

## CAOS CUÁNTICO EN UN BILLAR RECTANGULAR

## QUANTUM CHAOS IN RECTANGULAR BILLIARD

Edgar González<sup>1</sup>, J. Roldán<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Grupo de Nanociencia, Departamento de Física,  
Pontificia Universidad Javeriana. Cra. 7 No. 40-62, Bogotá, Colombia.

<sup>2</sup>Departamento de Física, Universidad del Valle Ciudad Universitaria Meléndez,  
Calle 13 No 100-00, Cali, Colombia  
[egonzale@javeriana.edu.co](mailto:egonzale@javeriana.edu.co), [jroldan@telesat.net.co](mailto:jroldan@telesat.net.co)

Recibido: 12-08-2008: Aceptado: 14-10-2008:

### Resumen

Se aborda el estudio numérico del billar rectangular desde el contexto de la teoría cuántica Bohmiana. Se verifican las condiciones que hacen posible la existencia de caos cuántico, identificando el comportamiento irregular con el uso de criterios tales como exponentes de Lyapunov y espectros de potencia. Se determina el potencial cuántico así como los potenciales de Wigner y Ferry-Zhou analizando el papel que juegan en las manifestaciones de caos cuántico y su correspondencia en el límite clásico.

**Palabras clave:** billares cuánticos, billar rectangular, caos cuántico, mecánica bohmiana.

### Abstract

Numeric study of the rectangular billiards is approached from the context of the causal quantum theory. The conditions that make possible the existence of quantum chaos are verified, identifying irregular behavior through criteria such Lyapunov exponents and power spectra. Quantum potential is determined as well as Wigner and Ferry-Zhou potentials, analyzing the role they play in the expressions of quantum chaos and its correspondence in the classic limit.

**Key words:** bohmian mechanics, rectangular billiard, quantum billiards, quantum chaos,

### INTRODUCCIÓN

El sistema conocido con el nombre de billar, el cual consiste básicamente en una frontera que confina una partícula que se mueve libremente en su interior, se ha convertido en uno de los sistemas, que aunque conceptualmente simple, permite explorar en forma completa la problemática propia de los sistemas que hacen manifiesto un comportamiento regular o caótico tanto clásica como cuánticamente. Probablemente no hay aspecto esencial en el estudio de sistemas caóticos que no pueda ser encontrado en el denominado *billar*. Este aspecto motiva un creciente interés en

su estudio y aplicación en campos emergentes como la nanotecnología, la cual orienta parte de sus esfuerzos a la implementación de nanodispositivos, en los cuales los electrones son confinados en una región de frontera bien definida gracias a las técnicas de alta precisión litográfica, sistemas en donde interesa estudiar su comportamiento dinámico para posibilitar las estrategias de control para hacer operativos dichos dispositivos. Desde el punto de vista teórico, estos sistemas juegan un papel fundamental en la tarea de estudiar el comportamiento caótico de sistemas clásicos y su contraparte cuántica, aspecto que motiva el uso de aproximaciones alternativas a la teoría cuántica

que permitan dilucidar desde diferentes contextos la correspondencia clásica-cuántica, la naturaleza y origen del caos a nivel cuántico y criterios para su identificación.

Se ha argumentado (Batterman, 1991; de Polavieja, 1996) que el problema de la existencia del caos cuántico está estrechamente ligado con la posibilidad de encontrar para una partícula el equivalente cuántico de una órbita clásica en el espacio de fase. Así, desde este punto de vista surge la necesidad de contar con el concepto de trayectoria en mecánica cuántica, aspecto que permitiría aplicar criterios típicos para identificar la existencia de caos tales como exponentes máximos de Lyapunov, entropía K-S, análisis de espectros de potencia y dimensión fractal, entre otros. Una aproximación que cumple con este tipo de requerimientos es la teoría cuántica Bohmiana, la cual proporciona el mismo tipo de predicciones que la interpretación usual (González, 1996), pero que resulta ventajosa para el tratamiento del problema del caos cuántico al contar trayectorias formalmente provenientes de una ecuación de campo de velocidad. Aparecen, sin embargo, una gran variedad de interrogantes frente a su naturaleza y legitimidad como herramienta computacional para abordar la fenomenología cuántica, aspecto que ha dado lugar a un creciente debate motivado entre otras cosas, por la importancia que en años recientes han adquirido el uso de trayectorias para el estudio de sistemas mecánico cuánticos (Nikolic, 2005; Shinfren *et al.*, 2001; Strunz *et al.*, 1999; van Dorselaer *et al.*, 2000; Beswick *et al.*, 2006). El denominado método de trayectorias cuánticas, por ejemplo, adopta el punto de vista hidrodinámico-Bohmiano para estudiar una gran variedad de problemas de dispersión, construcción de funciones de correlación en el tiempo para una representación de valor inicial (Bittner, 2000), decoherencia cuántica (Appleby, 1999), desarrollos estadísticos aproximados para sistemas de alta dimensionalidad (Lopreore *et al.*, 1999; Wyatt *et al.*, 2000), dinámica cuántica para estados continuos (Gindensperger *et al.*, 2000), descripción cuántica-clásica de dispersión rotacional difractiva (Gindensperger *et al.*, 2002), cálculos de tiempo de tunelamiento (González *et al.*, 1998).

Otro aspecto que puede ser ventajoso dentro del contexto de la teoría Bohmiana es la posibilidad de contar con el denominado potencial cuántico, entidad que puede jugar un papel importante en la tarea interpretativa de "causación" de comportamientos regulares o irregulares en sistemas cuánticos, así como en la correspondencia clásica-cuántica sensiblemente afectada cuando se interioriza en la problemática del caos cuántico.

En el presente trabajo, se estudia numéricamente el billar rectangular dentro del contexto de la teoría cuántica

Bohmiana así como el papel que juega el potencial cuántico, de Wigner y de Ferry-Zhou en la aparición del comportamiento irregular del sistema.

## CRITERIOS PARA ESTABLECER CORRESPONDENCIA EN CAOS CUÁNTICO-CLÁSICO

En la búsqueda de criterios que permitan establecer algún tipo de correspondencia entre el comportamiento cuántico y su contraparte caótica clásica se han establecido conjeturas basadas en el hecho de que las propiedades estadísticas de los niveles energía cuánticos pueden reflejar la naturaleza dinámica del correspondiente sistema clásico (Porter, 1965; McDonald *et al.*, 1979). Estos criterios han sido verificados en análisis semiclásicos de algunos modelos Hamiltonianos (Eckhardt, 1988). Desde este contexto de análisis estadístico de niveles energéticos, una medida estadística importante tiene que ver con la distribución  $P(s)$  de los espaciamientos entre niveles de energía adyacentes, donde  $P(s)ds$  corresponde a la probabilidad de encontrar el espaciamiento entre dos niveles vecinos en el intervalo  $(s, s+ds)$ . Se argumenta que si el sistema es clásicamente integrable, la función de distribución  $P(s)$  obedece una estadística tipo Poisson (Ott, 1993), dada por

$$P(s) = e^{-s}, \quad (1)$$

mientras que para sistemas que exhiben comportamiento caótico, la distribución corresponde a un tipo ortogonal Gausiano (distribución de Wigner):

$$P(s) = \frac{\pi s}{2} e^{-\frac{\pi s^2}{4}}. \quad (2)$$

## TEORÍA CUANTICA BOHMIANA

Si la función de onda escrita en forma polar  $\psi = R e^{iS/\hbar}$  es sustituida en la ecuación de Schrödinger con un potencial clásico  $V$ , se obtiene una parte imaginaria dada por:

$$\frac{\partial R^2}{\partial S} + \nabla \cdot \left( R^2 \frac{\nabla S}{m} \right) = 0, \quad (3)$$

y una parte real:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = 0. \quad (4)$$

expresión que corresponde a una ecuación de Hamilton-Jacobi modificada por un término adicional que toma el nombre de potencial cuántico:

$$Q = -\frac{\eta^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}, \quad (5)$$

el cual, al ser de naturaleza netamente cuántica, excluye la posibilidad de que la teoría propuesta pueda ser tratada como una simple extensión de una ontología clásica. En la representación de coordenadas, el potencial cuántico puede ser escrito como:

$$-\frac{\eta^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = -\frac{\eta^2}{8m} \nabla^2 \ln R^2 - \frac{\eta^2}{8m} \frac{\nabla^2 R^2}{R^2}. \quad (6)$$

con el primer término identificado por Ferry y Zhou como el *potencial de Wigner* (notado como  $\mu$ ), y con el segundo término, introducido como una corrección en el uso de la aproximación hidrodinámica cuántica para modelamiento de semiconductores (Ferry et al., 1993), al cual se le suele denominar el *potencial de Ferry-Zhou* (notado como  $s$ ). El potencial de Wigner puede ser identificado como energía de dispersión de cantidad de movimiento y al potencial de *Ferry-Zhou* como una medida de la curvatura local de la densidad de probabilidad a la cual se la denomina energía de localización, ya que contribuye positivamente al potencial cuántico en regiones de curvatura negativa y negativamente en regiones de curvatura positiva, lo que corresponde a una dispersión espacial. El potencial cuántico, en la representación de coordenadas, puede ser considerado responsable del «balance» entre la dispersión espacial y de cantidad de movimiento, aspecto que permite considerar una conexión entre el potencial cuántico y el principio de incertidumbre (Brown, 2002; González et al., 1995).

De acuerdo a la interpretación propuesta, una entidad cuántica, tal como el electrón, es una partícula que describe una *trayectoria bien definida* con velocidad  $v$ , que puede ser determinada causalmente y satisface la ecuación de movimiento

$$m \frac{dv}{dt} = -\nabla(V + Q), \quad (7)$$

similar a la ecuación de movimiento de la mecánica clásica, aunque debe subrayarse que el término  $-\nabla Q$  no posee análogo clásico.

La Ec. (7) sugiere una interpretación en la cual la partícula se estudia dinámicamente a partir de trayectorias  $q(t)$ , con una ecuación guía dada por:

$$\mathfrak{P} = \frac{i\eta}{2m} \frac{\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi}{|\psi|^2} = \frac{1}{m} \nabla S(q, t) \Big|_{q=q(t)}. \quad (8)$$

## CAOS CUÁNTICO BOHMIANO

Para el caso particular de una partícula de masa  $m$ , desde el punto de vista de la teoría Bohmiana, la dinámica de la partícula se encuentra gobernada por una ecuación de movimiento dada por (7) que proporciona la trayectoria en el espacio de configuración. Una medida de la separación de trayectorias vecinas en el espacio de configuración se puede dar en términos del logaritmo natural de la distancia euclidiana en función del tiempo dada por:

$$D(t) = \sqrt{\sum_1^2 [x_i(t) - y_i(t)]^2} \quad (9)$$

Se cuenta además de las coordenadas  $q(t)$ , con los momentos asociados dados por  $p(t) = \nabla S$  que permite una descripción del sistema en el espacio de fase. La distancia euclidiana de trayectorias vecinas en el espacio de fase se puede escribir como

$$d(t) = \sqrt{\sum_1^2 [x_i(t) - y_i(t)]^2 + [p_{x_i}(t) - p_{y_i}(t)]^2}. \quad (10)$$

Los exponentes de Lyapunov para un sistema cuántico se pueden calcular como (Faisal et al., 1995):

$$\lambda(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{d(0) \rightarrow 0} \ln \left( \frac{d(t)}{d(0)} \right), \quad (11)$$

con  $d(0)$  distancia entre dos trayectorias para  $t=0$ .

Una definición para caos cuántico dentro del contexto de la teoría Bohmiana podría ser formulada en los siguientes términos:

**Definición.** Para un flujo de trayectorias cuánticas Bohmianas en el espacio de fase, su dinámica resulta caótica si el máximo exponente de Lyapunov dado por la expresión (11) es positivo.

## BILLAR RECTANGULAR

El problema del billar bi-dimensional euclidiano, desde el punto de vista clásico, se orienta al estudio de la dinámica de una partícula puntual que se mueve libremente sin fricción en una región plana de dominio  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  con una frontera definida  $\partial\Omega = B$  (billar) que confina la partícula. Las reflexiones de la partícula en la frontera son de tipo elástico y su comportamiento dinámico depende drásticamente

de la forma que tenga la frontera. Para una frontera circular, elíptica o rectangular, el movimiento resulta de carácter regular, es decir, integrable. De otra parte, si la frontera es de tipo estadio (dos paralelas cerradas por dos semicircunferencias) o de tipo cardiode, o sinai (un cuadrado con una región circular en su interior), el sistema se comporta en forma caótica.

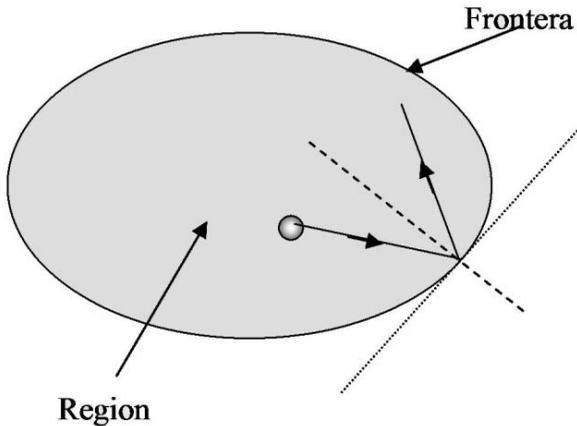


FIGURA 1. El sistema “billar” se considera como una frontera que limita una región de confinamiento para una partícula que se mueve en su interior.

Se va a estudiar el comportamiento mecánico cuántico de una partícula confinada en un billar de región plana de dominio rectangular:

$$\Omega = [0, L_x] \otimes [0, L_y].$$

El origen del referencial se hace coincidir con uno de los vértices de la frontera  $\partial\Omega$  como se indica en la Figura 1.

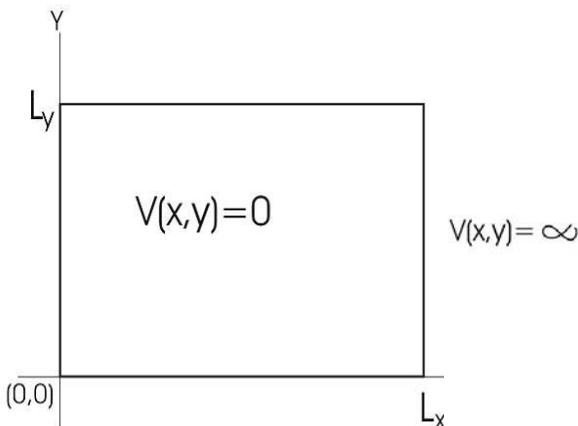


FIGURA 2. Billar rectangular de lados  $L_x, L_y$ .

El Hamiltoniano para el billar es de la forma

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + V(x, y),$$

con

$$V(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq x \leq L_x \text{ y } 0 \leq y \leq L_y \\ \infty & \text{para toda la región restante.} \end{cases}$$

La ecuación de Schrödinger para el billar rectangular con lados  $L_x$  y  $L_y$  se resuelve por separación de variables, que con las condiciones de frontera impuestas por este tipo de geometría produce como solución para estados estacionarios la expresión:

$$\phi(x, y) = \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y),$$

Con

$$k_x = \frac{\pi n_x}{L_x}, \quad k_y = \frac{\pi n_y}{L_y}, \quad E_{nm} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left( \frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right).$$

De acuerdo a la interpretación usual de la teoría cuántica, un criterio para identificar la naturaleza del sistema es la distribución  $P(s)$  de los espaciamentos entre niveles de energía adyacentes. Desde esta perspectiva, el billar rectangular se puede identificar como un sistema con un comportamiento de tipo regular, aspecto que se verifica con el cálculo de la distribución  $P(s)$ , la cual corresponde a una función de tipo Poisson tal como se ilustra en la Figura 4. Sin embargo, se puede demostrar que desde el punto de vista de la interpretación causal, el billar puede presentar comportamiento caótico, aspecto que invalida desde la versión causal los criterios utilizados por la interpretación usual para identificar la dinámica de los sistemas cuánticos.

### BILLAR RECTANGULAR CUÁNTICO BOHMIANO

Desde el punto de vista Bohmiano, para el estudio cuántico de una partícula en movimiento dentro de este billar, se va a considerar una función de onda conformada por una combinación lineal de estados estacionarios:

$$\psi_{nm}(x, y, t) = \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \sum_{m,n} c_{nm} \text{sen}(k_m x) \text{sen}(k_n y) e^{-iE_{nm}t/\hbar} \quad (14)$$

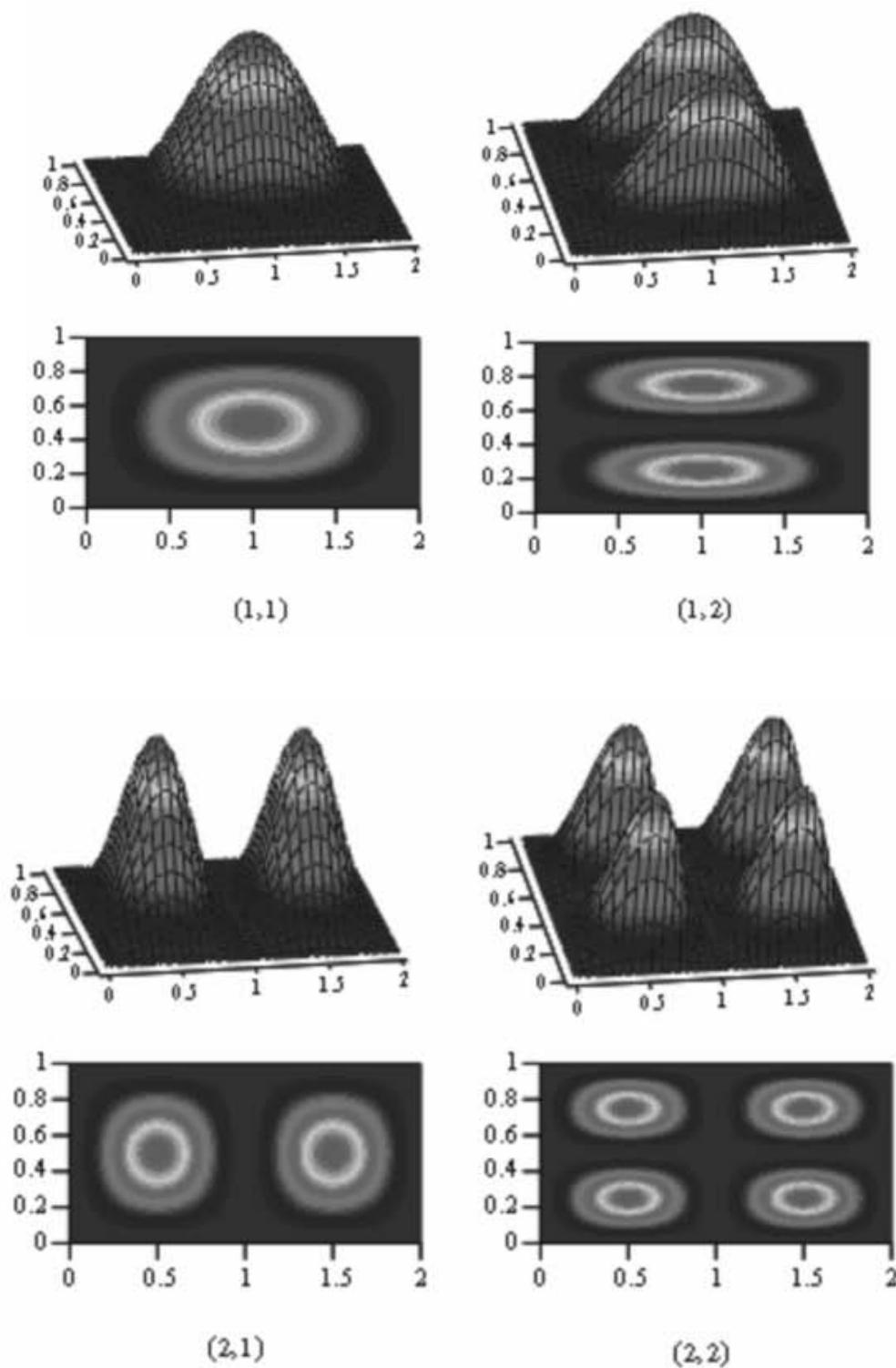


FIGURA 3. Estados estacionarios para el billar rectangular. Se muestran los casos para las parejas de números cuánticos  $(n, m)$ :  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 2)$ .

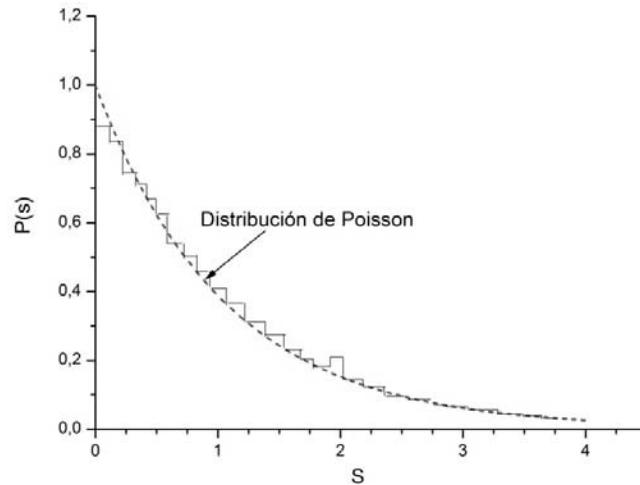


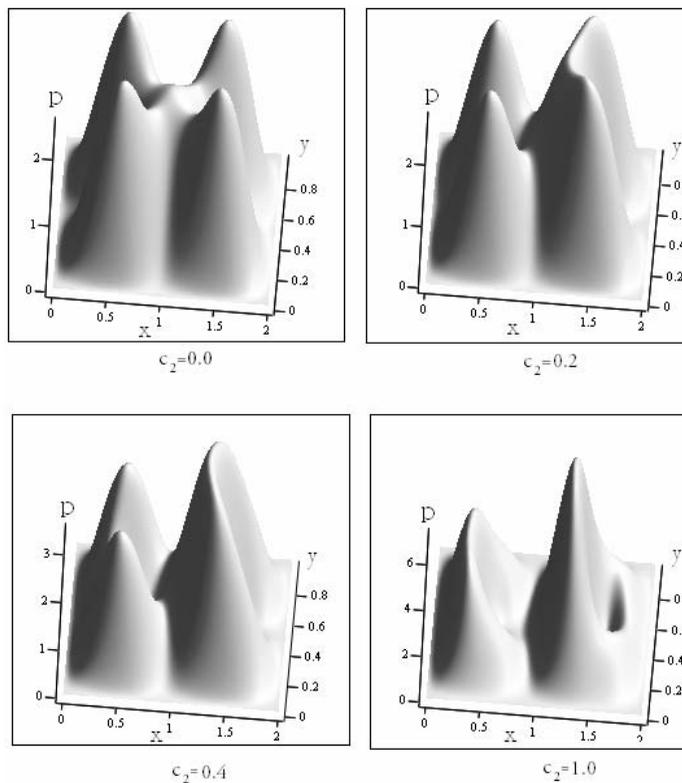
FIGURA 4. Función de distribución  $P(s)$  para el caso de un billar rectangular para la condición  $= L_x/L_y = \sqrt{\pi/3}$ .

Inicialmente se va a elegir una superposición de dos estados estacionarios uno de ellos degenerado:

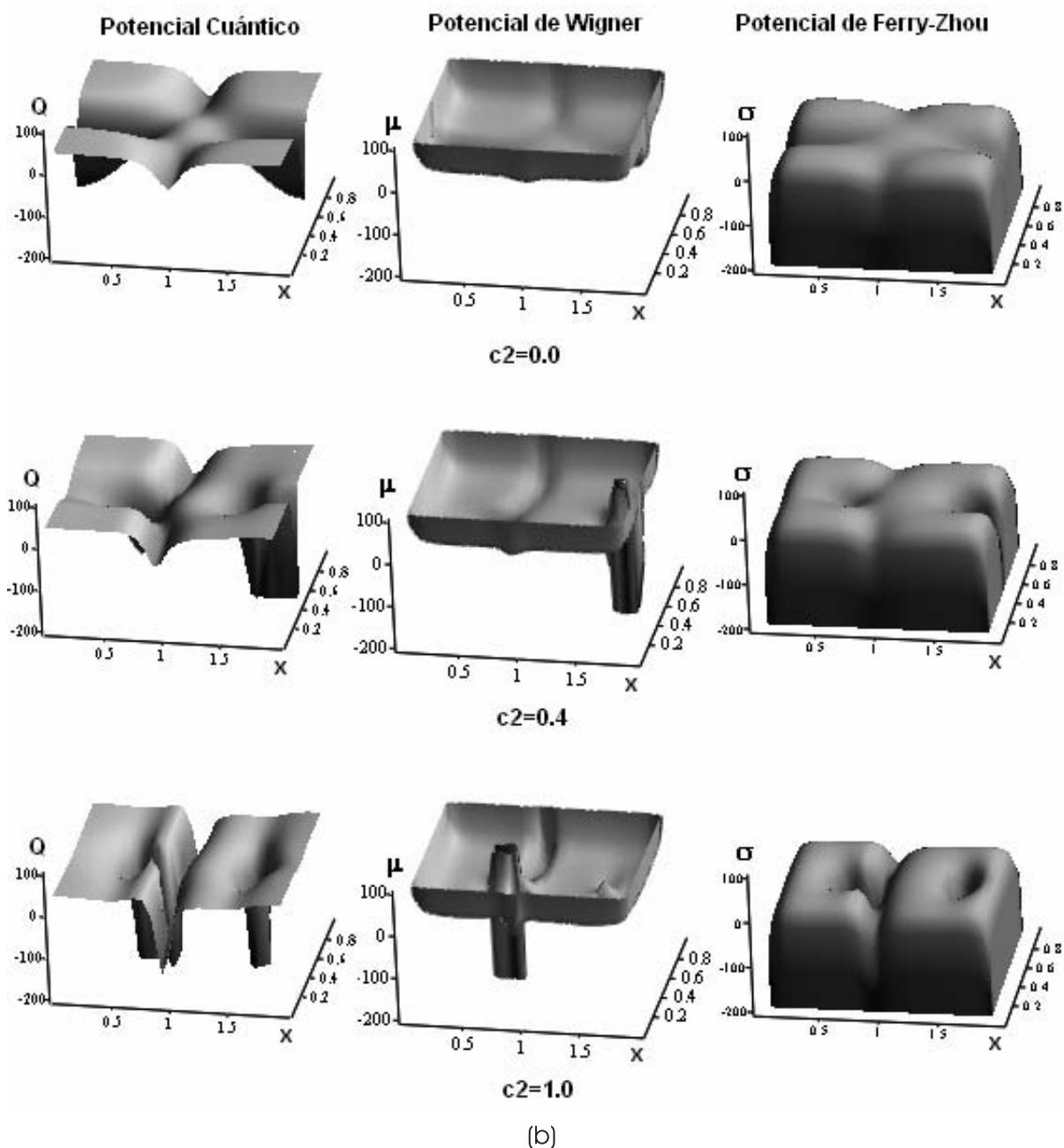
$$\psi(x, y, t) = c_1\phi_{11}e^{-iE_1t/\hbar} + [c_2\phi_{41} + ic_3\phi_{22}]e^{-iE_2t/\hbar}. \quad (15)$$

Para la posición inicial de la partícula en el punto de coordenadas  $(1.01, 0.5)$  y valores  $c_1=c_3=1$ , se hace posible iden-

tificar una dinámica que va desde un comportamiento regular hasta uno de tipo caótico para diferentes valores de la constante  $c_2$ . La Figura 5a y la Figura 5b muestran la función de distribución de probabilidad y potencial cuántico, de Wigner y de Ferry-Zhou para  $t=0$  para valores de  $c_2$  es iguales a:  $0.0, 0.2, 0.4$  y  $1.0$ . Tanto el potencial cuántico como el de Wigner y de Ferry-Zhou resultan drásticamente afectados en función de  $c_2$ .



(a)



**Figura 5. a) Funciones de distribución de probabilidad para la función de onda de la Ec. (15) para  $t=0$ . Se indica la función para diferentes valores de la constante  $c_2$ . En este caso  $c_1=c_3=1$ . b) Potencial cuántico, de Wigner y potencial de Ferry-Zhou para  $t=0$  y valores de  $c_2$  iguales a  $0.0, 0.4$  y  $1.0$ .**

Si se integra numéricamente la Ec. (8) con un integrador Runge-Kutta de cuarto orden y un paso de integración de  $10^{-4}$ , se obtiene para los valores de  $c_2$  iguales a:  $0.0, 0.2, 0.4$  y  $1.0$  las trayectorias en el espacio de configuración que se indican en la Figura 6a. Para la componente -y en función del tiempo (Figura 6b), se hace explícito en su espectro de

potencias para  $c_2=0.0$  y  $c_2=0.2$  regularidad, mientras que para  $c_2=0.4$  y  $c_2=1.0$  comportamiento caótico. Para dos trayectorias vecinas (separadas inicialmente  $0.0014$ ) de la componente -y en función del tiempo se hace visible una sensibilidad con las condiciones iniciales para los casos  $c_2=0.4$  y  $c_2=1.0$  tal como se ilustra en la Figura 7.

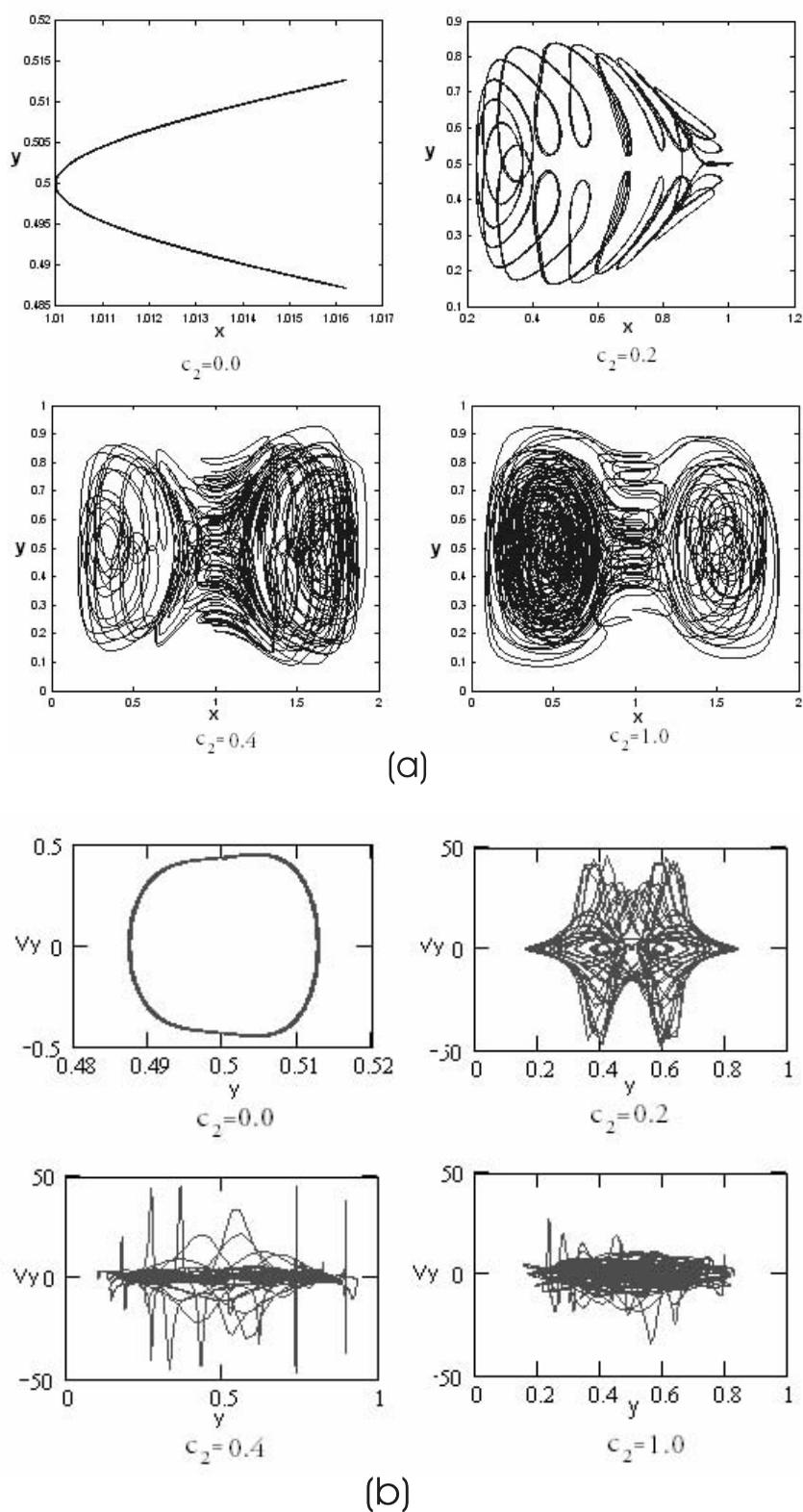
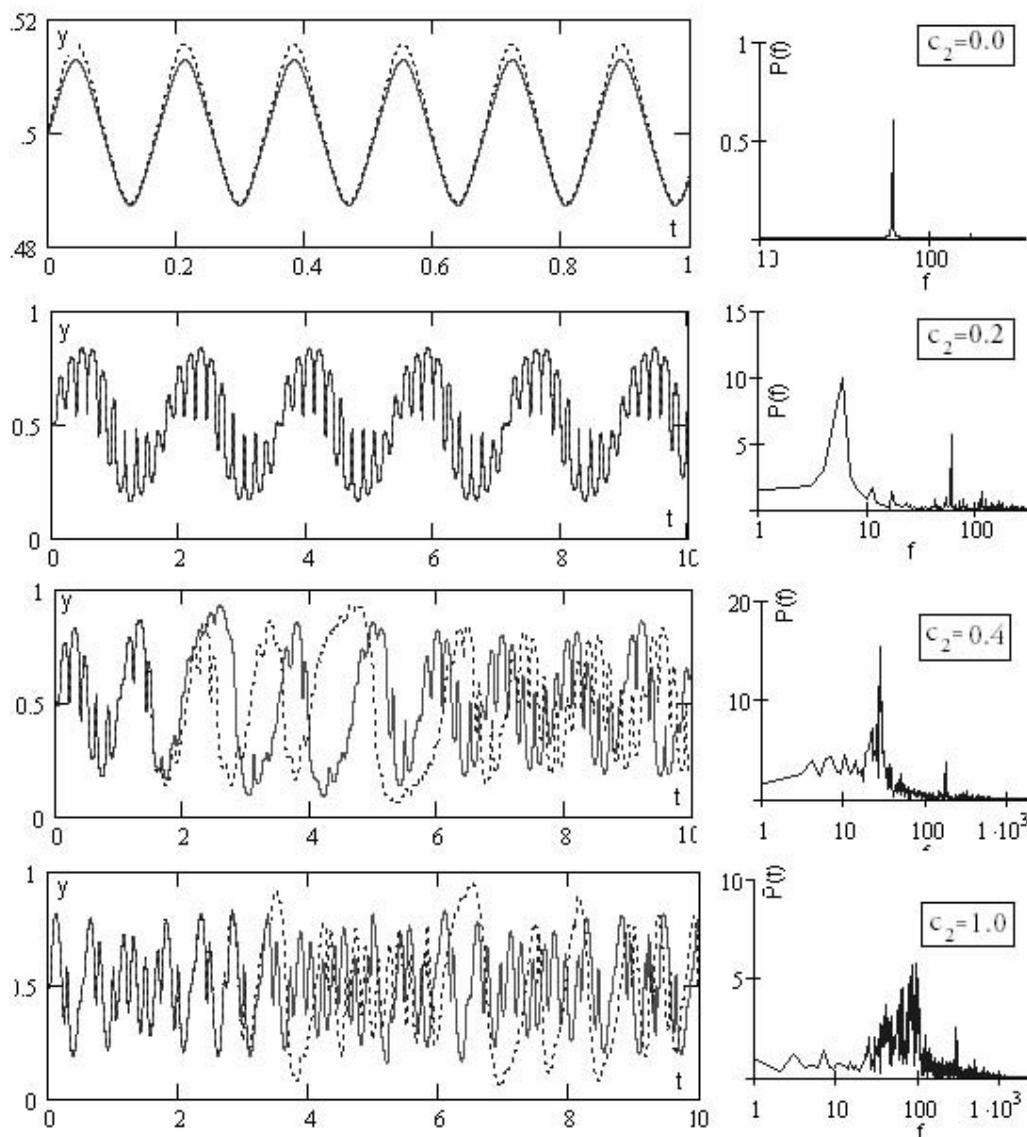


FIGURA 6. a) Trayectorias en el espacio de configuración con los valores del parámetro  $c_2$  indicados y posición inicial de la partícula en el punto de coordenadas  $(1.01, 0.5)$ . b) Trayectorias en el espacio de fase para la componente -y con los diferentes valores de  $c_2$  indicados.



**FIGURA 7.** Para los valores del parámetro  $c_2$  indicados, se muestra la evolución para dos trayectorias vecinas de la componente  $-y$  en función del tiempo. Las trayectorias están separadas inicialmente a una distancia de  $0.0014$ . Para la trayectoria de trazo continuo se grafica el espectro de potencias.

Si se calcula el exponente de Lyapunov  $\lambda$  integrando las ecuaciones de movimiento para tiempos de escalamiento del orden de  $10^{-3}$ , con pasos de integración  $10^{-4}$ , se verifica que para los valores  $c_2=0.0$  y  $c_2=0.2$ ,  $\lambda > 0$  cuando el número de escalamientos  $N \rightarrow \infty$ . Así, para  $N=200000$ ,  $\lambda(c_2=0.0)=0.002329$  y  $\lambda(c_2=0.2)=0.010361$ . Para  $c_2=0.4$  y  $c_2=1.0$ , el exponente de Lyapunov tiende a valores finitos positivos:  $\lambda(c_2=0.4)=2.448559$  y  $\lambda(c_2=1.0)=2.854096$ . En la Figura 8a se ilustra el valor del exponente de Lyapunov en función del número de escalamientos  $N$  para un valor de  $c_2=1.0$ .

En los resultados obtenidos, se hace posible reconocer una transición de un movimiento regular a uno de tipo caótico que puede ser explorado realizando el cálculo del exponente de Lyapunov para un número mayor de valores del parámetro  $c_2$ . Según la Figura 8b, el valor del exponente de Lyapunov en función de  $c_2$  permite identificar una transición de movimiento regular a caótico para el intervalo  $0.3 < c_2 < 0.4$ . En la Figura 8c se muestra el logaritmo natural de la separación entre trayectorias vecinas en función del tiempo para diferentes valores de  $c_2$ , en donde resulta concluyente que para valores de  $c_2 > 0.3$

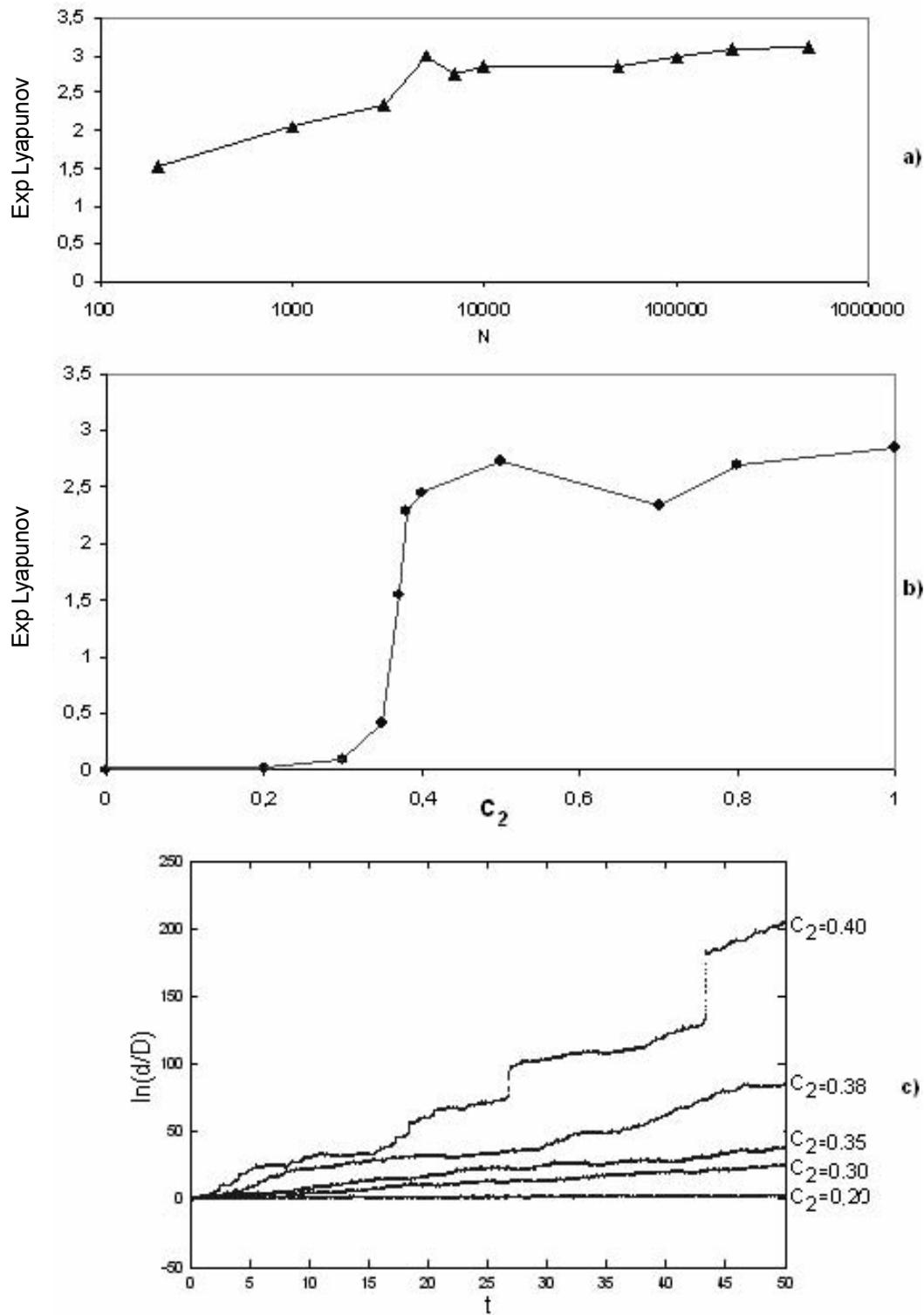
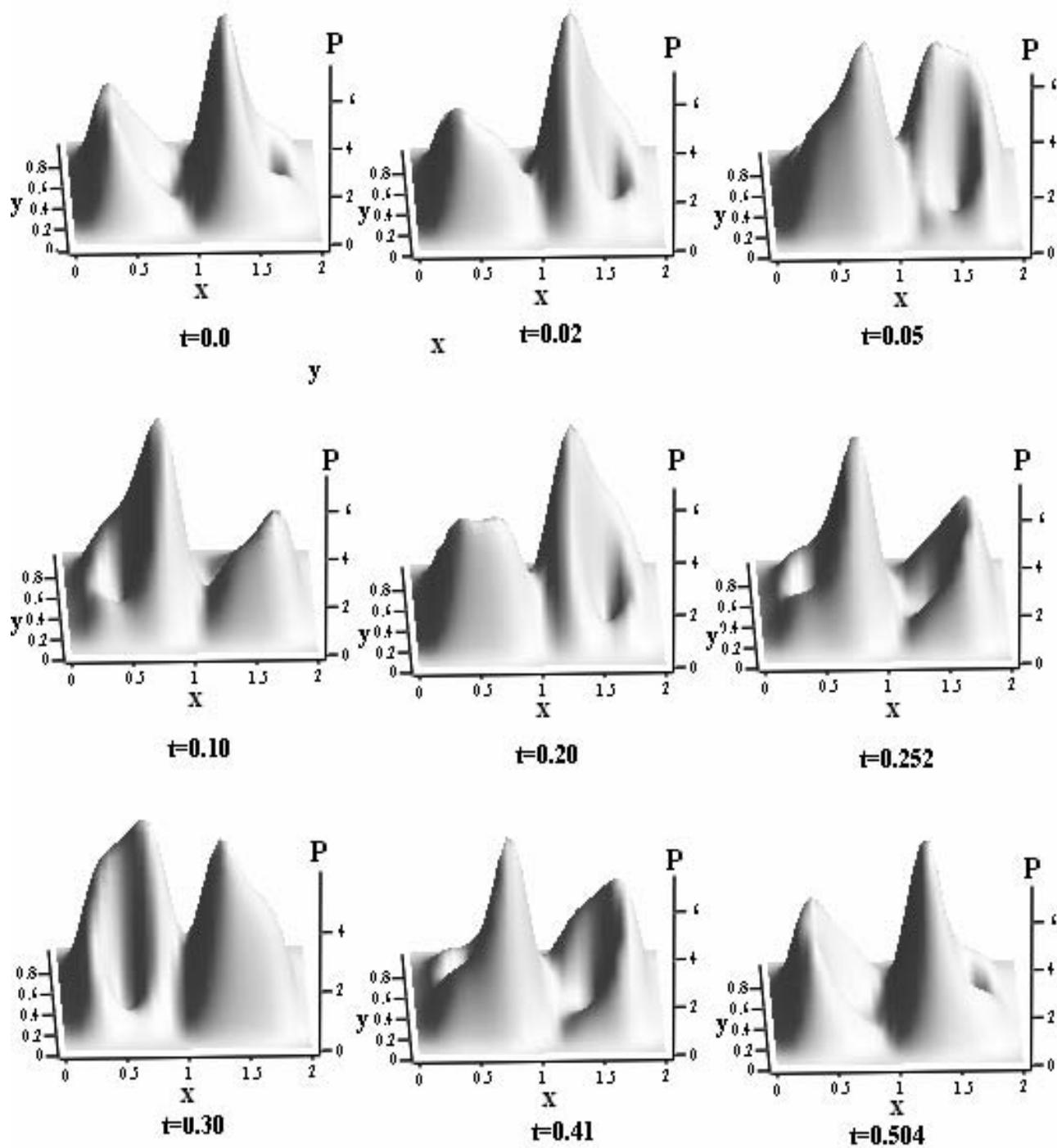
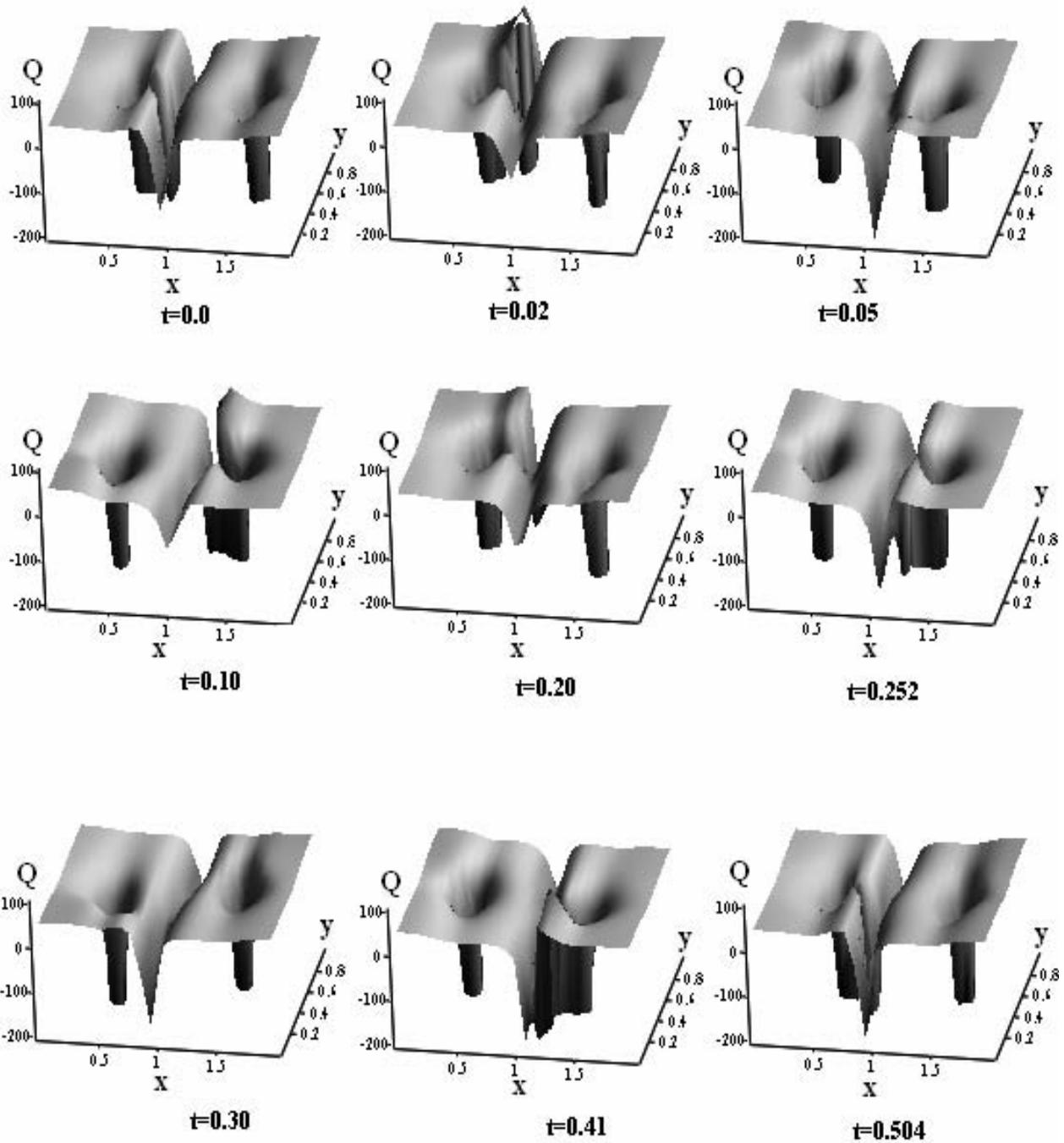


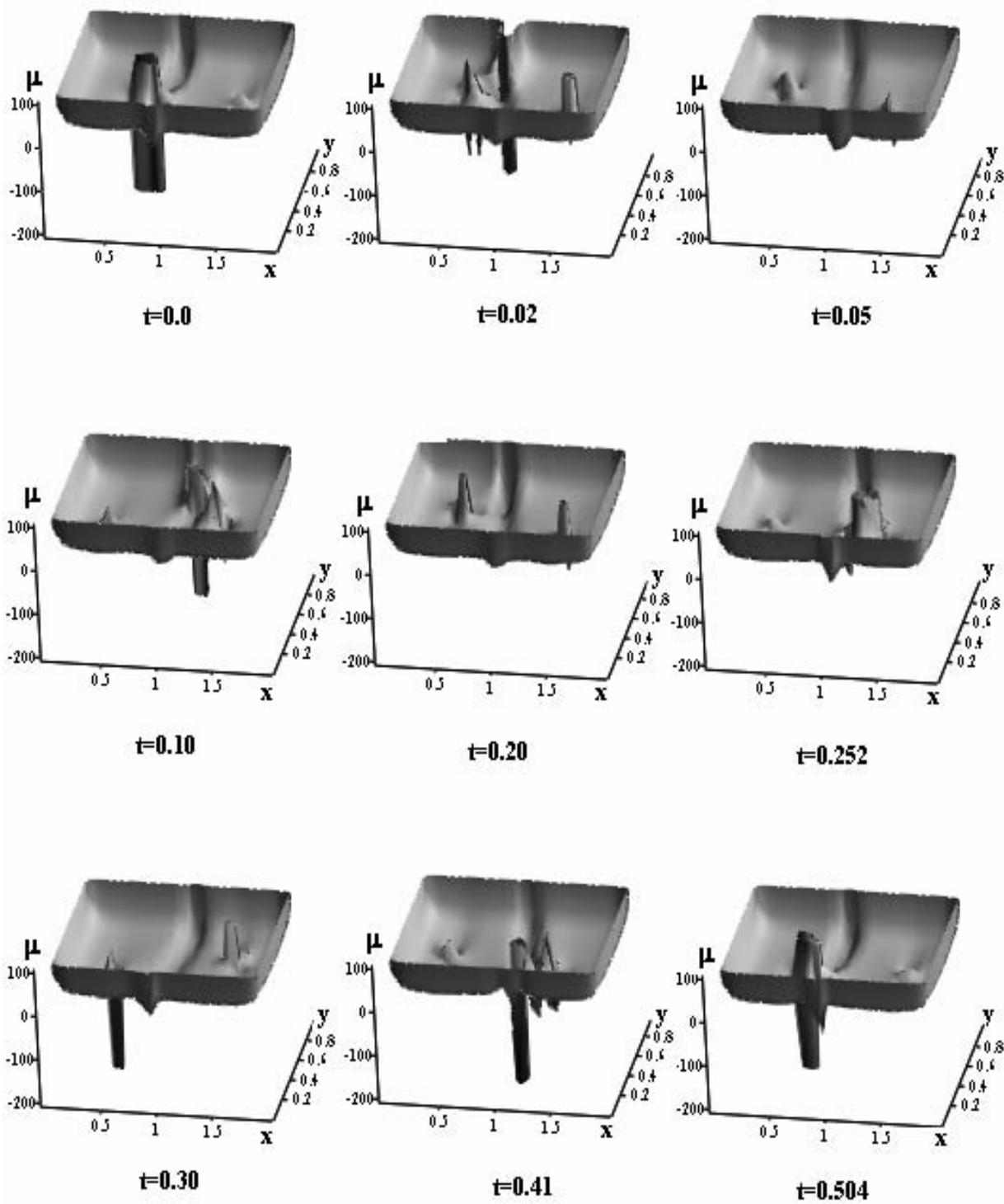
FIGURA 8. a) Exponente de Lyapunov en función del número de escalamientos para  $c_2=1.0$  b) Exponente de Lyapunov en función del parámetro  $c_2$ . c) Logaritmo de la distancia entre trayectorias vecinas en función del tiempo para los valores indicados del parámetro  $c_2$ .



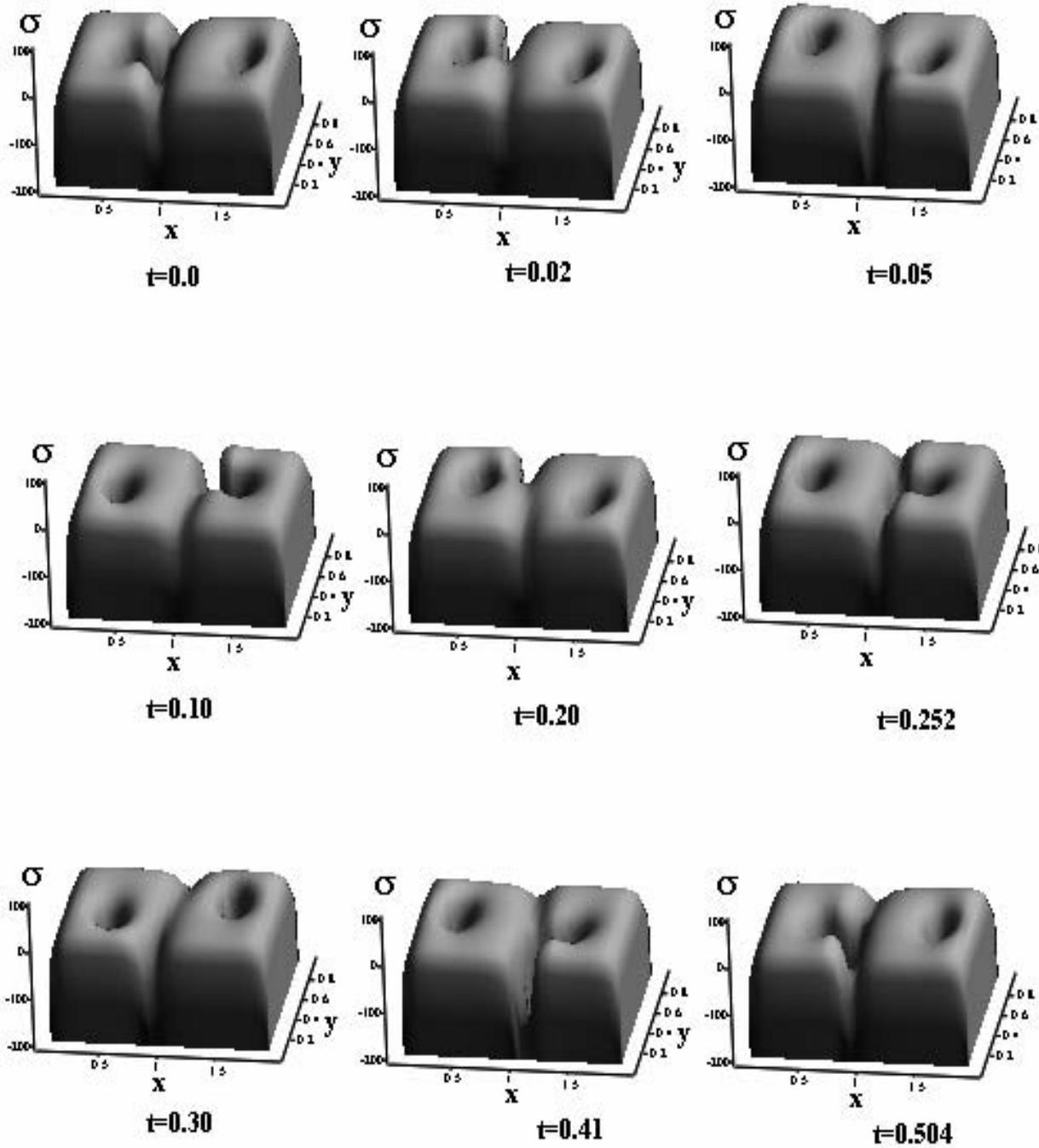
(a)



(b)



(c)



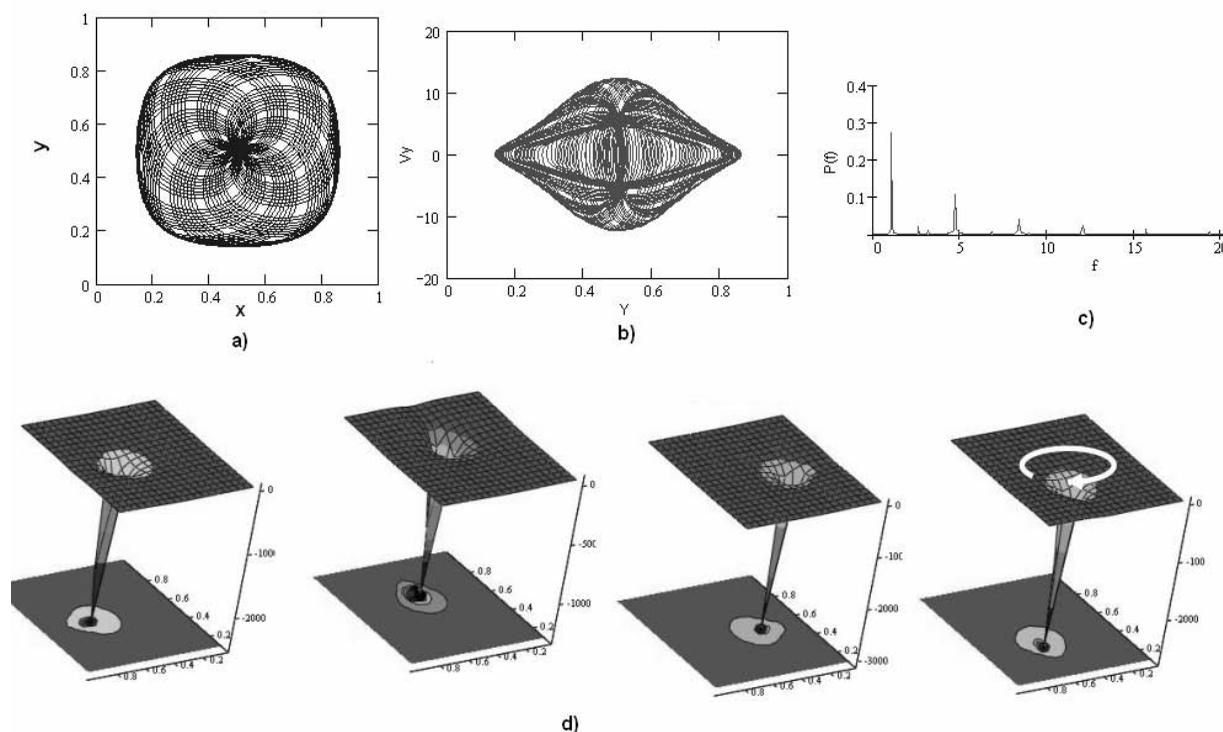
(d)

FIGURA 9. Para el billar rectangular con una función de onda inicial dada por la Ec. (15) y un valor de  $c_2=1.0$ , se indica para diferentes instantes de tiempo: a) la distribución de probabilidad; b) el potencial cuántico; c) el potencial de Wigner; d) el potencial de Ferry-Zhou.

la distancia presenta un comportamiento de crecimiento exponencial indicativo de la sensibilidad a las condiciones iniciales, excepto para  $c_2=0.38$  en los intervalos temporales  $(15,30)$  y  $(47,50)$  y para  $c_2=0.4$  en el intervalo  $(10,5)$ . Esto permite afirmar que las trayectorias en general no pueden ser clasificadas completamente como regulares o caóticas. La trayectoria Bohmiana se encuentra afectada por la totalidad del espacio de fase. En consecuencia, las trayectorias Bohmianas no pueden asociarse con un exponente particular de Lyapunov, sino se debe considerar un conjunto de exponentes de Lyapunov para diferentes rangos temporales.

La gráficas de las figuras 9a, 9b, 9c y 9d muestran la evolución temporal de la función de distribución de probabilidad y los potenciales cuántico Bohmiano, de Wigner y de Ferry-Zhou. En la evolución que experimenta la función de distribución de probabilidad se hace posible observar dos regiones a lo largo del eje  $x$ , en cada una de las cuales aparece una topología montañosa con un “cráter” a un lado de la cima, cada una dotada de rotación anti-horaria

con periodo  $0.504$  (como lo indica la Figura 9a) y reducción e incremento de “altura” alternada. En el potencial de Wigner se observan regiones de barrera de potencial en donde el potencial cuántico presenta pozos. El potencial de Wigner corresponde a energía de dispersión de cantidad de movimiento, dispersión que se localiza en la región central del billar (en las cercanías de  $x=I$ ) y barreras que rotan en sentido horario para la región  $x < I$  y anti-horario para  $x > I$  y con alturas que se incrementan y disminuyen en el tiempo. Estas barreras juegan un papel fundamental en el comportamiento dinámico de la partícula cuando se hace evolucionar para diferentes posiciones iniciales y para los diferentes valores del parámetro  $c_2$ . De otra parte, el potencial de Ferry-Zhou que determina la dispersión espacial, presenta topologías similares al potencial cuántico debido a que contribuye positivamente para curvaturas negativas (máximos) y viceversa, negativamente para curvaturas positivas (mínimos). El comportamiento de los potenciales hacen posible obtener por vía “causal” un tipo de trayectoria para funciones de onda modificadas por el valor del parámetro  $c_2$ .



**FIGURA 10.** Para el billar cuadrado con la dinámica gobernada por la función de onda de la Ec. (16) se muestra: a) Trayectoria de la partícula para una posición inicial de coordenadas  $(0.8, 0.5)$  reportada en (de Alcantara *et al.*, 1998). b) Trayectoria en el espacio de fase. c) Espectro de potencias. d) Evolución del potencial cuántico calculado en función del tiempo, el cual permite interpretar causalmente el comportamiento dinámico de la partícula.

Ya que la “fuerza cuántica” a la que está sometida la partícula deriva del gradiente del potencial cuántico ( $\vec{F} = -\nabla Q$ ), la partícula “afectada” por esta fuerza evoluciona en forma regular si la evolución del potencial cuántico permite esta regularidad (Figura 5 para  $c_2=0.0$ ), mientras que la complejidad del potencial y su evolución temporal hacen que la partícula esté sometida a una fuerza cuántica de tal irregularidad en el tiempo y en el espacio que obliga a la partícula a manifestarse como lo ilustra su trayectoria en la Figura 6a para  $c_2 = 1.0$

El billar cuadrado corresponde a un caso particular para el cual  $Lx=Ly$ , sistema que fue estudiado por de Alcantara y sus colaboradores quienes reportaron transiciones a régimen caótico en función de la función de onda (de Alcantara *et al.*, 1998). Aunque en ese trabajo no se evalúa el papel del potencial cuántico como causal del comportamiento de la partícula y responsable de la existencia de caos en los dominios de validez cuántico, se puede verificar el papel que este potencial juega en la generación de las trayectorias reportadas. La Figura 10a muestra una trayectoria producida para una función de onda en  $t=0$  de la forma

$$|\psi(x, y, 0)\rangle = |\phi_{11}(x, y)\rangle + |\phi_{12}(x, y)\rangle + i|\phi_{21}(x, y)\rangle \quad (16)$$

y posición inicial de la partícula:  $(0.8, 0.5)$ . El potencial cuántico para esta situación posee forma de pozo que rota uniformemente con el tiempo en sentido horario (Figura 10d). En esta situación no se identifica caos cuántico desde la perspectiva de la teoría cuántica Bohmiana, aspecto que se puede interpretar como consecuencia del comportamiento del potencial cuántico en el tiempo.

## CONCLUSIONES

Para sistemas dinámicos que resultan integrables clásicamente, su contraparte cuántica dentro del contexto de validez de la teoría Bohmiana pueden presentar comportamiento caótico. En el caso específico del billar rectangular, el cual se identifica clásicamente como integrable, resulta caótico para funciones de onda que cumplen el requisito de ser una combinación lineal de dos estados estacionarios, uno de ellos degenerado (mínimo requisito para garantizar existencia de caos cuántico), y para ciertos valores de una de las constantes que forman parte de la superposición lineal.

Resulta interesante observar que para sistemas que no están sometidos a potenciales clásicos  $V=0$ , es decir, que se encuentran afectados por un potencial efectivo que únicamente tiene componente cuántica, la partícula puede ha-

cer manifiesto un comportamiento de tipo irregular, ‘causado’ únicamente por las fuerzas de naturaleza cuántica que derivan del potencial cuántico. Esto explica el porqué para sistemas clásicos que exhiben comportamiento regular, su contraparte cuántica Bohmiana puede tener comportamiento caótico. Desde esta perspectiva, el caos cuántico puede ser tratado sin hacer un marcado énfasis en los ‘causales’ del caos en el dominio clásico.

El billar rectangular permite apreciar el papel que juegan los potenciales de Wigner y Ferry-Zhou interpretados como energía de dispersión de cantidad de movimiento y dispersión espacial, en la producción de movimiento regular o irregular en función de las condiciones iniciales o en función de un parámetro de control.

## LITERATURA CITADA

- APPLEBY, D. *Bohmian trajectories post-decoherence*. Foundations of Physics, 1999, 29, 1885-1916.
- BATTERMAN, R. Chaos, Quantization and the Correspondence Principle. *Synthese*, 1991, 89, 189-227.
- BESWICK, J.; MEIER, C. *Hybrid Quantum/Classical Dynamics using Bohmian Trajectories*. Springer Verlag, 2006.
- BITTNER, E. *Quantum tunneling dynamics using hydrodynamics trajectories*. arXiv:quant-ph/0001119v2, 2000, 8 p.
- BROWN, M. *The quantum potential: the breakdown of classical symplectic symmetry and the energy of localisation and dispersion*. arXiv:quant-ph/9703007v3, 2002, 12 p.
- DE ALCANTARA, O.; FLORENCIO, J.; SÁ BARRETO, F. *Chaotic dynamics in billiards using Bohm's quantum mechanics*. Physical Review E, 1998, 58, R2693-R2696.
- DE POLAVIEJA, G. Exponential divergence of neighboring quantal trajectories. *Physical Review A*, 1996, 53, 2059-2061.
- ECKHARDT, B. Quantum mechanics of classical non-integrable systems. *Physics Reports*, 1988, 163.
- FAISAL, F., SCHWENGLBECK U. Unified Theory of Lyapunov exponents and a positive example of deterministic quantum chaos. *Physics Letters A*, 1995, 207, 31.
- FERRY, D.; ZHOU, J.-R. Form of the quantum potential for use in hydrodynamic equations for semiconductor device modeling. *Physical Review B*, 1993, 48, 7944-7950.
- GINDENSPERGER, E.; MEIER, C.; BESWICK, J. Mixing quantum and classical dynamics using Bohmian trajectories. *Journal of Chemical Physics*, 2000, 113, 9369-9373.

- GINDENSPERGER, E.; MEIER, C.; BESWICK, J. Quantum-classical dynamics including continuum states using quantum trajectories. *Journal of Chemical Physics*, 2002, *116*, 8-13.
- GONZÁLEZ, E. Teoría Bohmiana y Realidad Cuántica. *Universitas Scientiarum*, 1996, *3*, 115-124.
- GONZÁLEZ, E.; ROLDÁN, J. El potencial cuántico base para una interpretación alternativa de la mecánica cuántica. *Revista Colombiana de Física*, 1995, *27*, 219-222.
- GONZÁLEZ, E.; ROLDÁN, J. Ventajas y limitaciones de la aplicación de la interpretación causal de la mecánica cuántica al problema del tiempo de tunelamiento. *Revista Colombiana de Física*, 1998, *30*, 415-418.
- LOPREORE, C.; WYATT R. Quantum wave packet dynamics with trajectories. *Physical Review Letters*, 1999, *82*, 5190-5193.
- MCDONALD, S.; KAUFMAN A. Spectrum and Eigenfunctions for Hamiltonian with Stochastic Trajectories. *Physical Review Letters*, 1979, *42*, 1189-1191.
- NIKOLIC, H. Bohmian particle trajectories in relativistic fermionic quantum field theory. *Foundations Physics Letters*, 2005, *18*, 123-138.
- OTT, E. Chaos in dynamical systems. Cambridge University Press. Cambridge UK. 1993.
- PORTER, C. Statistical Theory of Spectra: Fluctuations. Academic Press. New York. 1965.
- SHINFREN, L.; ASKIN, R.; FERRY, D. 2001, *4*, 558.
- STRUNZ, W.; DIOSI, L.; GHISIN, N.; YU, T. Quantum Trajectories for Brownian Motion. *Physical Review Letters*, 1999, *83*, 4909-4914.
- VAN DORSSELAER, F.; NIENHUIS, G. Quantum Trajectories. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2000, *2*, L5-L9.
- WYATT, R.; BITTNER, E. Quantum wavepacket dynamics with trajectories: implementation with adaptative Lagrangian meshes. *Journal of Chemical Physics*, 2000, *113*, 8898.