UNIVERSITAS SCIENTIARUM
Revista de la Facultad de Ciencias
PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
Vol. 8, N° 2: 5-12

CÓMPUTO DE LOS CARACTERES IRREDUCIBLES DE LAS REPRESENTACIONES DE S_N

Fernando Novoa

Departamento de Matemáticas, Pontificia Universidad Javeriana.
Bogotá, Colombia.
e-mail: fernando.novoa@javeriana.edu.co

RESUMEN

El siguiente programa calcula la tabla de caracteres para las representaciones irreducibles de los grupos de simetría S_n, haciendo uso de la fórmula de Roichman en vez de la fórmula recursiva de Murnanghan-Nakayama.

Palabras clave: Caracteres, representaciones, grupo simétrico.

ABSTRACT

We implement the Roichman formula for computing the character table of the irreducible representations for the symmetric group. This formula unlike the Murnangham-Nakayama is not recursive.

Key words: Characters, representations, symmetric group.

INTRODUCCIÓN

Históricamente (Curtis, 1999) los caracteres precedieron a las representaciones de grupos. Inicialmente, Frobenius en 1896 a partir de algunas ideas y preguntas formuladas por Dedekind, desarrolló la teoría de caracteres de grupos tomando como punto de partida el determinante del grupo y su factorización. Pronto él pudo generalizar para grupos no conmutativos, algunas de las observaciones hechas por Dedekind sobre grupos conmutativos, en particular la factorización de este determinante del grupo haciendo uso de los caracteres.

En la actualidad es usual estudiar primero las representaciones y después sus caracteres. Este cambio en nada ha afectado la utilidad de los caracteres como herramienta en el estudio de la teoría de grupos, sus representaciones y aplicaciones. Una de estas aplicaciones es el algoritmo posiblemente más usado en el siglo pasado, el cual es, la transformada discreta de Fourier de una función definida sobre un grupo cíclico. En la actualidad ya contamos con generalizaciones y aplicaciones de este algoritmo a otras familias de grupos (Maslen and Rockmore, 1997, 2001).

Los programas computacionales que realizan el cómputo de los caracteres de los grupos simétricos usan por lo general la fórmula recursiva de Murnangham-Nakayama (Sagan 2001, Goldschmidt, 1993). Recientemente, Roichman (Roichman) ha dado una fórmula para el cómputo de estos caracteres y es esta fórmula la que estamos implementando.

DEFINICIONES

Sea G un grupo finito y V un espacio vectorial complejo de dimensión n y $GL(V)$ el grupo de transformaciones lineales invertibles sobre V. Sabemos que $GL(V) \approx GL(n,C)$ el grupo de matrices invertibles de orden $n \times n$ con entradas en los complejos. Una *representación G* de *grado n* es un homomorfismo de grupos

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

y por lo tanto se tienen las siguientes propiedades:

a. $\rho(1) = Id_v$ donde 1 es la identidad de G y Id_v es la función identidad de V.

b. $\rho(ab) = \rho(a)\,\rho(b)$ para todo $a,b \in G$

c. $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$.

Una representación de G se dice *irreducible* si no contiene subespacios propios invariantes, es decir, si W es un subespacio de V tal que $\rho(g)W \subseteq W, \forall g \in G$, entonces $W = 0$ o $W = V$. Además decimos que dos representaciones son *equivalentes* si ellas difieren en un cambio de base. Como las representaciones complejas de un grupo finito son suma directa de representaciones irreducibles (Serre, 1977), sólo necesitamos conocer las distintas clases inequivalentes de representaciones irreducibles del grupo.

Ejemplo 1. Si la dimensión de V es 1 entonces toda representación de G en V es claramente irreducible. En ese caso $GL(V) \approx GL(1,C) = C^* = C \setminus \{0\}$.

Ejemplo 2. Sea $G = \langle x \rangle$ un grupo cíclico de orden n. Los siguientes homomorfismos ρ_j definen las representaciones irreducibles de G:

$$\rho_j(x) = \omega^j$$

donde $\omega = e^{2\pi i/n}$ y $j = 0,\ldots,n-1$.

Se sabe (Serre, 1977) que si el grupo es conmutativo entonces todas sus representaciones irreducibles son de dimensión 1 y que estas representaciones forman un grupo $G^\wedge$, el cual es isomorfo a G.

Definimos el *caracter* χ_ρ de una representación ρ del *grupo G* como la función definida sobre G de valor complejo

$$\chi_\rho(g) = Traza(\rho(g)).$$

Esta función está bien definida, ya que no depende de la base escogida y así representaciones equivalentes tendrán el mismo caracter.

Los caracteres de grupos finitos satisfacen las siguientes propiedades (Serre, 1977; Isaacs, 1976; Goldschidth, 1993):

1. Los caracteres son funciones de clase. Es decir, son constantes sobre clases de conjugación. $\chi_\rho(gag^{-1}) = \chi_\rho(a)$.

2. La traza de la función identidad sobre un espacio de dimensión n es n y por lo tanto, $n = \chi_\rho(1)$.

3. $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$, donde la barra indica conjugado complejo.

4. Dos representaciones son equivalentes si tienen el mismo caracter.

Si definimos un producto escalar en el espacio de funciones de valor complejo definidas sobre G por medio de

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} f(s)\overline{g(s)}$$

se tiene entonces que los caracteres de representaciones irreducibles de G satisfacen:

1. Si χ es el caracter de un una representación de G entonces $\langle \chi, \chi \rangle$ es un entero positivo y $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ si y sólo sí χ es el caracter de una representación irreducible. En ese caso decimos que χ es irreducible.

2. Si χ, ϕ son caracteres irreducibles de dos representaciones inequivalentes, entonces $\langle \chi, \phi \rangle = 0$.

3. Más aún, el conjunto de los caracteres irreducibles de G forman una base ortonormal para el espacio de las funciones de clase definidas sobre G.

4. Si α es otra representación de G y χ_ρ es un caracter de G correspondiente a la representación irreducible ρ, entonces $\langle \chi_\alpha, \chi_\rho \rangle$ representa la multiplicidad de ρ como sumando directo en la representación α.

Representaciones irreducibles del grupo simétrico

Para el cómputo de los caracteres de los grupos S_n necesitamos repasar algunas propiedades de las tablas de Young, y luego establecer las fórmulas de Murnanham-Nakayama y de Roichman.

Sea n un entero positivo. Una partición de n es una sucesión no creciente de enteros positivos $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$ tales que $n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$. Usualmente identificamos la partición $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$ con su diagrama de Ferre, el cual es un arreglo de cajas alineadas al izquierda con k filas y la fila i contiene λ_i cajas. Cada caja se identifica por la fila y columna en la que se encuentra. Una tabla estándar de la forma λ es la enumeración de las cajas del diagrama de λ con números del conjunto $\{1,...,n\}$ sin repeticiones, en donde cada fila y columna forman sucesiones crecientes al leerlos de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo respectivamente.

Ejemplo 3. Para la partición (2,2,1) las tablas estándar son:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Las siguientes son algunas propiedades básicas de los caracteres y representaciones irreducibles en S_n (Fulton, 1997; Sagan, 2001). Las representaciones irreducibles de S_n están en correspondencia uno a uno con las particiones de n. Las dimensiones de esas representaciones son iguales al número de tablas estándar correspondientes a esas particiones. Además, en S_n dos elementos son conjugados si y solamente si tienen la misma descomposición cíclica, la cual también determina una partición de n. Dos representaciones irreducibles merecen mencionarse en estos momentos. Éstas son las asociadas a las particiones (n) y (1,...,1) = (1^n). Ambas son de dimensión 1, por lo tanto coinciden con los caracteres. La primera es la representación trivial, que asigna a todos los elementos de S_n el valor 1, mientras la segunda es la representación signo, la cual asigna el valor 1 o –1 dependiendo si la permutación es par o impar.

Ejemplo 4. Para el grupo simétrico S_3 de las permutaciones sobre tres elementos podemos tomar como generadores a = (1,2) y b = (1,2,3). Definimos una representación por medio de las siguientes matrices:

$$R(a) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R(b) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

R define una representación irreducible de dimensión 2, y esta representación matricial (salvo un cambio de base) es la asociada a la partición λ = (2,1).

Ejemplo 5. El caracter para la anterior representación de S_3 dada en el ejemplo 4 se puede calcular directamente por medio de:

$$\begin{aligned} &traza(I_2) = 2 \\ &traza(R(a)) = 0 \\ &traza(R(b)) = -1 \end{aligned}$$

Como el caracter es una función de clase tenemos que:

G	1	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(1,2,3)	(132)
χ_ρ	2	0	0	0	-1	-1

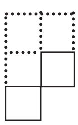
Además,

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{6}\left(2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2 + (-1)^2\right) = 1$$

y con esto verificamos que esta representación es irreducible.

Sean λ, μ dos particiones tales que $\mu \subset \lambda$ es decir, $\mu_i \leq \lambda_i$ para todo i. La forma $\lambda \setminus \mu$ es la diferencia de conjuntos entre los diagramas de λ y μ.

Ejemplo 6. Si $\lambda = (2,2,1)$ y $\mu = (2, 1)$ entonces $\lambda \setminus \mu$ tiene por diagrama.



La *frontera* de un diagrama se define como las cajas (i,j) del diagrama, tales que la caja $(i + 1, j + 1)$ no pertenece al diagrama.

Ejemplo 7. Si λ = (2,2,1) las cajas marcadas con * forman la frontera de λ.

	*
*	*
*	

Un segmento conectado (cajas que están unidas por un lado) de la frontera, con m cajas se llama un m *-gancho*. Un m -gancho s es removible del diagrama de λ si el diagrama de $\lambda \setminus s$ es nuevamente el diagrama de una partición.

Ejemplo 8. El 2-gancho formado por las cajas (2,1) y (2,2) no es removible del diagrama de λ = (2,2,1) porque su diagrama resultante será (2,0,1). El 2-gancho formado por (1,2) y (2,2) es removible y su forma resultante es (1^3) = (1,1,1).

Se define la *longitud* $l(s)$ de un m-gancho s como el número de filas que lo conforman.

Ejemplo 9. El 4-gancho formado por la frontera del diagrama de λ = (2,2,1) tiene longitud 3.

La fórmula de Murnanham-Nakayama

La fórmula recursiva de Murnanham-Nakayama es una herramienta computacional que se tiene para el cómputo explícito de la tabla de caracteres para los grupos simétricos (Goldschmidt, 1993, Sagan, 2001).

Sean π, θ dos ciclos disyuntos en S_n, λ una partición de n. Si θ es un m-ciclo, entonces

$$\chi_\lambda(\pi\theta) = \sum_s (-1)^{l(s)-1} \chi_{\lambda \setminus s}(\pi)$$

donde la suma corre sobre todos los m-ganchos s removibles de λ.

Ejemplo 10. Calculemos el valor del caracter irreducible correspondiente a la partición λ = (2,2,1) en la clase conjugada de la forma (3,2). Por lo tanto deseamos calcular

$$\chi_{(2,2,1)}(\pi\theta)$$

donde podemos suponer que π, θ son un 2-ciclo y un 3-ciclo respectivamente. El único 3-gancho removible en el diagrama de λ es

$$\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline * & * \\ \hline * & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

cuya longitud es 2, por lo tanto, usando la fórmula de Murnanham-Nakayama tenemos que

$$\chi_{(2,2,1)}(\pi\theta) = (-1)^{2-1}\chi_{(2)}(\pi) = -1\chi_{(2)}(\pi).$$

Por lo que hemos visto anteriormente, $\chi_{(2)}(\pi)=1$, luego

$$\chi_{(2,2,1)}(\pi\theta) = -1.$$

La fórmula de Roichman

La fórmula de Roichman (Roichman, Ram, Barcelo y Ram) ofrece una alternativa combinatoria no recursiva para el cómputo de dichos caracteres.

Sea λ una partición de n y $\mu \in S_n$ del tipo (μ_1 ,..., μ_1). Entonces

$$\chi_\lambda(\mu) = \sum_Q rw^\mu(Q)$$

donde la suma corre sobre las tablas estándar Q de la forma λ y rw^μ (Q) se denomina el μ – peso de la tabla Q y está definido por

$$rw^\mu(Q) = \prod_{\substack{1\le j\le n \\ j\notin B(\mu)}} f_\mu(j,Q)$$

con

$$B(\mu) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \mu_i : 1 \le r \le l \right\}$$

y

$$f_\mu(j,Q) = \begin{cases} -1 & si \quad j+1 \textit{ está al suroeste de } j \textit{ en } Q \\ 0 & si \quad \begin{cases} j+1 \textit{ está noreste de } j,\ j+1 \notin B(\mu) \\ y\ j+2 \textit{ está al suroeste de } j+1 \textit{ en } Q \end{cases} \\ 1 & \textit{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Esta fórmula ha sido dada por Roichman en un contexto más general. En especial, Roichman estableció su fórmula para q – álgebras de Hecke y especializando q = 1 se obtienen los caracteres de los grupos simétricos. En esta fórmula entendemos por suroeste estar en la misma fila o una inferior y estar en la misma columna o una a la izquierda. En forma similar se entienden las otras direcciones.

Ejemplo 11. Calculemos usando la fórmula de Roichman el caracter de λ = (2,2,1) para la clase del tipo μ = (4,1).

Para esto veamos una por una las 5 tablas estándar de la partición λ = (2,2,1) y hallemos el valor de la función f_μ. Primero, el conjunto $B(\mu)$ = {4,5}, luego j = 1,2,3.

Las 5 tablas son las dadas en el ejemplo 3 y si algún valor de $f_\mu(j,Qi)$ es cero entonces el valor de $rw^\mu(Q_i)$ será cero. En la primera tabla, j = 1 y j +1 = 2 están en la misma columna, pero 2 está en una fila inferior a la de 1. Es decir, 2 está al suroeste de 1 por lo tanto, $f_\mu(1,Q_1)$ = –1. Así podemos resumir toda la información en la siguiente tabla:

Q_1	$\begin{matrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & \end{matrix}$	$\begin{array}{c\|ccc} j & 1 & 2 & 3\\ \hline f_\mu(j,Q_1) & -1 & -1 & 1\end{array}$	$rw^w(Q_1)=$	1
Q_2	$\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 5\\ 4 & \end{matrix}$	$\begin{array}{c\|ccc} j & 1 & 2 & 3\\ \hline f_\mu(j,Q_2) & & 0 & \end{array}$	$rw^w(Q_2)=$	0
Q_3	$\begin{matrix}1 & 2\\ 3 & 5\\ 4 & \end{matrix}$	$\begin{array}{c\|ccc} j & 1 & 2 & 3\\ \hline f_\mu(j,Q_3) & 0 & & \end{array}$	$rw^w(Q_3)=$	0
Q_4	$\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 4\\ 5 & \end{matrix}$	$\begin{array}{c\|ccc} j & 1 & 2 & 3\\ \hline f_\mu(j,Q_4) & & 0 & \end{array}$	$rw^w(Q_4)=$	0
Q_5	$\begin{matrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & \end{matrix}$	$\begin{array}{c\|ccc} j & 1 & 2 & 3\\ \hline f_\mu(j,Q_5) & 0 & & \end{array}$	$rw^w(Q_5)=$	0

Por lo tanto, el valor de este caracter asociado a la partición (2,2,1) para las permutaciones de S_5 del tipo (4,1) es

$$\chi_{(2,2,1)}(4,1)=\sum_{i=1}^{5} rw^{\mu}(Q_i)=1.$$

Ejemplo 12. Calculemos el valor de todos los caracteres irreducibles de las representaciones de $S_{5.}$

En S_5 hay representaciones irreducibles que corresponden a las 7 particiones de 5. Estas particiones son:

```
Rep.Parti2(5);
[[5], [4, 1], [3, 2], [3, 1, 1], [2, 2, 1], [2, 1, 1,
1], [1, 1, 1, 1, 1]]
```

Los valores de esta lista sirven para indexar las entradas de la siguiente matriz. Así, la entrada (5,2) de la siguiente matriz indica el valor del quinto caracter en la segunda clase conjugada, donde el orden está dado por la lista anterior. Por lo tanto, dicha entrada corresponde al valor $\chi_{(2,2,1)}(4,1)$.

El programa **car.pkg** que estamos presentando, hace este cómputo haciendo uso de la fórmula de Roichman.

```
Car.Karacter(5);
Mat[
 [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
 [-1, 0, -1, 1, 0, 2, 4],
 [0, -1, 1, -1, 1, 1, 5],
 [1, 0, 0, 0, -2, 0, 6],
 [0, 1, -1, -1, 1, -1, 5],
 [-1, 0, 1, 1, 0, -2, 4],
 [1, -1, -1, 1, 1, -1, 1]
]
```

Note que la entrada (5,2) es 1 como se vio en el ejemplo 11, y la entrada (5,3) e -1 pues corresponde al valor $\chi_{(2,2,1)}(3,2)$ del ejemplo 10. También es interesante hacer notar que la última columna corresponde a la partición (1,1,1,1,1) y ésta corresponde a la clase conjugada de los elementos de ese tipo. El único elemento de ese tipo es precisamente la identidad. Por lo tanto, dicha columna corresponde a las dimensiones de las representaciones irreducibles de S_5.

El programa

El programa que calcula los caracteres irreducibles de S_n se llama **caracteres.pkg** y ha sido implementado en el sistema algebraico computacional CoCoA. Para calcular por medio de la fórmula de Roichman necesitamos tener a nuestra disposición las particiones y las tablas estándar asociadas a esas particiones. Para generar las tablas estándar usamos el algoritmo de Robinson-Schensted-Knuth (Fulton, 1997, Duque *et al.*, 2002) el cual las genera a partir de las permutaciones de S_n y el uso del procedimiento de inserción por filas. A partir de las tablas generamos las funciones f_μ que determinan el valor del caracter en la clase del tipo μ.

Para generar las tablas estándar usamos la función **Ordta2(N)** (Duque *et al*., 2002) que nos calcula y retorna las tablas estándar de las particiones de N, ordenando las particiones en orden antilexicográfico y las tablas según el orden de la última letra (Rockmore, 1992).

Ejemplo 13. Calculemos las tablas de los caracteres de S_6

```
Car.Karacter(6);
Mat[
 [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
 [-1, 0, -1, 1, -1, 0, 2, -1, 1, 3, 5],
 [0, -1, 1, -1, 0, 0, 0, 3, 1, 3, 9],
 [1, 0, 0, 0, 1, -1, 1, -2, -2, 2, 10],
 [0, 0, -1, -1, 2, 1, -1, -3, 1, 1, 5],
 [0, 1, 0, 0, -2, 0, -2, 0, 0, 0, 16],
 [-1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, -2, -2, 10],
 [0, 0, -1, 1, 2, -1, -1, 3, 1, -1, 5],
 [0, -1, 1, 1, 0, 0, 0, -3, 1, -3, 9],
 [1, 0, -1, -1, -1, 0, 2, 1, 1, -3, 5],
 [-1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1]
]
```

De esto podemos concluir que hay 11 representaciones irreducibles de $S_{6,}$ (por lo tanto 11 particiones de 6) 2 de dimensión 1, 4 de dimensión 5, 2 de dimensión 9, 2 de dimensión 10, y una de dimensión 16. Esta última corresponde a la sexta fila de la matriz. Dado que las particiones de 6 las tenemos ordenadas por

```
Rep.Parti2(6);
[[6], [5, 1], [4, 2], [4, 1, 1], [3, 3], [3, 2, 1], [3, 1, 1, 1], [2, 2, 2], [2, 2, 1, 1], [2, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1]]
```

---

entonces, la representación asociada a la partición (3, 2, 1) es de dimensión 16, o equivalentemente hay 16 tablas estándar de la forma (3, 2, 1).

CONCLUSIONES

Con el programa **caracteres.pkg** podemos calcular la tabla de los caracteres de las representaciones irreducibles de los grupos de simetría S_n y a la vez comprobar información acerca de las representaciones de estos grupos de simetría y sus dimensiones.

Este programa en combinación con los programas **rep.pkg** (Duque *et al.*, 2002) y **entera.pkg** (Novoa, 2002) para el cómputo de las representaciones de los grupos de simetría en la forma seminormal de Young y en la forma natural de Specht, respectivamente, proporcionan herramientas computacionales para un curso inicial en teoría de representaciones de grupos finitos, con los cuales se pueden verificar y hacer cómputos sobre grupos simétricos.

LITERATURA CITADA

BARCELO H. and RAM A. *Combinatorial representation theory*. Preprint.

CURTIS C. *Pioneers of representation theory: Frobenius, Burside, Schur and Brauer*. American Mathematical Society, 1999.

DUQUE A., HERNÁNDEZ P. y NOVOA F. Un programa para calcular las representaciones irreducibles de los grupos de simetría en la forma seminormal de Young. *Universitas Scientiarum.* 2002 (7)1: 5-16.

FULTON W. *Young tableaux. London mathematical Society Student texts 35.* Cambridge University Press, 1997.

GOLDSCHMIDT D. *Groups characters, symmetric fuctions and Hecke algebra*. American Mathematical Society, Providence RI, 1993.

ISAACS I.M. *Character theory of finite groups*. Dover Publications, NY, 1976.

MACDONALD I. *Symmetric functions and orthogonal polynomials*. American Mathematical Society, Providence, RI. 1998.

MASLEN D. and ROCKMORE D. The Cooley - Tukey FFT and group theory. *Notices AMS*. 2001.

MASLEN D. and ROCKMORE D. Generalized FFT's. A survey of some recent results. *Groups and Computation II.* Dimacs (28) American Mathemtical Society, 1997.

NOVOA F. *Representaciones irreducibles de grupos de simetría por medio de matrices enteras*. Reporte técnico Pontificia Universidad Javeriana, 02-2001.

RAM A. *Robinson-Schensted-Knuth insertion and characters of the symmetric groups and Iwahory-Hecke algebras of type A.* Preprint.

ROCKMORE D. *Fast Fourier analysis for abelian extensions*. Preprint. 1992.

ROICHMAN Y. *Murnangham-Nakayama and Littlewood-Richardson type rules for Kazhdan-Lusztig representations of Coxeter groups.* Preprint.

SAGAN B. *The symmetric group. Representations, combinatorial algorithms and symmetric functions*. Springer-Verlag New York, Inc. 2001.

SERRE J.P. *Linear representations of finite groups*. Springer-Verlag. 1977.

Recibido: 23/07/2002
Aceptado: 6/04/2003