

Cambio cognitivo en problemas de proporcionalidad modelado bajo autómatas finitos: Estudio de casos*

Cognitive change in proportionality problems modeled under finite automata: case study

Recibido: 10 Diciembre 2020 | Aceptado: 16 Diciembre 2021

HUGO ESCOBAR-MELO

Pontificia Universidad Javeriana, Colombia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8910-6172>

ROCÍO ABELLO CORREA^a

Pontificia Universidad Javeriana, Colombia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8271-8141>

JORGE CASTAÑO GARCÍA

Pontificia Universidad Javeriana, Colombia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4252-0456>

CESAR BUSTACARA-MEDINA

Pontificia Universidad Javeriana, Colombia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7478-2901>

RESUMEN

El presente artículo expone el desarrollo de la investigación, que tuvo como objetivo caracterizar los cambios cognitivos en el proceso de solución de tres problemas de proporcionalidad simple, en términos de las formas de control de variables, los diferentes estados y transiciones emergentes entre los intentos, los trayectos y trayectorias desplegadas, modelados bajo la técnica de autómatas finitos. Los problemas fueron presentados por el Software Uranus (versión 2) y los datos fueron modelados y analizados bajo la técnica de los autómatas finitos, por el sistema Auros (versión 1). Se realizaron dos estudios de caso con dos niñas escolares respecto de los cambios cognitivos, con un enfoque metodológico microgenético, que asume que el proceder del sujeto no es lineal y que evidencia ascensos, descensos y equilibrios puntuados, en el contexto de una epigénesis probabilística. Los resultados confirman que la novedad surge en un espacio de tensiones relacionadas, no secuenciales, como escenario sistémico de fuerzas encontradas que no obedecen indefectiblemente al paso entre lo simple y lo complejo; la emergencia del cambio se impone en algún momento, cuando una fuerza de un estado conquistado determina los siguientes en una determinada dirección, en un proceso de desarrollo no ergódico, que evidencia variación y diferencia, inter e intrasujeto. El estudio tiene limitaciones respecto de la muestra y de otros cálculos, como la probabilidad de seguir o no una trayectoria, que sería el objeto de una nueva investigación.

Palabras clave

cambio cognitivo; emergencia; auto organización; solución de problemas; autómatas finitos.

^a Autor de correspondencia. Correo electrónico: abellor@javeriana.edu.co

Para citar este artículo: Escobar-Melo, H., Abello-Correa, R., Castaño-García, J., & Bustacara-Medina, C. (2021). Cambio cognitivo en problemas de proporcionalidad modelado bajo autómatas finitos: Estudio de casos. *Universitas Psychologica*, 20, 1-16. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.upsy20.ccpp>

ABSTRACT

This paper presents the development of the research that aimed to characterize the cognitive changes in the process of solving three problems of simple proportionality. Cognitive change is characterized in terms of the forms of variable control, the different states and emergent transitions between the attempts, and the generated paths and trajectories. The problems were presented using the Uranus web application (version 2) and the data was modeled and analyzed under the finite automata technique using the Auros system (version 1). Two case studies were conducted with two schoolgirls regarding cognitive changes, with a microgenetic methodological approach, which assumes that the subject's behavior is not linear and that it shows specific ascents, descents, and equilibria, in the context of a probabilistic epigenesis. The results confirm that the novelty arises in a space of related tensions, non-sequential, as a systemic scenario of opposing forces that do not obey the passage between the simple and the complex; the emergence of change is imposed at some point, when a force of a conquered state determines the following in a certain direction, in a non-ergodic development process, which shows variation and difference, inter and intra subject. The study has its limitations in respect to the sample selected as well as the calculated likelihoods of following or not following a specific route, a theme that should be dealt in the next research.

Keywords

cognitive change; emerge; self-organization; problem solving; finite automata.

El equipo interdisciplinario ha tenido como trayectoria de investigación dos proyectos. El primero caracterizó las trayectorias de solución de un problema de proporcionalidad de movimiento rectilíneo con velocidad constante, presentado a 136 universitarios a través del software Uranus (versión 1). Se evidenció la utilización de cinco tipos de control de variables y cuatro tipos de covariación (relación entre las variables), que atestiguan el cambio cognitivo, respectivamente (Escobar et al., 2016). Una vez comprobada la variabilidad intrasubjetiva e intersubjetiva en la utilización de diversos tipos de control de variables y de covariación, en un segundo proyecto (Escobar et al., 2019) se investigaron las representaciones verbales utilizadas por los resolutores en la misma tarea problema estudiada.

En esta perspectiva de investigación, y con el propósito de capturar de forma más

precisa el cambio y la novedad cognitiva, se realizó un tercer estudio denominado “Variación de los procedimientos y de las formas de representación que permiten explicar el cambio como novedad cognitiva en la solución de tareas, equivalentes y de diferente contenido, que involucran relaciones de proporcionalidad simple en resolutores de la educación básica y media”. De esta investigación se deriva el presente artículo.

El vacío y la búsqueda de conocimiento radicó en seguir con precisión el cambio de los estados y transiciones emergentes, entre los intentos de solución y los trayectos y las trayectorias desplegadas, por los sujetos. El aporte a la sociedad, y específicamente a la educación, radica en que las razones, proporciones y proporcionalidad son objetos de conocimiento en los currículos de matemática y tienen la peculiaridad de ser una competencia transversal a todos los niveles educativos (Adjage & Pluvinaige, 2007; Guacaneme, 2002; Obando et al., 2014). Existe evidencia de que los estudiantes tienen grandes dificultades en el manejo de tales conceptos (Adjage & Pluvinaige, 2007; Lawton, 1993; Vergnaud, 1988, 1994). Se señalan errores causados por el uso de estrategias de adición o diferencia, donde la comparación multiplicativa era más apropiada, hechos que muestran que el razonamiento proporcional es un proceso de desarrollo a largo plazo (Cortina et al., 2014; Lamon, 2007; Ojose, 2015; Wahyuningrum & Suryadi, 2017).

El cambio bajo el paradigma de los sistemas y procesos relacionales

El planteamiento teórico acerca de lo que somos y podríamos llegar a ser, se responde desde un complejo proceso relacional del que, en el caso de la presente investigación, hacen parte las variables de escolaridad, experiencia individual y formas de enfrentar la solución de problemas, entre otras dimensiones (Overton & Lerner, 2012).

Los participantes, al resolver los problemas, despliegan el potencial de plasticidad relativa

como sujetos, autocreadores y autorreguladores, relativamente plásticos y no lineales, características observadas en los autómatas finitos descritos en los datos. Aquellos obedecen a los circuitos de retroalimentación positiva y negativa, creados por la acción interactiva con las tareas, que en este caso son sistemas de donde emergen una creciente diferenciación, integración y complejidad de respuestas adaptativas (Overton, 2015). En este contexto, la solución de problemas no es un asunto exclusivo de las distintas formas y procesos psicológicos que intervienen en el razonamiento, pues hacen parte los contenidos y las representaciones que se hagan de ellos, además de las encarnadas e instaladas en nuestra cultura cruzada por la tecnología (De Bot, 2017; Mascolo & Fischer, 2015; Mistry & Dutta, 2015; Overton, 2015; Perone & Simmering, 2017).

El paradigma de los sistemas de desarrollo relacional se centra en el estudio de los procesos que gobiernan el cambio del desarrollo, su mecanismo dinámico y en los intercambios entre los individuos y sus contextos. Brandtstädter (1998) señaló que cuando las regulaciones de desarrollo involucran relaciones de contexto individuales, mutuamente beneficiosas, constituyen regulaciones de desarrollo adaptativas, probabilísticas y aleatorias. El desarrollo regido por la autorregulación intencional, concepto central en el paradigma de los sistemas y procesos relacionales, se define como una referencia a asimilar información, sopesar posibilidades y consecuencias y hacer elecciones adaptativas para lograr un objetivo en particular (McClelland et al., 2015). Dichos autores argumentan que los individuos regulan constantemente su comportamiento en reacción “a” y con el apoyo “de” las oportunidades y limitaciones que ofrece su entorno. En consecuencia, la autorregulación óptima requiere organizar un conjunto diverso de habilidades de autorregulación. Por lo tanto, de manera similar al cambio conceptual que se aleja de los modelos de déficit, que describen lo que les falta a los niños en comparación con otros, hay un reconocimiento de que las personas desarrollan las estrategias reguladoras más adaptativas para

un contexto específico (Mascolo & Fischer, 2015). Se señala que la atención ahora se centra en cómo se desarrolla un individuo y la interacción entre los procesos que generan las características sólidas de su comportamiento, y de los muchos procesos involucrados en su plasticidad, de modo a posibilitar la toma de decisiones y el control de su entorno, donde la adaptabilidad resulta crucial (Bateson, 2015).

Centración en la persona, plasticidad relativa y relaciones contextuales entre sujetos influyentes entre sí, ha dado lugar a que las teorías de los sistemas de desarrollo relacional se utilicen como marco para modelar la estructura cambiante de las trayectorias ontogenéticas, dando lugar a la opinión de que la Ciencia del Desarrollo constituye un campo no ergódico (Molenaar & Nesselroade, 2015). El teorema ergódico sostiene que los conjuntos de datos están marcados por la homogeneidad entre individuos en una matriz tridimensional que involucra personas, variables y tiempo y estacionariedad de las puntuaciones de los individuos en las variables a lo largo del tiempo. Sin embargo, enmarcados por el paradigma de investigación de procesos y sistemas relacionales de desarrollo, se argumenta que existe variación y diferencia entre individuos, tanto dentro del tiempo como dentro de los individuos, a través del tiempo, en sus trayectorias de relaciones de contexto e individuales. En otras palabras, hay diferenciación intra y entre las personas a lo largo de la vida.

Sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos no lineales son inestables, adaptativos y complejos en sí mismos, y permiten observar el cambio cognitivo y la novedad, lo que implica la adhesión a cuatro criterios: a) la auto organización, b) la superposición, c) sustancia y proceso y d) las capas de causalidad (Steenbeek & van Geert, 2005).

Todo organismo, inclusive lo inerte, está estructurado por múltiples partes que interactúan de forma dinámica de donde emerge una composición como sistema dinámico ordenado,

consecuencia de su propia auto-organización, constituyendo un todo sometido a la inexorable variabilidad a través del tiempo. Dicho conjunto emergente obedece a los principios de la variabilidad, la multi-causalidad, las escalas de tiempo imbricadas, la auto-organización, los patrones repetitivos y los atractores. “Tanto la complejidad como el orden emergen como producto de principios elementales de interacción entre los componentes involucrados en el proceso de desarrollo” (van Geert, 2000, p. 64). El sistema dinámico que indudablemente remite a una composición temporal de relaciones entre las partes, es decir, a un estado específico en términos de estructura y función, deviene en un todo caracterizado por singularidades en tiempos y contextos específicos (Witherington, 2015). En este contexto, se plantea que estudiar los procesos psicológicos implica conservar su naturaleza dinámica, medir y explicar el fenómeno psicológico como sistema, integrar la variabilidad como fuente primaria de información e identificar la aparición de patrones en medio de la variabilidad, para así entender cómo los procesos en diferentes niveles de tiempo se influyen mutuamente (Guevara, 2019; Kunnen & van Geert, 2012).

En esta perspectiva teórica la indagación de la que surge el presente artículo se planteó la siguiente pregunta: ¿Cómo se caracterizan los cambios cognitivos en el proceso de solución de tres problemas de proporcionalidad simple, en términos de las formas de control de variables, los diferentes estados y transiciones emergentes entre los intentos, los trayectos y trayectorias desplegadas, modelados bajo la técnica de autómatas finitos? El objetivo se expresa en términos de caracterizar los cambios cognitivos en el proceso de solución de tres problemas de proporcionalidad simple, en términos de las formas de control de variables, los diferentes estados y transiciones emergentes entre los intentos, los trayectos y trayectorias desplegadas, modelados bajo la técnica de autómatas finitos.

Método

Tipo de estudio

Estudio de dos casos con medidas repetidas y uso de la técnica de autómatas finitos, mediante el software Aurus (versión 1), para modelar el cambio en la solución de las tareas-problema de proporcionalidad, presentadas bajo el software Uranus (versión 2). Así mismo, un análisis cualitativo microgenético de los autómatas finitos obtenidos, que implica acercarse detalladamente a los procesos desplegados por las participantes, a fin de reconstruir los procedimientos utilizados en la resolución de las tareas (Puche-Navarro, 2008; Siegler, 1995; Siegler & Crowley, 1991).

Participantes

Dos niñas, identificadas bajo los seudónimos de “Asuna” e “Isabela del Mar”, de once años y ocho meses y siete años y tres meses, de séptimo y segundo grado de escolaridad respectivamente, de la ciudad de Bogotá, Colombia. Ambas asisten a un colegio privado y pertenecen a un estrato socioeconómico medio. Las participantes, que dieron su consentimiento, fueron contactadas directamente con sus familias, las cuales autorizaron que sus hijas hicieran parte del estudio.

Instrumento/tareas problema

La investigación de la que se origina el presente artículo utilizó tres instrumentos, así: un software que presenta tres problemas de proporcionalidad de idéntica estructura lógica con diverso contenido (Uranus, versión 2), modificado de Uranus (versión 1) (Escobar et al., 2016); un software que analiza los valores que el resolutor dio, intento tras intento, en la resolución de las tareas problema, denominado Aurus (versión 1); y una entrevista semiestructurada.



Figura 1
 Interfaz de las tareas 1, 2 y 3, movimiento rectilíneo, movimiento de fluido y balanza de pesos



Figura 2
 Ejemplo de la interfaz de anticipación de un resultado con un solo intento

Se hizo un análisis para establecer la equivalencia de las tareas problema, a pesar de las diferencias en su contenido (movimiento rectilíneo, llenado de un recipiente y equilibrar pesos), como se ve en las Figuras 1 y 2. Las tareas problema conservan la misma estructura (su forma), es decir, a) es posible establecer correspondencias entre las variables de las tareas problema y b) constatar que las transformaciones que tienen las variables de una tarea problema, se corresponden con las transformaciones que se producen con las variaciones de las variables de otra tarea problema (Tabla 1).

Tabla 1

Comparación lógica de las tareas

Tipo de comparación	Tarea 1. Movimiento rectilíneo uniforme	Tarea 2. Llenado de un recipiente cilíndrico al que le entra una cantidad constante de líquido	Tarea 3. Equilibrar un peso (regla de la palanca)
Descripción	Determinar los valores de velocidad y duración para una distancia dada.	Determinar los valores de la cantidad de agua (por unidad de tiempo) y la duración para alcanzar una altura dada de la columna del líquido.	Determinar los valores de un peso que debe colocarse y de distancia a la que debe colocarse el punto de apoyo de una barra, para ponerla en equilibrio (posición horizontal).
Análisis de estructural	Variables: V (velocidad del móvil), T (duración del movimiento) y D (distancia recorrida). D es directamente proporcional a V y a T.	Variables: C (rapidez con la que entra el líquido), T (tiempo que dura llenando el recipiente) y A (altura del nivel que alcanza el líquido). A es directamente proporcional a C y a T.	Variables: P (peso colocado), D (distancia peso del punto de apoyo) y M (momento del peso). M es directamente proporcional a P y D.

Para la entrevista semiestructurada se diseñó el guion de entrevista, que fue sometido al proceso de validación por cinco expertos, cuyo Alfa de Cronbach fue de 0.910, con un promedio de calificación de las preguntas de 4, en una escala de 4 sobre 5, lo que evidencia la confiabilidad de las preguntas y la calidad de las mismas.

Para hacer el análisis de datos en lo relativo al control de variables, se creó el sistema Auros (versión 1), que permite generar grafos sobre los estados y las transiciones por las que puede pasar un resolutor al proceder con la resolución de las tareas problema (Hopcroft et al., 2008). Los datos recopilados por medio del software Uranus (versión 2), recogen los valores que el resolutor dio, intento tras intento, en la resolución de las tareas problema, y con base en esta información, el software Auros permite analizar los trayectos y trayectorias que posibilitan con detalle explorar el cambio cognitivo, aplicando la técnica de los autómatas finitos.

Un autómata finito (AF) consiste en un conjunto finito de estados y un conjunto de transiciones de estado a estado, sobre símbolos de entrada tomados de un alfabeto Σ , donde cada símbolo de entrada representa exactamente una transición a partir de cada estado, ilustrado como un grafo, cuyos nodos representan un estado del sistema, que se conectan por medio de arcos vectoriales para indicar la posibilidad de pasar de un estado q^i a un estado q^j . El diagrama de transición de estados resultante exhibe el comportamiento dependiente del tiempo del sistema, al representar tanto los estados como

los eventos asumidos entre un estado y otro (Černý et al., 2020; D'Antoni & Veanes, 2021; Lewis & Zax, 2019). Para esta investigación, los posibles cambios en los estados y transiciones para la Tarea problema 1, corresponden a las variables de velocidad del móvil (V) y duración del movimiento (T); las de la Tarea problema 2 son la rapidez con la que entra el líquido (C) y tiempo que dura llenando el recipiente (T); y las de la Tarea problema 3 son el peso colocado (P) y la distancia peso del punto de apoyo (D), a la cual se coloca en el balancín.

Tabla 2
Variaciones de estados y transiciones que modelan el cambio cognitivo

Variable	Variable B ⁺	Variable B ⁻	Variable B ⁼
Variable A ⁺	a j	b k	c
Variable A ⁻	d l	e m	f
Variable A ⁼	g	h	i

En la Tabla 2 se observan los estados {a, b, c, d, e, f, g, h, i}, producto de los cambios en los valores asociados a la Variable_A y a la Variable_B, donde dicha variación implica aumentar el valor, disminuirlo, o no cambiarlo. Sin embargo, es posible tener unas variaciones de detalle por parte del resolutor, en las cuales su nivel de cambio es muy pequeño, es decir, si la Variable_A o la Variable_B cambia de valor en menos de tres unidades, se pueden encontrar los estados {j, k, l, m}. Con base en este análisis, se tiene un conjunto de estados {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m}. El conjunto de entradas será la variación de los valores del intento previo con respecto a los valores del intento actual. Lo anterior implica el siguiente conjunto de entradas: si las variables Variable_A y Variable_B se incrementan {Variable_A⁺, Variable_B⁺}; si las variables Variable_A y Variable_B se decrementan {Variable_A⁻, Variable_B⁻}; si las variables Variable_A y Variable_B no cambian su valor {Variable_A⁼, Variable_B⁼}.

Los estados y las transiciones que usa el AF en esta investigación se componen de 8 tipologías: clasificación dividida en segmentos de control y de no-control. No control creciente $sncc = \{a...a\}$; no control decreciente $sncd = \{e...e\}$; no control alternancia $snca = \{b...b\} \cup \{d...d\}$; no control oscilante $snco = \{d.b.d.b...\} \cup \{b.d.b.d...\}$; control simple creciente $scsc = \{c...c\} \cup \{g...g\}$; control simple decreciente $scsd = \{h...h\} \cup \{f...f\}$; control oscilante (alterna) $sco = \{g \cup h\} \cup \{c \cup f\} \cup \{c \cup f\} \cup \{g \cup h\}$; cambio controlado $scc = \{j \cup k \cup l \cup m\}$. Los segmentos conforman trayectos, y a su vez estos configuran trayectorias. Los posibles trayectos que se pueden configurar de acuerdo con los segmentos que tienen la misma categoría son: trayectos de control ($tc = [scsc \cup scsd \cup sco \cup scc]$) y trayectos de no-control ($tnc = [sncc \cup sncd \cup snca \cup snco]$). Para obtener un trayecto de no-control {tnc} se unen todos los segmentos consecutivos de no-control, en este caso los segmentos de no-control creciente {sncc}, de no-control decreciente {sncd}, de no-control con alternancia {snca} y de no-control oscilante {snco}. Para el trayecto de control {tc} se agrupan los segmentos consecutivos de control simple creciente {scsc}, control simple decreciente {scsd}, control oscilante {sco} y cambio controlado {scc}. Los tipos de trayectorias utilizadas son: sin control (empieza y termina sin control), con control (empieza y termina con control), desmejorante (empieza con control y termina sin control) y mejorante (empieza sin control y termina con control). Las subcategorías son: no consolidada (hay trayectos intermedios de no-control), consolidada (no trayectos intermedios de no-control), con intermitencia (hay trayectos intermedios de no-control) y sin intermitencia (no hay trayectos intermedios de no-control).

Procedimiento

Para abordar la solución de la pregunta de investigación y cumplir con el objetivo se definieron las siguientes etapas:

Recolección de datos de la solución generada por los resolutores para las tres tareas problema isomorfas, usando el software Uranus (versión 2).

Modelar la solución a los problemas, usando autómatas finitos determinísticos por medio del software Aurus (versión 1).

Aplicar una entrevista semiestructurada a los mismos resolutores para capturar el argumento que soporta el proceder en la solución.

Realizar un análisis microgenético, con base en las entrevistas semiestructuradas y los modelos generados por Aurus (versión 1).

Finalmente, se realiza una discusión de los resultados obtenidos.

Resultados

Caso Asuna (11;08) 7mo grado de escolaridad

Problema 1 Movimiento rectilíneo

Tabla 3

Problema 1, Caso Asuna

Elemento	Int1	Int2	Int3	Int4	Int5	Int6	Int7	Int8	Int9
Variable1	20	48	61	1	61	60	78	85	80
Variable2	50	55	40	65	65	75	80	85	90
Meta	12.35	32.59	30.12	28.89	48.95	55.56	77.04	89.2	88.89
Transiciones	a	b	d	c	d	a	a	d	c
Segmentos	sncc	snco	scsc	snca	sncc	snca	scsc	-	-
Longitud	1	2	1	1	2	1	1	-	-
Trayectos	tnc	tc	tnc	tc	-	-	-	-	-
Longitud	2	1	3	1	-	-	-	-	-
Trayectoria	Mejorante con intermitencia	-	-	-	-	-	-	-	-
Longitud	4	-	-	-	-	-	-	-	-

En la Tabla 3, en términos de conjunto, se observan cambios en los estados transicionales, cambios en los segmentos y se configura una trayectoria general de tipo mejorante con intermitencia, además de covariación creciente desde el intento cinco hasta el noveno final.

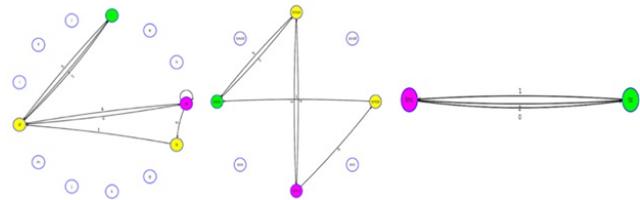


Figura 3

Autómatas finitos de transiciones de estados, segmentos y trayectorias en la Tarea 1, Caso Asuna

Parte de un no control creciente de variables (scsc), al incrementar el valor de las dos variables de forma simultánea, cambia a un segmento de no control oscilante (snco) en términos del incremento de una variable y decremento de la otra, pasa a un control simple creciente (scsc) donde el resolutor mantiene una variable constante e incrementa la otra, sigue a un no control con alternancia (snca) que implica el incremento de una variable y decremento de la otra, regresa a un no control de variables creciente (sncc), se devuelve a un no control con alternancia (snca), y termina en un control simple creciente (scsc). Se conforman dos trayectos (tnc) y (tc), el primero, de no control, y el segundo, de control.

Problema 2 Movimiento de fluido

Tabla 4
Problema 2, Caso Asuna

Elemento	Int1	Int2	Int3
Variable1	30	70	85
Variable2	60	70	85
Meta	25	68.06	100.35
Transiciones	a	a	-
Segmentos	snc	-	-
Longitud	2	-	-
Trayectos	tnc	-	-
Longitud	1	-	-
Trayectoria	Sin control	-	-
Longitud	1	-	-

En la Tabla 4 se muestran tres intentos y en el último se resuelve de forma exitosa el problema. No hay cambios de estado transicionales, solo un segmento y un trayecto de no control y una trayectoria final sin control de variables.

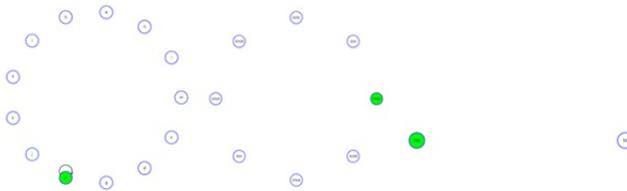


Figura 4
Autómatas finitos de transiciones de estados, segmentos y trayectorias en la Tarea 3, Caso Asuna

En la Figura 4 se evidencia que no hay cambios en las transiciones de estado. No hay cambios en la configuración de segmentos. Los trayectos finales que se observan son uno de no control y el otro de control. No se observan cambios en las transiciones ni en los segmentos, no hay control de variables y se consigue la meta al tercer intento.

Problema 3 Balanza de pesos

Tabla 5
Problema 3, Caso Asuna

Elemento	Int1	Int2	Int3	Int4	Int5
Variable1	50	80	80	90	80
Variable2	50	60	80	90	85
Meta	35.71	68.57	91.43	115.71	97.14
Transiciones	a	g	a	e	-
Segmentos	snc	scsc	snc	sncd	-
Longitud	1	1	1	1	-
Trayectos	tnc	tc	tnc	-	-
Longitud	1	1	2	-	-
Trayectoria	Sin control	-	-	-	-
Longitud	3	-	-	-	-

En la Tabla 5 se observan cambios en las transiciones de estado y en los segmentos. Se configuran dos trayectos de no control y uno de control, y la trayectoria final es de no control de variables.

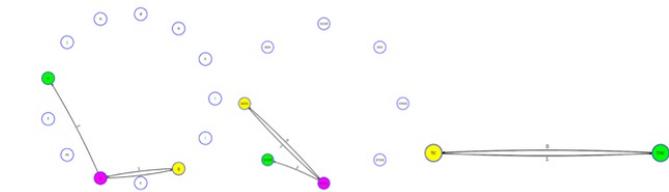


Figura 5
Autómatas finitos de transiciones de estados, segmentos y trayectorias en la Tarea 2, Caso Asuna

La Figura 5 muestra cambios transicionales. Se configuran tres segmentos: el primero (snc), que ha implicado el incremento del valor de las dos variables de forma simultánea, luego un segmento (scsc) donde mantiene una variable de forma constante, vuelve a (snc) y termina conformando un segmento (sncd) de no control decreciente, que consiste en el decremento del valor de las variables de forma simultánea. Los trayectos (tnc) de no control y (tc) de control constituyen el resultado final asociado a una trayectoria general de no control de las variables.

Caso Isabela del Mar (7;03) 2do de escolaridad

Problema 1 Movimiento rectilíneo

Tabla 6
Problema 1, Caso Isabela del Mar

Elemento	Int1	Int2	Int3	Int4	Int5	Int6	Int7	Int8	Int9
Variable1	98	59	76	79	80	81	82	83	84
Variable2	89	70	70	79	80	81	82	83	84
Meta	116.29	55.07	70.93	83.21	85.33	87.48	89.65	91.85	94.08
Transiciones	e	c	a	j	j	j	j	j	j
Segmentos	sncd	scsc	sncc	sc	-	-	-	-	-
Longitud	1	1	1	5	-	-	-	-	-
Trayectos	tnc	tc	tnc	tc	-	-	-	-	-
Longitud	1	1	1	1	-	-	-	-	-
Trayectoria	Mejorante con intermitencia	-	-	-	-	-	-	-	-
Longitud	4	-	-	-	-	-	-	-	-

En la Tabla 6 se evidencian pocos cambios en los estados transicionales, sin embargo, se evidencia un bucle de estados *j* de incremento alternativo de las dos variables. Igualmente, se evidencian cambios en los segmentos, y la trayectoria final resultante es mejorante con intermitencia al depender de los trayectos de no control y de control alternado, respectivamente.

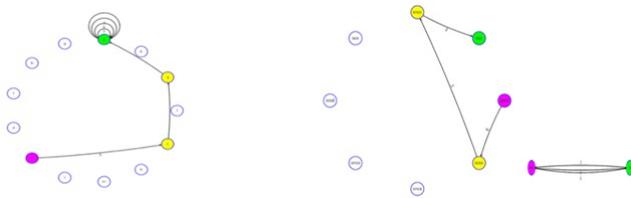


Figura 6
Autómatas finitos de transiciones de estados, segmentos y trayectorias en la Tarea 1, Caso Isabela

Los autómatas finitos de la Figura 6 muestran un interesante bucle de estados tipo *j*, que devela un incremento constante y positivo de las dos variables entre los intentos cuatro y nueve. Dicha conducta es novedosa para las evidencias hasta ahora obtenidas en estudios anteriores. El autómata finito de transiciones de segmentos se

inicia con un segmento (*sncd*) de no control, seguido por uno (*scsc*) de control donde el resolutor mantiene constante una variable, a lo que continúa con un segmento (*sncc*) que indica el incremento de las dos variables de manera simultánea, compatible con el bucle de estados *j* anteriormente descrito. Los trayectos (*tnc*) y (*tc*) resultan típicos de una trayectoria general de tipo mejorante con intermitencia.

Problema 2 Movimiento de fluido

Tabla 7
Problema 2, Caso Isabela del Mar

Elemento	Int1	Int2	Int3	Int4	Int5
Variable1	46	71	63	65	91
Variable2	55	58	80	91	89
Meta	30.85	50.22	61.46	72.13	98.77
Transiciones	a	d	a	b	-
Segmentos	sncc	snca	sncc	snca	-
Longitud	1	1	1	1	-
Trayectos	tnc	-	-	-	-
Longitud	4	-	-	-	-
Trayectoria	Sin control	-	-	-	-
Longitud	1	-	-	-	-

En la Tabla 7 se observan cambios transicionales de estado y cambios intermitentes en los segmentos, y la trayectoria final es sin control de variables.

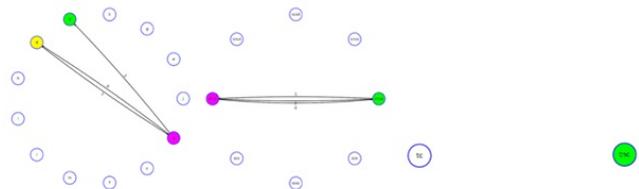


Figura 7
Autómatas finitos de transiciones de estados, segmentos y trayectorias en la Tarea 2, Caso Isabela

Los autómatas finitos de la Figura 7 permiten observar incremento de las variables (*a*), decremento e incremento (*d*), retorno al estado (*a*) y transición a un estado de incremento y decremento respectivo de las variables (*b*). Se conforman dos segmentos (*sncc*) de no control creciente y (*snca*) de no control con alternancia. Los trayectos conformados por los segmentos anteriores remiten a una trayectoria típica de no control.

Problema 3 Balanza de pesos

Tabla 8
Problema 3, Caso Isabela del Mar

Elemento	Int1	Int2	Int3	Int4	Int5	Int6	Int7	Int8	Int9	Int10	Int11
Variable1	28	16	32	35	65	75	76	87	0	88	81
Variable2	23	53	62	64	74	75	76	77	88	0	92
Meta	8.26	10.87	25.44	28.72	61.67	72.11	74.05	85.89	0	0	95.54
Transiciones	d	a	a	a	a	j	a	d	b	d	-
Segmentos	snca	sncc	scc	sncc	snco	-	-	-	-	-	-
Longitud	1	4	1	1	3	-	-	-	-	-	-
Trayectos	tnc	tc	tnc	-	-	-	-	-	-	-	-
Longitud	2	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-
Trayectoria	Sin control	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Longitud	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

La Tabla 8 permite observar cambio transicional en los estados y los segmentos. Sin embargo, no hay control de variables a partir de los trayectos de no control, uno de control y finalmente de no control.

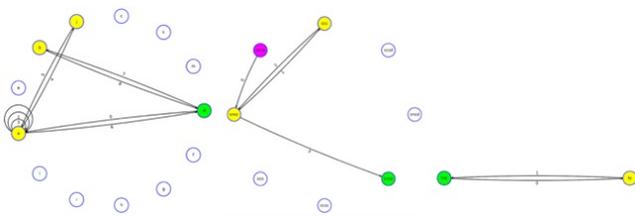


Figura 8
Autómatas finitos de transiciones de estados, segmentos y trayectorias en la Tarea 3, Caso Isabela

Los autómatas finitos de transiciones de estado muestran un bucle de estados donde las variables se incrementan produciendo cuatro consecutivos estados tipo *a* (Figura 8). El autómata finito de segmentos señala un no control con alternancia,

seguido de no control creciente, un cambio controlado, vuelta a no control creciente, para terminar en un segmento de no control oscilante. Los trayectos van a conformar una trayectoria sin control.

Tabla 9
Respuestas a partir de la entrevista semiestructurada

Anticipación con un solo intento	Asuna	Isabela del Mar
Problema 1: Movimiento rectilíneo	- 80v y 80i ¿Por qué piensas que lo harías de esa manera? - Para que la velocidad tenga lo mismo que el tiempo y pueda coordinarse y que pueda llegar a la meta. ¿Qué te hace pensar que es la mejor solución? - Porque ... creo que entre más velocidad pues va a llegar más rápido y tal vez con más tiempo también. ¿Tenemos el tanque hasta ahí, tiene 50 de apertura y 70 de tiempo, en un segundo intento que le colocarias para que se llene totalmente? - Pondría más en la apertura, 83 y el tiempo 73. ¿Por qué piensas que es la mejor solución, por qué lo harías de esa manera? - Pues creo que entre más apertura pues más agua va a salir y tal vez en menos tiempo. ¿Y esa es la mejor solución o tienes otra? - No, pues yo creo que es la mejor solución por que entre más abierta más agua sale.	- 98 de velocidad y de tiempo 97 ¿Por qué crees que lo harías de esa manera, ¿qué piensas que dándole esos dos valores el niño alcanzaría la meta? - Porque sería más rápido. ¿Qué te hace pensar que esa es la mejor solución? - Para no poner 98 y que se paze de la meta. El agua llegó hasta acá, ¿qué valores le pondrías para que se llene a (se parte de 50 de apertura y 70 de tiempo)? - La apertura le pongo 89 y al tiempo le pongo 81. ¿Por qué lo harías de esa manera? - Para no gastar el agua y va. ¿Y qué te hace pensar que esa es la mejor solución? - La 89 es para que llene más rápido y el tiempo es para no tener tanta agua abierta.
Problema 2: Movimiento de fluido	El balance está ahí y le colocaron 50 de distancia y 70 de peso, ¿qué valores le colocarias para que quede balanceado? - Le pondría un poco más de peso 85... y distancia un poquito más lejos por ahí como 75. ¿Qué te hace pensar que es la mejor manera de resolver esto? - Porque del otro lado se ve que tiene más masa, tendríamos que sumar más masa o peso al otro lado para que se equilibre. ¿Qué te hace pensar que es la mejor solución? - Por lo mismo, por que entre más peso va a equilibrarse y entre más distancia pues no tampoco va a quedar tan cerca y va a formar más peso.	¿Qué valores le pondrías al niño si en este momento está así (se parte de 50 de distancia y 70 de peso)? - 90 (de distancia) y a este le pondría 99 (de peso) ¿Y por qué? - Por que 90 es para que esté más bien sentido y de peso para que ... para que no se baje. ¿Por qué lo harías de esa manera? - Para para que el niño no se caiga y no se pegue. ¿Por qué te parece que es la mejor solución? - Porque es mejor no poner tanta distancia y no tener tanto peso.
Problema 3: Balanza de pesos	¿Qué ayudó más, dibujos, instrucciones, datos? ¿Qué hiciste para resolver los problemas? ¿Cuál te pareció más fácil? - El segundo y el más difícil el primero.	¿Qué fue lo que más te ayudó, los dibujos, los datos, las instrucciones? - Los dibujos. ¿Qué es lo que tuviste que hacer para resolver los problemas? - El primero era que un niño debía llegar a la meta, el segundo era llenar el agua, el tercero que el niño se ponga bien. ¿Qué crees que hiciste para resolver todos los problemas? - Poner la distancia y el peso. ¿Cuál de los problemas te pareció el más fácil? - El del agua. ¿Cuál te pareció el más difícil? - El del peso.

Para Asuna, las instrucciones y los cálculos ayudaron más que los dibujos en la solución del problema y la comprensión de los problemas es razonable; el primer problema (movimiento rectilíneo) es el más difícil y el segundo (movimiento de fluido) es el más fácil. Desde la perspectiva de Isabela del Mar, los dibujos ayudaron más y considera que el segundo problema (movimiento de fluido) es el más fácil, mientras que es el tercero (balanza de pesos) el más difícil, así como la comprensión de lo que se tiene que resolver es adecuada. Esta participante invoca situaciones de la vida real, como las referidas al gasto del agua, cuando una llave está mucho tiempo abierta, y el riesgo de caerse de un balancín. Se evidencia un contraste entre las dos participantes en lo referente al uso de representaciones científicas, para el caso de

Asuna, y no científicas en el caso de Isabela del Mar, en torno a la solución (Tabla 9).

Tabla 10

Rangos de éxito en la anticipación [70- e ; 90+ e] $e = 0.005$

Rango éxito	Asuna		Isabela del Mar	
	Solución	Anticipación	Solución	Anticipación
P ¹ [66.5-93.5]	90-90	80-80 ok	84-84	98-75 no
P ² [66.5-93.5]	85-85	85-75 ok	89-91	89-81 ok
P ³ [66.5-93.5]	85-80	75-85 ok	92-81	90-99 no

En la Tabla 10 se evidencia que la anticipación de Asuna en los tres casos es correcta. La anticipación de Isabela del Mar solo en un caso es correcta, aunque en los que no la obtuvo de esa manera, las variables se aumentaron de forma positiva y cercanas a los rangos de éxito. Lo anterior puede interpretarse como actos anticipatorios comprensivos de los problemas, donde se aprecia una relación razonable entre las variables para alcanzar el éxito. Sin embargo, no es posible decidir qué operaciones se han realizado por parte de las participantes, y si son o no multiplicativas o proporcionales en sentido estricto. Para efectos de las preguntas relacionadas con el cambio y la novedad, resalta la diferencia del lenguaje y el recurso a formulaciones propias del pensamiento científico y de la cotidianidad, en el caso de Asuna e Isabela del Mar, respectivamente.

Discusión

Desde los planteamientos de la fundamentación teórica de la investigación, se asume que el desarrollo constituye un complejo proceso relacional, más allá de la simple relación entre herencia y medio ambiente, que involucra los problemas presentados, la escolaridad, el nicho cultural, la experiencia individual y las formas de enfrentar, paso a paso, las tareas propuestas a los resolutores (Overton & Lerner, 2012).

Los problemas presentados constituyen sistemas complejos donde siempre se manejan

dos variables, además de un resultado, y se experimentan atractores novedosos. Un atractor, en este caso, hace referencia a cada estado calculado, que atrae o repele las siguientes actuaciones. De esta manera, se estudia el cambio y la novedad cognitiva a partir de la complejidad como paradigma epistemológico, en donde al interior de un sistema puede existir lo complicado, de característica cuantitativa, y lo complejo, de naturaleza cualitativa (Munné, 2014, 2015; Overton, 2015).

En todos los casos referenciados, no se puede predecir que la solución vaya creciendo asintóticamente, pues hay “ires y venires”: en Asuna, específicamente en el problema 1 y 3, respectivamente, y de manera evidente en Isabela del Mar, en los tres problemas. En los problemas hay múltiples atractores fijos. Así, en el Problema 1 de movimiento rectilíneo el atractor fijo es la meta, con las variables de tiempo y velocidad; en el Problema 2 de movimiento de fluido es la línea de llenado, con la apertura de la llave y el tiempo en que esta permanece abierta; y en el Problema 3 es el centro de gravedad de la balanza de pesos, el cual implica distancia y peso. Sin embargo, cada estado conseguido por la manipulación combinada de las variables y sus magnitudes, sean positivas o negativas, constituye un nuevo atractor que varía, y que, en virtud del anterior, hace que cada problema sea un auténtico sistema dinámico, complejo, no lineal y adaptativo (Lickliter & Honeycutt, 2015; Munné, 2014; Overton, 2015).

Las diferentes edades, escolaridad y experiencia, aunque se trate de participantes provenientes del mismo nicho familiar, determinan en gran parte el lenguaje que se usa para dar cuenta de lo que se hace, en este caso, de cómo se comprenden los problemas y qué operaciones y procesos se ejecutan, ligado a la vida cotidiana o de fuerte relación con la ciencia circulante. Sin embargo, entre mayor escolaridad, caso de Asuna, es mayor el recurso al lenguaje científico y, recíprocamente, entre menor escolaridad, caso de Isabela del Mar, mayor recurso a situaciones y escenarios de la vida cotidiana. Los dos casos evidentemente son distintos cualitativamente, aunque logren

resultados exitosos de solución de los tres problemas presentados, y los cambios y las novedades igualmente expresan la potencialidad y plasticidad de cada participante (Lerner & Damon, 2006).

En ambos casos es diferente y de esta forma lo grafican los autómatas obtenidos, que no son simples escaleras hacia modelos de llegada finales, sino epigénesis probabilísticas (Overton, 2015), donde dichas probabilidades no están disponibles en todo momento para la mente del sujeto en evolución, pero que son calculables a través de procedimientos estadísticos. Los resultados de ayer pueden prever los de mañana y, en consecuencia, las participantes no se asumen como sujetos replicantes, sino habitantes en campos de acción culturales, que poseen desempeños explícitos e implícitos, que hablan de ascensos y descensos y equilibrios puntuados diversos (Overton & Lerner, 2012). En este sentido, los problemas posibilitan, en los dos casos, actualizar ideas previas, algunas intuitivas en lugar de procedimientos estereotipados, memorizados.

En teoría, los cambios en los estados, luego en los segmentos y finalmente en los trayectos y trayectorias, concretan la forma de acercamiento al manejo de las variables que tendrán un desempeño estable, como el del pensamiento de los científicos, una vez se descubra por parte del sujeto las diversas formas de control de las variables. Los trayectos expresarán que existió control o no de las variables en juego en cada uno de los problemas presentados a los resolutores, para concluir si el desempeño es mejorante o no, en el grano más grueso del análisis.

Los dos casos modelados mediante autómatas finitos, permiten observar lo que se ha denominado “ires y venires” para resolver los problemas, las aproximaciones a formas de actuación más eficientes con un retorno a otras ya probadas, ejecuciones que se alejan del clásico desempeño del control estricto de las variables y sus diferentes formas, que en otras investigaciones se ha presentado como un progreso asintótico, continuo, lineal y muy monótono. En el Caso 1, Problema 1 (Tabla 3), se evidencian cambios en los estados transicionales,

cambios en los segmentos y configuración de una trayectoria general que progresa paulatinamente, además de un acercamiento al éxito desde el intento cinco hasta el noveno final. En este enfoque no hay ideales preconcebidos ni progresos hacia un estadio final asociado a un punto de partida, lo que permite concluir que el cambio se evidencia y que la novedad salta de forma emergente, como en el caso de Isabela del Mar, que muestra bucles de aumento iterativo de las variables en los problemas uno y tres, respectivamente (Figura 6). Fluctuación en “ires y venires”, no necesariamente como progreso monótono e ideológico, sino de pequeños trayectos conformados en escalas de tiempo discretas que, en el caso de Isabela del Mar, al aumentar las dos variables en igual magnitud, posibilita la emergencia de los estados y experiencias previas, como un efecto desencadenado, modelado por el autómata finito original de “bucle de estados”, no observado en anteriores indagaciones (Escobar et al., 2016).

En las investigaciones acerca de los funcionamientos inferenciales (Puche-Navarro et al., 2017) se confirma que no necesariamente se evoluciona de lo simple a lo complejo, sino en un espacio de tensiones relacionadas no secuenciales, y los datos de la presente investigación se asemejan a estos hallazgos. Los itinerarios de las niñas participantes se caracterizan por su irregularidad, ya que un segmento de control simple *scc* no lleva a uno de control oscilante *sco* o de cambio controlado *scc*, más complejo. De un problema a otro, que en este caso corresponde a medidas repetidas, los participantes muestran trayectorias variacionales al interior de los problemas y entre los problemas. Se evidencia, igualmente, trayectorias al principio exploratorias y más tarde tendencias ascendentes con oscilaciones, caracterizadas por acciones que cambian de modo repentino, en el llamado “ir y venir” de estados, hasta resolver los problemas.

Esta investigación se adhiere a la idea de escenarios en un sistema de fuerzas encontradas que no obedecen indefectiblemente al paso entre lo simple y lo complejo, pero donde la emergencia del cambio se impone en algún

momento, cuando una fuerza de un estado conquistado determina los siguientes en una determinada dirección. En la Figura 6 se observa cómo Isabela del Mar inicia configurando un estado e (decremento y decremento), luego c (decremento y incremento), siguiente a (incremento y incremento), a continuación i (igualdad e igualdad), y así, desde este momento iterativamente con aumento igual de las dos variables, hasta lograr el éxito. El cambio se localiza en el estado i, que es un atractor que aparece en la escena, y atrae y orienta a los demás estados hasta terminar. Las actuaciones de las niñas participantes corroboran que existen procesos de autorregulación que organizan y atraen cambios de estado, como movilizaciones hacia zonas de atractores superiores, proceso que igualmente producen desequilibrios y nuevas relaciones entre fuerzas, las cuales logran vencer a otras fuerzas y así organizar las acciones dirigidas a estados de mayor efectividad cognitiva (Ossa, 2011, 2013). Se infiere, para esta investigación, que existen variabilidades acotadas, oscilantes y ascendentes en los casos estudiados. Las primeras reflejan la tendencia a permanecer en un punto de equilibrio, es decir, transiciones relativamente estables en el tiempo con pocas probabilidades de cambio en los vectores, observable en la Figura 5, Problema 2, del Caso Asuna. La dinámica de variabilidad oscilante muestra transiciones irregulares en el tiempo, así como probabilidades estacionarias con cambios oscilantes en las probabilidades de transición de los vectores, en términos de permanecer o de retornar al punto de equilibrio inicial, observable en la Figura 7, Problema 2, del Caso Isabela del Mar. La dinámica de variabilidad ascendente refiere un cambio en las probabilidades de transición de los vectores y, en consecuencia, un campo de equilibrio definido a partir de búsquedas que utilizan formas de control de variables más complejas, observable en la Figura 3, Problema 1, del Caso Asuna.

Al final de esta trayectoria investigativa, conformada por los pequeños trayectos que constituyen las teorías consultadas, las adheridas, la aclaración mental de los paradigmas epistemológicos, la benevolencia de los métodos,

la potencia heurística de los autómatas finitos como técnica para analizar el cambio cognitivo y la valiosa evidencia aportada por las niñas participantes, se vuelve a la intención original de hacer posible y visible el cambio de forma iterativa con la novedad, como en una toma fílmica en tiempo real, donde se oye y se ve el “ir y venir” del pensamiento en acción. La perspectiva de futuros desarrollos de esta línea de investigación sobre cambio cognitivo, podría tener resultados fecundos calculando, ahora en la acumulación de ejecuciones de los resolutores, las probabilidades del paso de un estado a otro, mediante la técnica de las cadenas de Markov, “¿Por qué un sujeto va por una vía y abandona la otra?”. Overton y Lerner (2012) ya lo anunciaban, para seguir una línea de desarrollo debemos abandonar otra.

Agradecimientos

Artículo producto de la investigación “Variación de los procedimientos y de las formas de representación que permiten explicar el cambio como novedad cognitiva en la solución de tareas, equivalentes y de diferente contenido, que involucran relaciones de proporcionalidad simple en resolutores de la educación básica y media”, proyecto de investigación con financiación interna (ID PPTA 00007250, ID PRY 00000000007423). Financiada por la Vicerrectoría de Investigación, Pontificia Universidad Javeriana – Bogotá, D.C., Colombia. La investigación pertenece a la línea de investigación de Desarrollo y procesos cognitivos en contextos del Grupo de Investigación Desarrollo, Afectividad y Cognición.

Referencias

- Adjiage, R. & Pluvillage, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics*, 65(2), 149-175. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9049-x>
- Bateson, P. (2015). Ethology and human development. En W. Overton & P.

- Molenaar (eds.), *Handbook of Child Psychology and Developmental Science: Theory and Method*, pp. 208-243. Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118963418.childpsy106>
- Brandtsta#dter, J. (1998). Action perspectives on human development. En R. M. Lerner (ed.), *Theoretical models of human development*, pp. 807-863. Wiley.
- Černý, J., Bosanský, B., & An, B. (2020), Finite State Machines Play Extensive-Form Games. *EC'20: Proceedings of the 21st ACM Conference on Economics and Computation*, Julio, 509-533. <https://doi.org/10.1145/3391403.3399517>
- Cortina, J., Visnovska, J., & Zuniga, C. (2014). Unit fractions in the context of proportionality: supporting students' reasoning about the inverse order relationship. *Mathematics Education Research Journal*, 26(1), 79-99. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0112-5>
- D'Antoni, L. & Veanes, M. (2021). Automata Modulo Theories. *Communications of the ACM*, 64(5), 86-95. <https://doi.org/10.1145/3419404>
- De Bot, K. (2017). Complexity theory and dynamic systems theory. En L. Ortega y Z. Han (eds.), *Complexity theory and language development: in celebration of Diane Larsen-Freeman*. Amsterdam: John Benjamins, pp. 51-58. Universidad de Groningen. <https://doi.org/10.1075/llt.48.03deb>
- Escobar, H., Abello, R., & Castaño, J., (2016). Trayectorias de control y covariación de variables como expresión del cambio cognitivo en la solución de un problema. *Universitas Psychologica*, 15(1), 281-302. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.upsy15-1.tccv>
- Escobar, H., Abello, R., & Castaño, J., (2019). Análisis de las representaciones de los cálculos operacionales en la solución de un problema de movimiento uniforme. *Revista Guillermo De Ockham*, 17(2), 9-28. <https://doi.org/10.21500/22563202.4120>
- Guacaneme, E. (2002). "Una caja vacía, pero invadida de funciones": una propuesta de innovación en un contexto común. *Memoria Cuarto Encuentro Colombiano de matemática educativa*. Universidad de los Andes. https://www.academia.edu/5503552/_Una_caja_vac%C3%ADa_pero_invadida_de_funciones_una_propuesta_de_innovaci%C3%B3n_en_un_contexto_com%C3%BAn
- Guevara, M. (octubre, 2019). *Development, a movement science* (Desarrollo, Una ciencia en Movimiento). Development Node. ASCOFAPSI: Contemporary Development Discussions. Cali, Colombia.
- Hopcroft, J., Motwani, R. y Ullman, J. (2008). *Introducción a la teoría de autómatas, lenguajes, y computación*. Pearson Educación, S. A.
- Kunnen, S. & van Geert, P. (2012). General characteristics of a dynamic systems approach. En S. Kunnen (ed.), *A Dynamic Systems Approach to Adolescent Development*, pp. 15-34. Psychology Press. <https://doi.org/10.4324/9780203147641-10>
- Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework. En F. K. Lester Jr. (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 629-668. nctm-Information Age Publishing.
- Lawton, C. (1993). Contextual factors affecting errors in proportional reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(5), 460-466. <https://doi.org/10.2307/749154>
- Lerner, R. & Damon, W. (2006). *Handbook of Child Psychology: Theoretical Model of Human Development*. Wiley.
- Lewis, H. & Zax, R. (2019). *Essential Discrete Mathematics for Computer Science*. Princeton University Press.
- Lickliter, R. & Honeycutt, S. (2015). Biology, development, and human systems. En W. Overton & P. Molenaar (eds.), *Handbook of Child Psychology and Developmental Science: Theory and Method*, pp. 162-207. Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118963418.childpsy105>

- Mascolo, M. & Fischer, K. (2015). Dynamic development of thinking, feeling, and acting. En W. Overton y P. Molenaar (eds.), *Handbook of Child Psychology and Developmental Science: Theory and Method*, pp. 113-161. Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118963418.childpsy104>
- McClelland, M., Geldhof, G., Cameron, C., & Wanless, S. (2015). Development and self-regulation. En W. Overton y P. Molenaar (eds.), *Handbook of Child Psychology and Developmental Science: Theory and Method*, pp. 523-565. Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118963418.childpsy114>
- Mistry, J. & Dutta, R. (2015). Human development and culture. En W. Overton y P. Molenaar (eds.), *Handbook of Child Psychology and Developmental Science: Theory and Method*, pp. 369-406. Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118963418.childpsy110>
- Molenaar, P. & Nesselroade, J. (2015). Systems methods for developmental research. En W. Overton & P. Molenaar (eds.), *Handbook of Child Psychology and Developmental Science: Theory and Method*, pp. 652-682. Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118963418.childpsy117>
- Munné, F. (2014). *Perfecto e Imperfecto: Completo. Estudios sobre la Complejidad*. Bogotá: California-edit.
- Munné, F. (2015). *Conferencias dictadas al Nudo de Desarrollo. Red de Investigadores en Psicología*. Universidad de la Sabana, Bogotá. Colombia.
- Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Relime*, 17(1), 59-81. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1713>
- Ojose, B. (2015). Proportional Reasoning and Related Concepts: Analysis of Gaps and Understandings of Middle Grade Students. *Universal Journal of Educational Research*, 3(2), 104-112. <https://doi.org/10.13189/ujer.2015.030206>
- Ossa, J. (2011). Funcionamiento cognitivo: un inextricable juego de pérdidas y ganancias. *Acta Colombiana de Psicología*, 14(2), 45-55.
- Ossa, J. (2013). Matrices de transición y patrones de variabilidad cognitiva. *Universitas Psychologica*, 12(2), 559-570. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.UPSY12-2.mtpv>
- Overton, W. (2015). Processes, relations, and relational-developmental-systems. En W. Overton & P. Molenaar (eds.), *Handbook of Child Psychology and Developmental Science: Theory and Method*, pp. 9-62. Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118963418.childpsy102>
- Overton, W. & Lerner, R. (2012). Relational developmental systems: Paradigm for developmental science in the post-genomic era. *Behavioral and Brain Sciences*, 35(5), 375-376. <https://doi.org/10.1017/S0140525X12001082>
- Perone, S. & Simmering, V. (2017). Applications of dynamic systems theory to cognition and development: new frontiers. *Advances in child development and behavior*, 52, 43-80. <https://doi.org/10.1016/bs.acdb.2016.10.002>
- Puche-Navarro, R. (2008). Érase una vez el desarrollo. En J. Larreamendy-Joerns, R. Puche-Navarro & A. Restrepo (ed.), *Claves para pensar el cambio: Ensayos sobre psicología del desarrollo*, pp. 30-68. Universidad de los Andes, Centro de Estudios Socioculturales e Internacionales.
- Puche-Navarro, R., Cerchiaro, E., & Ossa, J. (2017). Emergencia, cambio, autorregulación y metáforas visuales. En R. Puche-Navarro (comp.), *El desarrollo cognitivo se reorganiza*. pp. 35-66. Editorial: U. Autónoma de Occidente.
- Siegler, R. (1995). How Does Change Occur: A Microgenetic Study of Number Conservation. *Cognitive Psychology*, 28(3), 225-273. <https://doi.org/10.1006/cogp.1995.1006>
- Siegler, R. & Crowley, K. (1991). The microgenetic method: A direct means for studying cognitive development. *American Psychologist*, 46(6), 606-620. <https://doi.org/10.1037/0003-066X.46.6.606>

- Steenbeek, H. & Van Geert, P. (2005). A dynamic systems model of dyadic interaction during play of two children. *European Journal of Developmental Psychology*, 2(2), 105-145. <https://doi.org/10.1080/17405620544000020>
- van Geert, P. (2000). The Dynamics of General Developmental Mechanisms: From Piaget and Vygotsky to Dynamic Systems Models. *Current Directions in Psychological Science*, 9(2), 64-68. <https://doi.org/10.1111/1467-8721.00062>
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. En J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, vol. 2, pp. 141-161. Lawrence Erlbaum associates.
- Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why. En G. Harel & J. Confrey (ed.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, pp. 41-59. State University of New York Press.
- Wahyuningrum, A. & Suryadi, D. (2017). Epistemological Obstacles on the Topic of Ratio and Proportion among Junior High School Students. *Journal of Physics: Conference Series*, 895(1), 012066. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/895/1/012066>
- Witherington, D. (2015). Dynamic Systems in Developmental Science. En W. Overton & P. Molenaar (eds.), *Handbook of Child Psychology and Developmental Science: Theory and Method*, pp. 63-112. Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118963418.childpsy103>

Notas

- * Artículo de investigación.