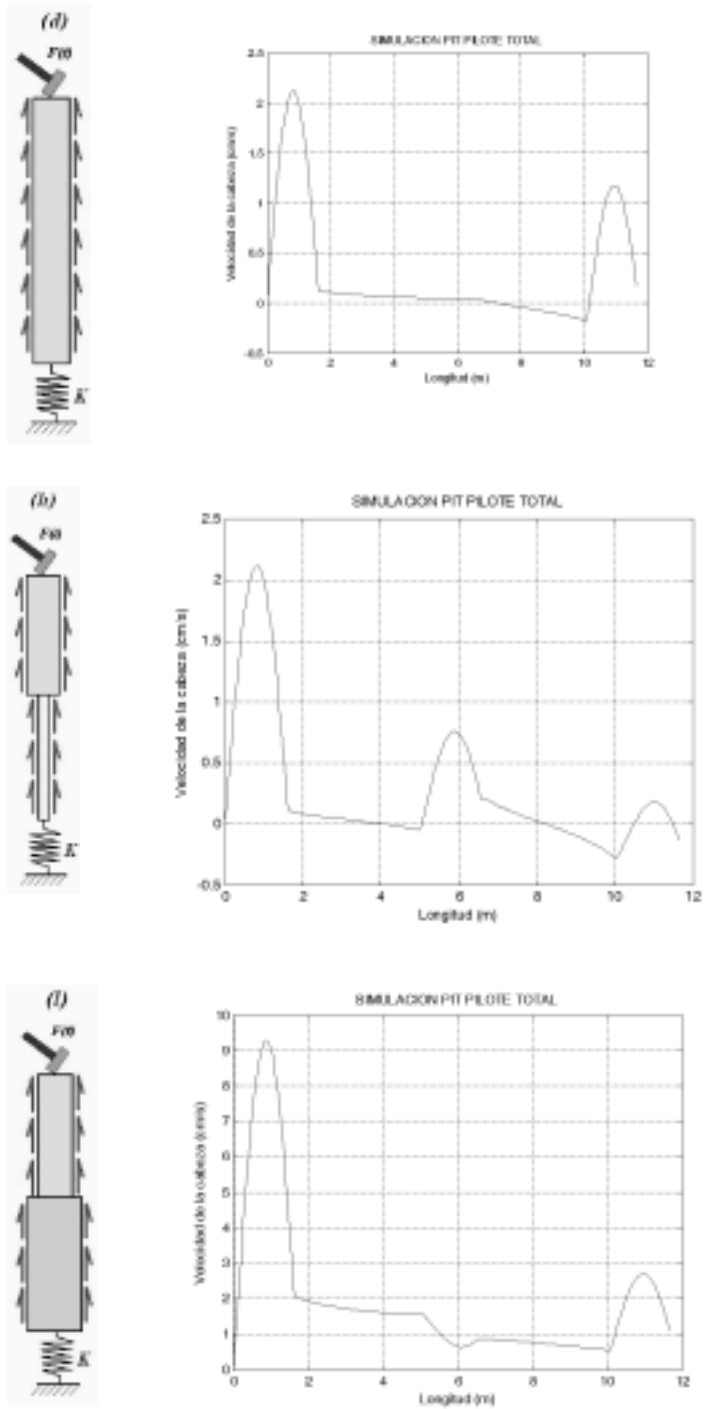
El programa Pitgraph puede ser usado como una herramienta que ayude a interpretar los resultados de las señales obtenidas en campo, ya que permite cuantificar parámetros como los siguientes, que de otra forma sólo se pueden evaluar de forma cualitativa:

1. La fuerza máxima de contacto dada por el martillo
2. Tiempo de contacto de la fuerza (longitud de onda característica)
3. Cambio de impedancia por el defecto encontrado
4. Efectos del suelo y del material del pilote en la propagación de la onda

A manera de ilustración de la aplicabilidad del modelo, en la Figura 8 se presentan los resultados de una prueba de PIT junto con los resultados de la modelación realizada con el programa Pitgraph. A partir de estos análisis se pudieron determinar los siguientes parámetros de la prueba:

- La magnitud de la fuerza debida al impacto del martillo en la punta fue de 5.5kN
- La duración del pulso inicial es de 0.0015 segundos
- El defecto se encuentra ubicado a una profundidad de 18.0m
- La reducción de diámetro es de 0.4m a 0.15m (62.5% del área transversal)

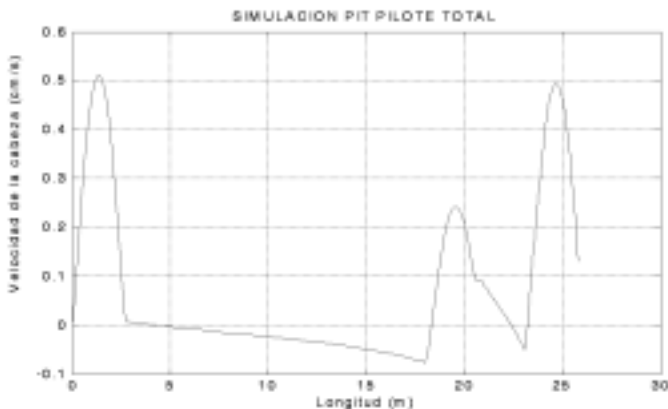
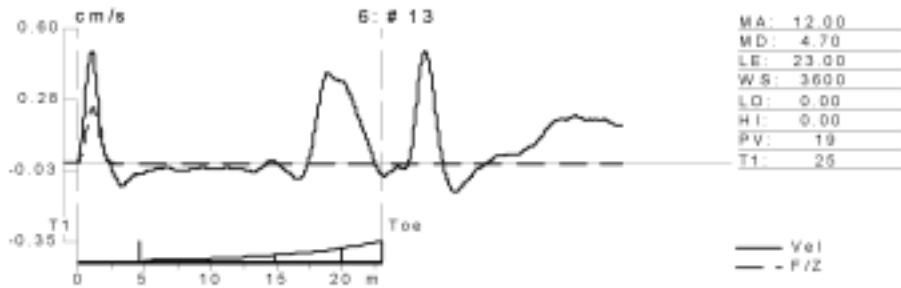
Figura 7. Casos típicos simulados mediante el programa Pitgraph



Fuente: [Restrepo, 2005].

- Los efectos debidos a la rigidez del suelo que rodea el fuste del pilote son de mínimo  $3 \times 10^7$  N/m
- El valor mínimo de rigidez del suelo en la punta para la reflexión positiva de la velocidad es de  $1 \times 10^{11}$  N/m
- El valor calibrado para el amortiguamiento de la señal en el pilote es de aproximadamente  $2 \times 10^4$  kg/s

Figura 8. Señal real y simulación obtenida mediante Pitgraph



Fuente: [Restrepo, 2005]

## 7. CONCLUSIONES

La teoría de propagación unidimensional de ondas en medios elásticos se puede utilizar para representar la prueba PIT al considerar el pilote como un material lineal elástico con tramos homogéneos. Debido a la esbeltez de los pilotes se puede considerar que solamente viajan ondas de compresión a lo largo de los mismos.

Dentro de las múltiples posibilidades de solución analítica, para la ecuación de propagación unidimensional de onda se escogió la metodología de análisis espectral, ya que esta permite simplificar la solución de la ecuación diferencial incorporando los efectos de fuerzas retardantes y disipativas, al igual que introducir discontinuidades y cambios de sección para problemas más específicos, sin comprometer la precisión de la solución.

El análisis espectral aplicado a la solución de la ecuación de onda permite obtener una solución de la ecuación diferencial parcial en términos de la variable de posición para que, mediante el uso de la Transformada Rápida de Fourier, el pulso inicial pueda ser incorporado a dicha solución. Al operar el pulso transformado en la forma espectral de la ecuación de onda utilizando funciones de transferencia, se puede obtener la solución en el dominio de la frecuencia y aplicar la Transformada Inversa de Fourier para obtener así la solución de la ecuación diferencial parcial en términos de las variables de tiempo y posición. Dicha solución se usó para realizar diferentes tipos de análisis y simulaciones.

La simulación de posibles casos permite hacer las siguientes observaciones con respecto al efecto de los diferentes factores considerados en los resultados de una prueba de PIT:

1. La existencia de apoyo en la punta genera una reflexión positiva de la velocidad en la propagación del pulso y, por el contrario, su inexistencia genera reflexión negativa de la velocidad. La amplitud de la reflexión en la punta del pilote depende de la amplitud transmitida que es función del cambio de impedancia.
2. La presencia de una reducción de impedancia en algún punto del pilote genera una reflexión con aumento de velocidad. Lo contrario ocurre si hay un aumento de impedancia. Su magnitud máxima depende de la magnitud del pulso inicial y del cambio de impedancia.
3. Los efectos de la fricción del suelo alrededor del fuste del pilote se observan en la señal al incrementar o reducir la velocidad en las zonas donde no se presenta ninguna reflexión.
4. El efecto de amortiguamiento en el material del pilote se aprecia con el decrecimiento de la señal a lo largo del pilote o de la señal debida a las reflexiones por cambios de impedancia y punta a lo largo del pilote.

El programa Pitgraph permite al usuario solucionar la ecuación de propagación unidimensional de onda aplicada a las condiciones de los pilotes utilizando un sencillo ambiente gráfico. El programa permite tener en cuenta las siguientes características:

1. Generación de diferentes tipos de pulsos (fuerza instantánea, triangular, rectangular y medio seno). Si se requiere es posible introducir otras señales fácilmente.
2. Simulación de diferentes opciones para la prueba de integridad de pilotes PIT teniendo en cuenta cambios de impedancia a una profundidad, efectos del suelo y amortiguamiento.
3. Análisis mediante gráficas de la propagación del pulso y de las diferentes variables de respuesta mecánica dependientes del desplazamiento (velocidad, aceleración, esfuerzo, deformación, fuerza de reacción).

La comparación de la simulación PIT con pruebas reales permite obtener información cuantitativa sobre la fuerza máxima de contacto, tiempo de contacto de dicha fuerza, diámetro aproximado del defecto y valoración de los posibles efectos del suelo circundante sobre el pilote. Esta valoración no es posible mediante la interpretación tradicional de las pruebas de integridad de pilotes que se basa en apreciaciones de tipo únicamente cualitativo. Por lo tanto, el desarrollo planteado es una herramienta útil para ampliar la aplicabilidad de la prueba PIT y reducir su subjetividad.

## REFERENCIAS

- Carino, N.J. *The Impact of Echo Method: An Overview*. Reprinted from the Proceedings of the 2001 Structures Congress & Exposition. May 2001. Washington D.C.: ASCE, 2001. 18 pp. Disponible en: <http://fire.nist.gov/bfrlpubs/build01/PDF/b01005.pdf>. Fecha de consulta: 7 de enero de 2005.
- Chernauskas, L., Paikowsky, S. Deep Foundations Integrity Testing: Techniques & Case Histories. En: *Civ. Eng. Pract.* 14 (1), 1999, 39-56.
- Doyle, J. F. *Wave Propagation in Structures*. New York: Springer-Verlag, 1989.
- Duffy, D.G. *Solutions of Partial Differential Equations*. TAB Professional and Reference Books. 1986.
- Koshlyakov, N.S. *Differential Equations of Mathematical Physics*. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1964.
- Likins, G. Recent Advances and proper Use of PDI low Strain Pile Integrity Testing. En: Niyama, S., Beim, J. *Application of Stress-Wave Theory to Piles*. Rotterdam: Balkema, 2000.
- Likins, G., Piscalko, G. Detection and Prevention of Anomalies for Augercast Piling. En: Niyama, S., Beim, J. *Application of Stress-Wave Theory to Piles*. Rotterdam: Balkema, 2000.
- Math Works Inc. *Matlab Creating Graphical User Interfaces*. 2005. Disponible en: <http://www.mathworks.com>. Fecha de consulta: 3 de mayo de 2005.

- Massoudi, N. Non-Destructive Testing of Piles using the low Strain Integrity Method. En: *Fifth International Conference on Case Histories in Geotechnical Engineering*. New York, 2004.
- Morgano, C.M. Determining Embedment Depths of Deep Foundations Using Non-Destructive Methods. En: *Fifth International Conference on the Application of Stress-Wave Theory to Piles*. Orlando: Townsend & Hussein, 1996.
- PDI. Pile Dynamics Inc. *Interpretation of Low Strain Results from a Pile Integrity Tester (P.I.T)*. 2003. Disponible en: <http://web.pile.com/download/docs/PIT%20Interpret.rtf>. Fecha de consulta: 17 de febrero de 2005.
- Rausche, F. Pile Integrity Testing and Analysis. En: Barends, F.B.J. *Application of Stress-Wave Theory to Piles*. Rotterdam: Balkema, 1992. Disponible en Internet: <http://www.pile.com/Education/4thStresswave/PileIntegrityTestingAndAnalysis.pdf>. Fecha de consulta: 7 de enero de 2005.
- Rausche, F. Determination of Pile Damage by Top Measurements. En: Lundgren, R. (ed.). *Behaviour of deep foundations: a symposium*. Sponsored by ASTM Committee D18 on Soil and Rock for Engineering Purposes, American Society for Testing and Materials, Boston, Mass., 28 June 1978. STP No. 670. Boston: ASTM, 1979.
- Restrepo, V. "Implementación de una solución analítica para el fenómeno de propagación unidimensional de ondas en pilotes y su adaptación para la interpretación de resultados de la prueba de integridad de pilotes (PIT)". Trabajo de Grado de Ingeniería Civil. Bogotá: Pontificia Universidad Javeriana, 2005.