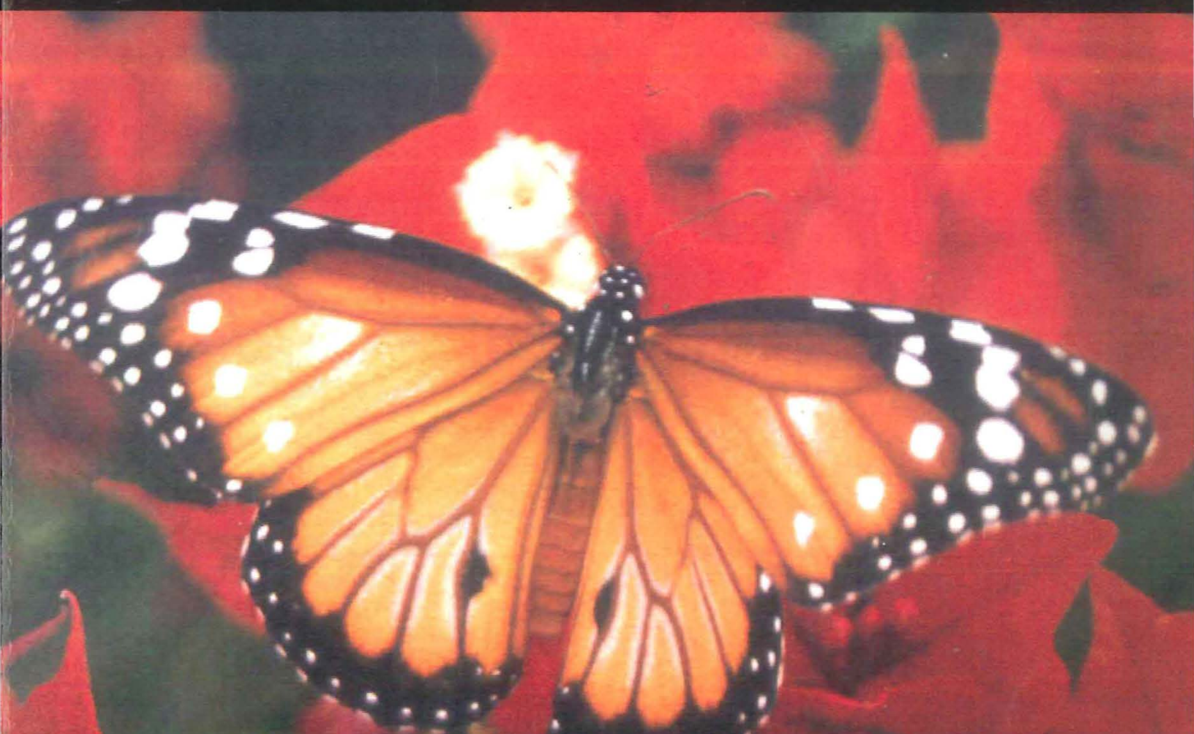
ISSN 0122-7483

Universitas Scientiarum

Vol 6 No. 2

Julio - Diciembre 2001



PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
Revista de la Facultad de Ciencias

UNIVERSITAS SCIENTIARUM
Revista de la Facultad de Ciencias
PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

Vol. 6, N° 2: 35-40

FUNCIONES MATEMÁTICAS EN OTRAS CIENCIAS

Bayardo Villegas V.

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Javeriana
email: bayardo.villegas@javeriana.edu.co

RESUMEN

En el presente escrito se anotan las definiciones de los conceptos matemáticos producto cruz y función y se dan ejemplos de ellos, enfatizando en los de función referidos a ciencias diferentes de las matemáticas. Se remarcan la importancia, sencillez y utilidad del concepto de función y del pensamiento funcional en tales disciplinas, se los aplica para discutir la acción de las topoisomerasas y se concluye que no deben ser de uso exclusivo de unas pocas ciencias.

Palabras clave: ADN circular, función, pensamiento funcional, producto cruz, topoisomerasa.

ABSTRACT

In this work there are definitions of mathematic concepts like cross product and function and examples of these, with emphasis in the examples of functions in different sciences of the mathematics. There are highlight of the importance, simplicity, utility of the function concept and the functional thought in such disciplines, those are applied in order to discuss the topoisomerase actions and the conclusion is that these concept and thought must not utilize only in a few sciences.

INTRODUCCIÓN

El escritor, filósofo y pedagogo Fernando Savater (2000) aboga y da pautas hacia una pedagogía orientada a hacer que el investigador y estudiante lleguen a obtener una visión humanística y holística.

Para cumplir lo anterior en la formación de los estudiantes de cualquier ciencia, una estrategia adecuada y útil sería que ellos hicieran una aprehensión del concepto de función y del pensamiento funcional que si bien consustanciales a los matemáticos podrían ser fácilmente asimilables por aquéllos, lo cual les permitiría introducirse en el pensamiento complejo y holístico; igual cosa puede decirse para los cultores, no estudiantes, de disciplinas no matemáticas.

MARCO TEÓRICO

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos cualesquiera: $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,/\, x_i \in A_i\}$ se denomina *el producto cruz* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Por ej., dados $A = \{a, b\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, $A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$.

Sean X y Y conjuntos: *una función f de X en Y* es una correspondencia que *a cada* elemento x de X le asocia *un único* elemento y de Y.

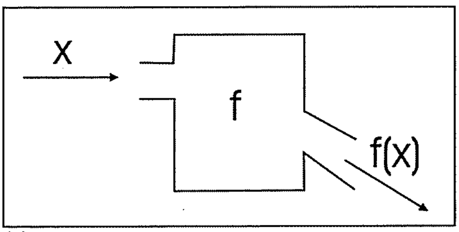
Supóngase que f es una función de X en Y y que a x le asocia y: estos dos hechos se denotan, respectivamente, por

$$X \xrightarrow{f} Y \text{ (o, } f: X \longrightarrow Y\text{) y } y = f(x)$$

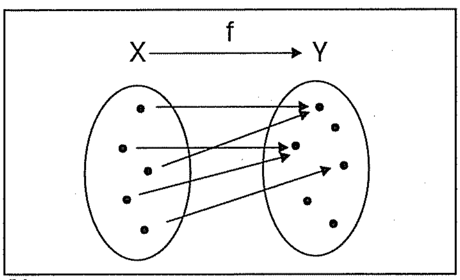
donde la última denotación se lee "y igual a f de x" y se dice "y es la imagen de x por f" o "f envía a x en y" o "f transforma a x en y".

Hay funciones expresables mediante frases, por ej., "la función que a cada pareja de (números) reales (x, x^2) la envía en el menor de ellos" es la función tal que, por ej., a (0.5, 0.5^2) la envía en 0.5^2 y a (2, 2^2) en 2; hay otras que aunque no muy fácilmente definibles por una fórmula sí tienen la ventaja de poder construirse objetivamente, como se verá posteriormente al tratar el cromosoma circular. En fin, además de otros tipos de funciones, hay las funciones "internas" que envían elementos de un conjunto en elementos de él mismo como, por ej., la función "doble" d: R⟶R tal que a un real x lo envía en su duplo 2x.

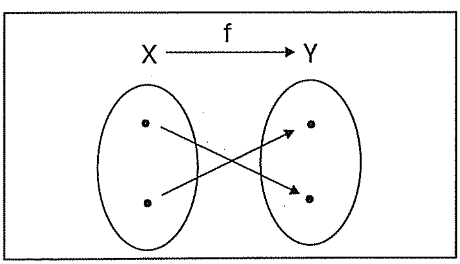
Maneras intuitivas de diagramar funciones son las siguientes:



(a)



(b)



(c)

FIGURA 1. Diagramas de funciones

En los anteriores diagramas, f en el (a) puede interpretarse como una "máquina" que actuando sobre cada x lo transforma en su correspondiente f(x): notablemente de ella, en principio, no es necesario conocer sus componentes ni cómo opera, es una "caja negra"; en (b) y (c) se muestra a cada x en cuál y lo envía f.

Sería natural preguntarse si dada una función f: X⟶ Y ¿existe una manera "funcional" de devolverse o un flujo funcional inverso, en definitiva, una "función inversa" de Y en X? Bien, obsérvese el diagrama (b) de la anterior figura donde hay mínimo un elemento (realmente dos) en Y que es (son) imagen(es) de más de uno de X (f es "redundante") y entonces la "devolución" para tal(es) elemento(s) no sería unívoca, cono lo exige el concepto de función; por otro lado, por lo menos hay un elemento (realmente tres) en Y que no es (son) imagen de ninguno de X y entonces en la devolución tal(es) elemento(s) no tendría(n) imagen, como también obliga la definición de función: por cualquiera de estas dos razones, máxime que en este caso se tienen ambas, en (b) la respuesta es negativa; en (c) ella es positiva y en un tal caso se dice que "f es biyectiva".

El concepto de funciones caracteriza a la matemática moderna y en muchas demostraciones, esencia de tal disciplina (Bourbaki, 1974), ellas son una herramienta indispensable: aún con esto tal concepto no es reduccionista pues las funciones son meros subconjuntos propios de productos cruz.

EJEMPLOS DE FUNCIONES

Se dan a continuación algunos ejemplos de funciones.

- Sean N = {A, C, G, U} el conjunto de ribonucleótidos, C = {(x1, x2, x3)/xi $\in$N} y A = {a/a es un aminoácido codificable o una señal de pare}: C $\xrightarrow{cg}$ A es la función "código genético" tal que, por ej., cg(U, U, C) = fenilalanina (Waterman, 1995).

- Sean los conjuntos M, V y E cuyos elementos son, respectivamente, cantidades de materia, velocidad y energía cinética: $M \times V \xrightarrow{ec} E$ es la función "energía cinética" tal que $ec(m, v) = 1/2\ m\sqrt{}^2$.

- Sea A = {m/m es una molécula autorreplicable}: $A \xrightarrow{ar} A$ tal que ar(m) = 2m es la función "autorreplicación" que, por ej., a un ribozima lo transforma en dos.

- ox: $\{M^{+i}/M^{+i}$ es un metal bajo valencia i} {o/o es un óxido} es la función "óxido" tal que $ox(M^{+i}) = M_2O_i$, donde, por ej., $ox(Al^{+3}) = Al_2O_3$ (el óxido de aluminio).

- Sean N = {1, 2, 3, ...} el conjunto de los números naturales y A={a/a es un alcano}: $N \xrightarrow{al} A$ es la función "alcano" tal que $al(n) = C_nH_{2n+2}$ (por ej., $al(2) = C_2H_{4+2}$, el etano).

- Sean I = {i/i es un organismo injurioso}, V = {v/v es un organismo víctima}, A = {a/a es una molécula de acción} y R = {r/r es una molécula de reacción}: $I \times V \xrightarrow{ad} A \times R$ es la función "ataque/defensa" tal que, por ej., ad(alacrán, hombre) = (toxina, antitoxina).

- La función h que a cada punto de la circunferencia (unitaria) de radio 1, S^1, lo envía en uno de una curva cerrada simple C en el espacio (en particular en cualquier circunferencia): se dice que la curva es "topológicamente una circunferencia", lo cual se denota $C \approx S^1$, y es en este sentido que debe hablarse de "cromo-soma circular" no porque éste en algún momento llegue a ser "geométricamente" una circunferencia pues ello es imposible ya que la longitud del diámetro de una tal circunferencia superaría por mucho (más bien, muchísimo) la del de la "esfera" celular. Una construcción objetiva de tal función, por cierto trivial, es la siguiente: tómese una banda de caucho circular en el plano y defórmesela, sin romperla en ningún momento, haciéndole en el espacio dilataciones (o contracciones), recodos, sobrecruces, enrollamientos y superen-rollamientos, alteraciones estas denominadas "transformaciones continuas". Obsérvese que el proceso es reversible y entonces se tiene acá una función biyectiva; también que dadas R_1 y R_2 las ramas de un cromosoma circular de doble cadena (en este sentido se aludirán posteriormente), se tiene que $R_1 \approx S^1$ y $R_2 \approx S^1$.

- Sean $M = \{(C1,C2)/C_i \approx S^1$, C_i orientada, $C_1 \cap C_2 = \phi\}$ y el conjunto de los enteros Z = {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...}: $M \xrightarrow{L} Z$ es la función "entrelace" que a cada pareja de curvas (C_1, C_2) en M la envía en $L(C_1, C_2)$, número este que dice cuántas veces gira una curva alrededor de la otra.

IMPORTANCIA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

- Hubo un movimiento en Alemania que, según Jourdain (1956), preconizó el "pensamiento funcional" en la enseñanza de la matemática. Ello sería bueno extenderlo a otras ciencias por las siguientes razones:

- Aunque existen campos de la matemática abstrusos aún para sus cultores, de aquéllos no hace parte el concepto de función: éste puede ser fácilmente asimilable, manipulable y, ¡lo mejor!, de uso práctico inmediato por todo estudioso de cualquier ciencia.

- Muchas funciones son fácilmente construibles.

- El concepto de función delimita inequívocamente el sentido de ciertos términos como, por ej., el de cromosoma circular, caso éste en el cual tal delimitación tendrá hondas repercusiones en la discusión, más adelante, de la acción de las topoisomerasas.

- Aceptado ya que no todo es función, sí se tiene que muchos casos pueden atacarse, en un primer contacto con ellos, como funciones, sobrentendido eso sí que ello no implica pleno (ni siquiera rudimentario) conocimiento del caso específico, sino sólo un acercamiento inicial.

- El pensamiento funcional es, valga la redundancia, una "forma de pensar", que luego de permitirle a un observador construir, si posible, una función f: X $\longrightarrow$ Y acerca de un fenómeno, y ella pensada no en la forma "fría" de la definición (esta es indispensable pero en la propia matemática) sino en la de los diagramas de la figura 1, podría generar(le) preguntas lo que no deja de tener importancia pues ello es el primer paso en el proceso de investigación, independientemente de la discusión de quién es más importante, si la persona que (se) hace preguntas, aquel que formula hipótesis ripostativas o quien efectivamente verifica o niega éstas. Afortunadamente, normal pero no necesariamente, al menos dos de estas capacidades (por lo regular las dos primeras), muchas veces las tres, se reúnen en una sola persona. Preguntas sobre X y/o Y y/o f, por ej., ¿qué otros elementos, además de los iniciales en la construcción de f, pueden incluirse en X y cuáles son sus imágenes?, ¿cómo opera f para transformar x de X en y de Y?, etc., preguntas que luego del acercamiento inicial, mediante estudio, consultas y bibliografía, irán adentrando al observador en el tema, en las "entrañas" de la caja negra, lo cual retroa-limentará la concepción de la función; además podría llevarle a formular(se) hipótesis de respuesta acerca de tales preguntas lo que acotaría el campo de la investigación.

- Dada una función f: X$\longrightarrow$Y el pensamiento funcional establece una íntima asociación, una amalgama, entre X, Y y f, lo cual no se tiene en pensamientos "compartimentales" en los cuales, de manera natural e inconsciente, puede fácilmente caerse.

- Si bien es cierto que sería mucho pedir que las funciones óxido y alcano, y otras químicas adecuadamente construidas, antes definidas matemáticamente, agreguen algo al conocimiento sobre las antiguas funciones "químicas" óxido y alcano en cuanto a sus aplicaciones, grupos químicos funcionales y propiedades de éstos, pues lo más seguro es que se caiga en ser "profeta del pasado", sí podría aspirarse con nuevas funciones ser augur del pasado/futuro: por ej., construida la anterior función ad de I x V en A x R puede pronos-ticarse lo siguiente (investigación posterior dirá si se acertó o no): (maleza, cultivo) es un elemento de I x V, en A x R debe existir una imagen (u, v) de (maleza, cultivo), u en presiembra o al principio del cultivo en bajas dosis actuaría como "vacuna" , v en altas dosis luego de enmalezamiento lo haría como "remedio" (herbicida), etc.

- Permite obtener conclusiones. Por ej. en la anterior función cg ya que, por mostrar un caso, cg(U, U, U) = fenilalanina y cg(U, U, C) = fenilalanina, se deduce que el código genético es redundante, deducción que si bien trivial para alguien con algo más que rudimentos de bioquímica, tiene importancia y mérito, si personal, para aquel que tuviese sólo los primeros contactos con tal ciencia, "un primíparo"; tal redundancia lo llevaría también a concluir que no puede haber un flujo inverso de aminoácidos o señales de pare hacia triplas de ribonucleótidos.

- Alienta el "pensamiento holístico" pues, por ej. en la anterior función ad, a I x V podrían pertenecer (fitoparásito obligado, susceptivo), (bacteria, *Penicillium sp.*), (alacrán, hombre), (virus, mamífero), etc., y a A x R sus correspondientes imágenes (conocidas o especulativas): se tienen, pues, dos conjuntos ligados por la función, en los cuales "sus elementos son meros casos particulares de un todo integrado". En este punto ad podría cambiarse por la función "inmunología" ***i***, ésta en un sentido muy amplio. Insistiendo sobre esto de pensamiento holístico, podría pensarse en funciones internas "inmunología evolutiva" en cada uno de los conjuntos I, V, A, R, funciones que si bien de antemano no puede asegurárseles una utilidad práctica sí darían un marco conceptual (abstracto, ¡redundando!) acerca de cómo primitivos mecanismos (¿"inmunológicos"?) atacantes y defensivos evolucionaron hacia unos cada vez más sofisticados. Acá también subyace un punto más de importancia del concepto de función, pues se muestra que la matemática no es la camisa de fuerza, lo lineal (lo que sea se quiera significar con esta sindicación) que a veces se le achaca: ¡ella admite el libre vuelo de la imaginación!

TOPOISOMERAS Vs. FUNCIONES

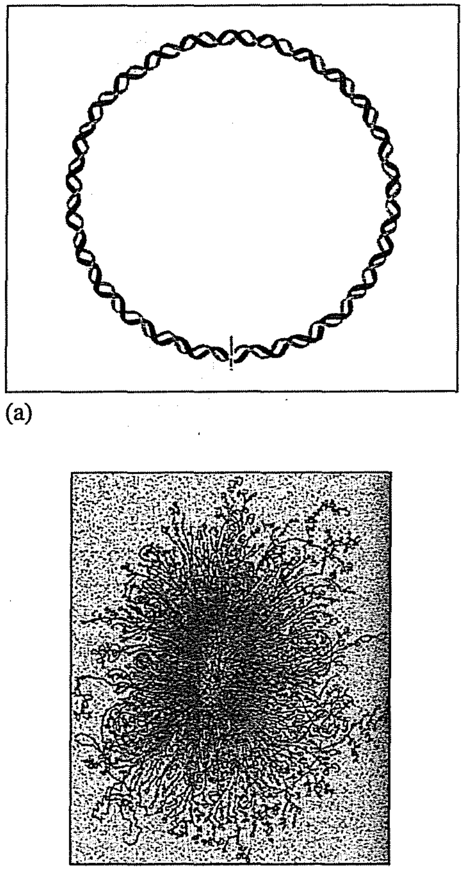
Antes se discutió lo poco que se espera que la sola definición de función matemática de viejas funciones de otras ciencias pueda aumentar el conocimiento, pero en otros casos una definición de ese tipo intermediaría tal efecto al promover mayor investigación: como ejemplo para mostrar esto se discutirá la acción de las topoisomerasas *versus* las anteriores funciones h y L, lo cual incidentalmente también, por un lado, ilustrará la potencia de la concepción funcional pues, ahí sí, ella y unos pocos hechos permiten discutir tales profundidades biomoleculares y, por el otro, retrotrae aquello de hacer(se) preguntas.

Bien, se tienen los siguientes hechos:

- puede demostrarse (Villegas, 1985) que si $L(C_1,C_2) \neq 0$ entonces C_1 y C_2 no pueden separarse mediante transformaciones continuas (o sus inversas);

  las "topoisomerasas I" disminuyen cada vez en una unidad el $L(R_1,R_2)$ haciendo en cada sobrecruce un corte en "una de las ramas", pasando luego los extremos de corte "sobre" la rama intacta y uniendo enseguida tales extremos: el nuevo cromosoma es un "topoi-sómero" del anterior (Wang, 1996);

- según lo discutido en la anterior función h, las topoisomerasas I han de operar sobre el cromosoma "real", es decir, con recodos, sobrecruces, enrollamientos y superenrollamientos: en un supuesto cromosoma totalmente relajado en una circunferencia geomé-trica, disminuir ellas cada vez en una unidad $L(R_1,R_2)$ sería relativamente fácil haciendo la anterior operación, siempre en la misma rama y sentido, cada dos vueltas (véase figura 2(a)), pero en el cromosoma real no lo sería tanto pues en este caso la noción de "vuelta" no tiene ningún significado físico o geométrico (véase figura. 2(b));



(a)

(b)

FIGURA 2. Cromosoma bacterial: (a) "representación" circular; (b) de *E. coli*

- la molécula de topoisomerasa I es un objeto muy pequeño frente a la del ADN cromosomal y entonces aquella no puede percibir la geometría y la topología globales de ésta: ante ello representaciones simplificadas, como la de la figura 2(a), son insatisfactorias.

Se advierte, antes de lo que sigue, que no se pretende acá negar el trabajo de las topoisomerasas I, antes reseñado, pues se tiene el hecho incontrovertible que las ramas efectivamente se separan, pero en consonancia con la intermediación antes dicha se piden respuestas a las siguientes preguntas:

- ¿cómo deciden correctamente las topoisomerasas I en cada una de las ocasiones que operan, unas 300.000 en *E. coli* (este es aproximadamente el $L(R_1,R_2)$ en esta bacteria) en cuál de las ramas hacen el corte?: si se equivocan y hacen el movimiento "sobre" antes anotado en vez de disminuir $L(R_1,R_2)$ lo aumentarían;

- ¿cómo deciden correctamente por ej. en *E. coli*, en cada una de las 300.000 veces que deben hacerlo, entre el movimiento "sobre" y el "por debajo"? (¿o entre el "levógiro" y el "dextrógiro"?): si fallan $L(R_1,R_2)$ aumentaría.

- Las topoisomerasas II operan como las I pero cortando cada vez ambas ramas de ADNs circulares de doble cadena entrelazados (Wang, 1996; Stasiak, 2000): ¿cómo resuelven en su caso análogas preguntas a las anteriores? (véase figura 3).

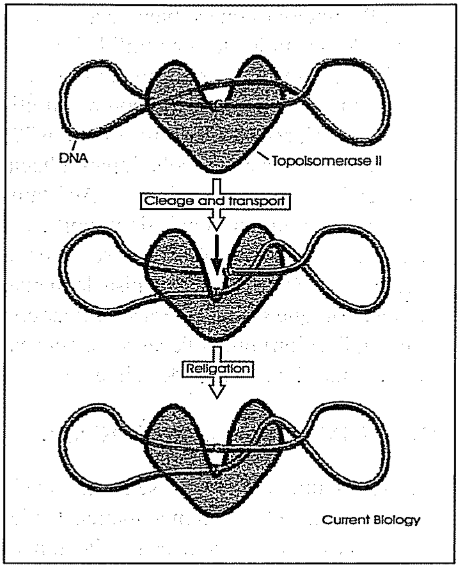


FIGURA 3. Acción de las topoisomerasas II

CONCLUSIÓN

El concepto de función por ser sencillo, asimilable, manipulable y de aplicación práctica inmediata, así como el pensamiento funcional, no deben ser sujetos de uso exclusivo de unas pocas ciencias.

LITERATURA CITADA

Bourbaki N.,1974, Theory of sets. Hermann Publishers in arts and science, París, France.

JOURDAIN P.E.B, 1956, *The nature of mathematics*, en: NEWMAN J.R. (ed.), *The world of mathematics. Simon and Shuster*, New York, USA. 1: 4–72.

SAVÁTER F., 2000, *El valor de educar*, Planeta Colombia Editorial S.A., Bogotá, Colombia.

STASIAK A., 2000, *Feeling the pulse of a topoisomerase*, Current Biology, 10(14): 526-8.

VILLEGAS B., 1985, *Consideraciones topológicas en la teoría de replicaciones del ADN*, Boletín de Matemáticas Universidad Nacional de Colombia 19(2): 119-138.

WANG J.C., 1996, *DNA topoisomerases*. Annu Rev Biochem. 65: 635-692.

WATERMAN M.S., 1995, *Introduction to computational biology*, Chapman & Hall, London, UK.