

Universitas
Scientiarum

ISSN 0122-7483

Vol. 7 No. 1

Enero - Junio 2002



PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
Revista de la Facultad de Ciencias



UN PROGRAMA PARA CALCULAR LAS REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES DE SN, EN LA FORMA SEMINORMAL DE YOUNG¹ MATEMÁTICA COMPUTACIONAL COMO APOYO A LA DOCENCIA

Álvaro Duque S.J., Patricia Hernández Rodríguez, Fernando Novoa

Pontificia Universidad Javeriana. Noviembre, 2001.

¹*Mathematics Subject Classification. Primary 05E10- Secondary 06B15*

RESUMEN

Las matrices de las representaciones irreducibles de un grupo G se usan para el cómputo de la Transformada Generalizada de Fourier de una función definida en G . Existen muchas otras aplicaciones para las representaciones irreducibles de un grupo. Nosotros elaboramos un software que calcula las matrices de las representaciones irreducibles del grupo simétrico en la forma seminormal de Young. Este programa corre en el Sistema Algebraico Computacional CoCoA.

Palabras clave: Grupo simétrico, Representación.

ABSTRACT

The matrices of the irreducible representations of a group G are useful to compute the generalized Fourier Transform of a function defined on G . There are many other applications for the irreducible representations of a group. We developed a computer program for computing the matrices of the irreducible representations of the symmetric group in the Young's seminormal form. This program runs on the Computational Algebraic System CoCoA.

Key words: Symmetric group, Representation.

INTRODUCCIÓN

El cómputo explícito de las representaciones irreducibles de un grupo finito es necesario para desarrollar ciertas aplicaciones de la teoría de grupos. Probablemente el ejemplo más conocido sea el desarrollo de algoritmos rápidos para el cálculo de la transformada de Fourier y en particular, algoritmos como el de Cooley Tukey. También el análisis estadístico de datos obtenidos por ejemplo, en encuestas de preferencia, hace uso de las representaciones de los grupos simétricos, en el cálculo de la transformada generalizada de Fourier o transformada de Wedderburn, para una función definida sobre un grupo G .

Estas transformadas han sido bien estudiadas, y en el caso que el grupo sea cíclico o

diádico, dichas transformadas se conocen como la transformada discreta de Fourier y la transformada de Haddamard-Walsh respectivamente.

Si G es conmutativo, las representaciones irreducibles de G son los caracteres de G , es decir, son homomorfismos definidos sobre G de valor complejo. En particular, si $G = Z_n = \langle x \rangle$ el grupo cíclico de orden n , G tiene n representaciones irreducibles de dimensión 1 (homomorfismos de G en C^*) dados por

$$\rho_j(x^k) = \omega_n^{kj}, \quad \forall k, j, 0 \leq k, j \leq n-1, \quad \omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}} \quad (1.1)$$

Si f es una función definida sobre Z_n y denotamos por $x_j = f(x^j)$, la transformada de Fourier para f en la representación ρ_j está dada por,

$$\hat{f}(j) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x^k) \rho_j(x^k) \quad (1.2)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x_k \omega_n^{kj}$$

que la podemos interpretar como la multiplicación

donde $F_n^j X^T$

$$F_n^j = [\omega_n^{j0} \omega_n^{j1} \dots \omega_n^{j(n-2)} \omega_n^{j(n-1)}]$$

y $X = [x_0 \ x_1 \ \dots x_{n-1}]$

Luego el cálculo de la transformada de Fourier de f en todas representaciones irreducibles de Z_n equivale a la multiplicación matriz-vector

$$F_n X$$

donde la matriz $F_n = [\omega_n^{jk}]$ se llama la matriz de Fourier (Ram-Manuscrito), la cual satisface ciertas propiedades de ortogonalidad comunes a los caracteres de un grupo finito. Más detalles sobre la transformada rápida de Fourier y su implementación se pueden encontrar en (Van Loan, 1992).

Si el grupo G no es conmutativo, la transformada de Fourier para una función definida sobre G se define en la misma forma como se definió en (1.2), excepto que en este caso va a existir por lo menos una representación cuya dimensión es mayor que 1 y por lo tanto su resultado es también otra matriz. Recientemente se han desarrollado algoritmos rápidos para el cómputo de la transformada de Fourier sobre algunos grupos no conmutativos (Maslen and D. Rockmore, 1997-Rockmore, 1997), los cuales en algunos casos generalizan el famoso algoritmo de Cooley-Tukey con complejidad computacional similar a la de éste.

Por tal razón, es claro que si deseamos calcular la Transformada de Fourier de una fun-

ción f se requiere las representaciones en forma explícita. Otras aplicaciones de la teoría de representaciones de grupos se pueden encontrar en (Maslen and D. Rockmore, 1997-Rockmore, 1997).

CONCEPTOS Y DEFINICIONES

Los fundamentos de la teoría de representaciones de grupos finitos se pueden encontrar en (Sagan-2000).

Sea G un grupo finito, V un espacio vectorial complejo de dimensión n y $GL(V)$ el grupo de C -isomorfismos sobre V . Se sabe que, $GL(V) \approx GL(n, C)$ el grupo de matrices invertibles de orden n sobre C . Una representación de G en V es un homomorfismo de grupos

$$\rho: G \rightarrow GL(V)$$

y n se llama la dimensión o grado de la representación ρ . Usualmente el espacio vectorial V se llama el espacio representación de G , cuando no hay posibilidad de confundir la representación. Un subespacio $W \subset V$ se llama *invariante* si $\rho(g)W \subset W$ para todo $g \in G$. Una representación se dice *irreducible* si sus únicos subespacios invariantes son los triviales. Es claro que toda representación de dimensión 1 es irreducible.

Ejemplo 1

La representación regular a izquierda de G . Sea G un grupo de orden n , y V un espacio vectorial de dimensión n con base $\{e_{g_1}, \dots, e_{g_n}\}$ indexada por los elementos de G . Definamos la representación R .

$$R: G \rightarrow GL(V)$$

$$g_i \rightarrow R(g_i)(e_{g_j}) = e_{g_i g_j}$$

Si e es la identidad de G se tiene que $R(e) = Id_V$ y por lo tanto su matriz asociada es

$$R(e)=I_n.$$

Sea W el espacio de dimensión 1 generado por el elemento $\sum_{g \in G} e_{g^i}$.

Entonces W es invariante bajo R , luego en general la representación regular R no es irreducible.

Sin embargo, toda representación de un grupo finito es suma directa de representaciones irreducibles, por lo tanto nuestro objetivo es el cómputo de representaciones irreducibles. Como se expresó en la introducción las representaciones irreducibles de un grupo abeliano son todas de dimensión 1. Recíprocamente, se puede ver que si todas las representaciones irreducibles del grupo son de dimensión 1, entonces G es abeliano.

Representaciones irreducibles de S_N

Los siguientes resultados son los que más usaremos acerca de las representaciones de los grupos de simetría. Los detalles y pruebas de los enunciados se pueden ver en (Fulton-1997, Rockmore-1997).

El número de representaciones irreducibles de un grupo finito G es igual al número de clases conjugadas del grupo, las cuales se encuentran en correspondencia con las particiones de n . Esto se debe a que en S_n dos elementos son conjugados, si y solamente si, su descomposición cíclica es la misma.

Ejemplo 2

En S_4 , $(1,2,3)$ y $(2,3,4)$ son conjugados pues

$$(1,2,3,4)(1,2,3)(1,2,3,4)^{-1}=$$

$$(1,2,3,4)(1,2,3)(4,3,2,1) = (2,3,4)$$

La multiplicación se hace de derecha a izquierda.

Una partición de n es entonces una sucesión no creciente $\lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$.

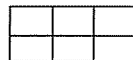
tal que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0 \text{ y } \sum_{i=1}^k \lambda_i = n$$

Escribiremos $\lambda \vdash n$ para indicar que λ es una partición de n . Además, decimos que λ tiene k partes. Asociada a cada partición λ tenemos su *diagrama de Ferre*, que es un arreglo de k filas y la fila i -ésima contiene λ_i cajas alineadas a izquierda.

Ejemplo 3

El siguiente es el diagrama de Ferre asociado a la partición $(3,2)$



Una tabla asociada a una partición se obtiene al llenar con números las entradas del diagrama de Ferre de la partición. Una tabla asociada a la partición $\lambda \vdash n$ se llama estándar si las entradas son números del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ y van aumentando de izquierda a derecha en cada fila y de arriba hacia abajo en cada columna. En particular, en una tabla estándar no hay repeticiones en las entradas.

Ejemplo 4

Las siguientes son tablas estándar asociadas a la partición $(3,2)$

1	3	5
2	4	

1	2	5
3	4	

1	3	4
2	5	

1	2	4
3	5	

1	2	3
4	5	

El número de tablas estándar está dado por la fórmula de Frame-Robinson-Thrall, (Rockmore-1997). Antes de dar la fórmula, definamos el *gancho* para las entradas de un diagrama de Ferre. Si la caja c se identifica

por $c=(i,j)$ en un diagrama de Ferrer el *gancho* de c se define como el conjunto de cajas a la derecha de c en la fila i , unido al conjunto de cajas debajo de c en la columna j junto con la caja c .

Ejemplo 5

	*	*
	*	

En el anterior diagrama hemos marcado con un asterisco las cajas que están en el gancho de la entrada $c=(1,2)$. A cada entrada se le calcula el número de elementos de su gancho y obtenemos el diagrama de los ganchos asociados a la partición dada. Para la partición $(3,2)$

4	3	1
2	1	

es el diagrama de los ganchos.

La fórmula de Frame-Robinson-Thrall asegura que el número de tablas estándar asociadas a una partición $\lambda \vdash n$ está dada por

$$\delta^\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_{(i,j)}}$$

donde $h_{(i,j)}$ representa el tamaño del gancho de la entrada (i,j) en el diagrama de Ferrer asociado a λ

Ejemplo 6

Por lo tanto, en nuestro ejemplo tenemos que hay

$$\frac{5!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 5$$

tablas estándar de la forma $(3,2)$, que son las que hemos escrito en (2.1).

Hasta el momento tenemos que las representaciones irreducibles de S_n están en correspondencia uno a uno con las particiones de n . Asociada a cada partición tenemos un número de tablas estándar dadas por la fórmula de Frame-Robinson-Thrall. Lo que deseamos es hallar las matrices asociadas a dichas representaciones irreducibles. Se sabe que la dimensión de la representación irreducible asociada a la partición $\lambda \vdash n$ es exactamente el número de tablas estándar asociadas a λ , δ^λ . Así la representación irreducible asociada a la partición $(3,2)$ es de dimensión 5, pues hay 5 tablas estándar asociadas a esa partición. Ahora lo que nos hace falta es hallar las entradas de dichas matrices.

Forma seminormal de Young

Las entradas de las matrices asociadas a las representaciones irreducibles de S_n en la forma seminormal de young están indexadas por las tablas estándar. Para esto, inicialmente ordenamos las tablas estándar por el orden de la *última letra*. Sean T_1 y T_2 dos tablas estándar asociadas a la partición $\lambda \vdash n$. Si n se encuentra en una fila de T_1 menor que en la tabla T_2 entonces $T_1 < T_2$. Si n se encuentra en la misma fila en ambas tablas, entonces se aplica el criterio a $n-1$ y así sucesivamente hasta decidir. Esto es un orden total.

Las matrices en la forma seminormal de Young se definen para transposiciones de elementos consecutivos y por multiplicación y conjugación entre ellas se obtienen las restantes matrices, pues sabemos que el conjunto $\{(i, i+1): 1 \leq i < n\}$ es un conjunto de generadores para S_n .

Para determinar las entradas de las matrices asociadas a estas representaciones, definimos una distancia entre elementos consecutivos y una acción de S_n sobre las tablas estándar. Sea $(i, i+1) \in S_n$ y T una tabla estándar asociada a

la partición λ . Entonces la tabla resultante de intercambiar en T los elementos $i, i+1$ se denota por $(i, i+1)T$. Es fácil verificar que la acción está bien definida, es decir que $(i, i+1)T$ es una tabla estándar. Ahora definimos la *distancia axial* en una tabla T para los elementos $i, i+1$. Si i se encuentra en la celda (α, β) de la tabla T e $i, i+1$ se encuentran en la tabla T en la posición (γ, δ) entonces

$$D_T(i, i+1) = |\alpha - \gamma| + |\beta - \delta|$$

y algunos autores la definen sin los valores absolutos. Las entradas m_{uv} de la matriz M , correspondiente a $(i, i+1)$ para la partición $\lambda \vdash n$ indexadas por las tablas estándar $\{T_k\}$ ordenadas por el orden de la última letra están dadas por:

1. Si $i, i+1$ están en la misma fila para la tabla T_j entonces la entrada $m_{jj} = 1$
2. Si $i, i+1$ están en la misma columna para la tabla T_j entonces la entrada $m_{jj} = -1$
3. Si $i, i+1$ no están ni en la misma fila ni en la misma columna, definimos la submatriz

$$\begin{bmatrix} m_{jj} & \dots & m_{jk} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{kj} & \dots & m_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^{-1} & \dots & 1-d^{-2} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & -d^{-1} \end{bmatrix}$$

donde $d = D_{T_j}(i, i+1)$ y $(i, i+1)T_j = T_k$ con $k > j$

4. En cualquier otro caso la entrada $m_{uv} = 0$

Estas matrices son las que calcula nuestro programa y al final de este reporte se puede ver el resultado de una de las rutinas implementadas.

Ejemplo 7

La matriz asociada a la transposición $(2,3)$ para la representación irreducible indexada por la partición $(3,2)$ de 5 será:

$$M_{(3,2)}(2,3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Observe que en la primera tabla estándar de $(2,1)$ el 2 y el 3 no están ni en la misma fila ni en la misma columna, y que si intercambiamos el 2 y el 3 obtenemos la segunda tabla. Además la distancia axial en la tabla 1 entre 2 y el 3 es

$$D_{T_1}(2,3) = 1+1=2$$

por lo tanto según la definición de la matriz de la representación, tenemos la submatriz

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

¿Por qué en la forma seminormal de Young?

La forma seminormal de Young tiene una propiedad muy importante cuando restringimos o inducimos las representaciones irreducibles de S_n . Este resultado fundamental se conoce como la regla de ramificación [10] y básicamente dice que S^λ es un S_{n-1} -módulo irreducible entonces

$$S^\lambda \downarrow_{S_{n-1}} = \bigoplus_{\alpha \in \lambda^-} S^\alpha$$

$$S^\lambda \uparrow_{S_{n+1}} = \bigoplus_{\alpha \in \lambda^+} S^\alpha$$

en donde

$$\lambda^- = \{\text{particiones de } n-1 \text{ contenidas en } \lambda\}$$

$$\lambda^+ = \{\text{particiones de } n-1 \text{ contenidas en } \lambda\}$$

Es de anotar que un S_n -módulo ó CS_n -módulo es equivalente a una representación de S_n . Pero para dicha descomposición, puede ser necesario hacer cambio de base, el cual significa multiplicar por matrices que realicen dicho cambio de base; en términos prácticos influirán en el tiempo de cómputo. Sin embargo, en la forma seminormal dicha descomposición es inmediata.

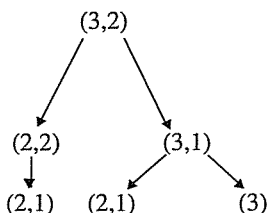
Para ilustrar un poco lo anterior, observe las tablas estándar de la partición (3,2) dadas en (2.1). Suprima el cuadro que contiene el número 5 en todas ellas. El resultado es

1	3	1	2	1	3	4	1	2	4	1	2	3
2	4	3	4	2			3			4		

que nos determina las tablas estándar de las particiones de 4 que están incluidas en la partición (3,2), las cuales son (2,2) y (3,1). Además para los elementos de la forma $(i, i+1)$, con $1 \leq i \leq 3$, las distancias en estas nuevas tablas son exactamente la misma distancia que en las tablas de la partición (3,2).

Ejemplo 8

Consideremos la representación asociada a la partición (3,2). Según la regla de ramificación $S^{(3,2)} \downarrow S_3$ será:



es decir,

$$S^{(3,2)} \downarrow S_3 = 2S^{(2,1)} \oplus S^{(3)}$$

que coincide con la expresión de la matriz hallada en la ecuación (2,2) para $M_{(3,2)}(2,3)$.

En general, una base para una representación que hace lo mismo que la base seminormal de Young se llama una base seminormal. Sea C el cuerpo de los complejos y $\{1\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_n = G$ una cadena de subgrupos. Sea V^λ un CG_{n-1} -módulo irreducible.

Bajo la restricción de subgrupo G_{n-1} el módulo V^λ se descompone como suma directa

$$V^\lambda \cong V^{\mu^1} \oplus \dots \oplus V^{\mu^k}$$

de CG_{n-1} -módulos irreducibles. Similarmente cada uno de estos sumandos se descompone en CG_{n-2} -módulos irreducibles y así sucesivamente. Una base B^λ de V^λ se dice *seminormal* si explícitamente realiza esta descomposición, es decir, existe una partición de B^λ en subconjuntos $B^{\mu^1}, \dots, B^{\mu^k}$ tal que

$$V^{\mu^i} = \langle B^{\mu^i} \rangle$$

donde

$$V^\lambda = V^{\mu^1} \oplus \dots \oplus V^{\mu^k}$$

observe que se necesita la $(=)$ y no la $(\cong)$.

UN PROGRAMA PARA EL CÁLCULO DE LAS REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES

El programa

El programa fue diseñado inicialmente con el propósito de calcular las matrices de las representaciones irreducibles de S_n en la forma seminormal de Young. Las rutinas que permiten calcular estas matrices están hechas para el sistema computacional CoCoA. Estas rutinas son funciones, las cuales reciben parámetros de entrada y retornan un valor, que

puede ser numérico, vectorial, booleano etc. Estas funciones en esencia, calculan las permutaciones de n elementos, las particiones de n , las tablas estándar de una partición, la dimensión de una representación irreducible, las matrices asociadas a las transposiciones de elementos consecutivos, en fin, cada una de las estructuras necesarias para la construcción de las matrices en la forma requerida.

Cada una de estas funciones tiene una función Ayuda (help) que se activa por medio del comando Help del sistema CoCoA y que le permite al usuario tener la información sobre la entrada y salida de cada una de las funciones del programa. Además se tiene un manual donde se listan las funciones del programa y sus propiedades.

Ejemplo 9

Las siguientes instrucciones le dan la información de la función que calcula las particiones de un entero y cómo calcularlas:

```
Sym.Help_Part2();
```

Su argumento debe ser un entero N mayor que 3

Y regresa una lista con las particiones

Enteras de N

```
Sym.Part2(4);
```

```
[[4], [3, 1], [2, 2], [2, 1, 1], [1, 1, 1, 1]]
```

A continuación ilustramos una de las rutinas que implementamos para el cómputo de las representaciones de S_n . Una de las grandes dificultades del programa es generar las tablas estándar de Young. El algoritmo de *insertar por filas* fue implementado para hallar dichas tablas. Este algoritmo se debe a Robinson y

Schensted (Sagan,2000) y es como sigue: si T es una tabla (puede ser semiestándar) y x es un entero positivo, introducimos x en T así:

1. Si x es por lo menos tan grande como los elementos de la primera fila de T , entonces adjuntamos x a la primera fila de T en la última posición.
2. En caso contrario, buscamos el menor entero mayor que x en esa primera fila, lo reemplazamos por x y repetimos el proceso con ese nuevo número pero ahora en la siguiente fila y así sucesivamente hasta que se adjunte un elemento al final de una fila o simplemente se haga una nueva fila con el elemento removido de la última fila.

Ejemplo 10

Sean

1	1	2	3
2	3		
3			

 $x = 1$

Entonces insertar x en T dará como resultado:

1	1	2	3
2	3		
3			

 $\leftarrow 1$

1	1	1	3
2	3		
3			

 $\leftarrow 2$

1	1	1	3
2	2		
3			

 $\leftarrow 3$

1	1	1	3
2	2		
3	3		

En el programa desarrollado tenemos dos rutinas que calculan las particiones de un entero y dependiendo de las necesidades se invocan. Si se necesita sólo la información de cuántas y cómo son las tablas estándar usamos la rutina *Ordta(N)* la cual nos da esa información. Si por el contrario deseamos tener todas las tablas estándar de *N* ordenadas por el orden de la última letra y almacenadas en un vector para servir de parámetro a otra función usaremos la rutina *Ordta2(N)*. Los siguientes son los resultados de correr dichas rutinas.

Sym.*Ordta*(4);

Hay 1 tablas estándar

de la forma [4]

y éstas son

[[[1, 2, 3, 4]]]

Hay 3 tablas estándar

de la forma [3, 1]

y éstas son

[[[1, 3, 4], [2]], [[1, 2, 4], [3]], [[1, 2, 3], [4]]]

Hay 2 tablas estándar

de la forma [2, 2]

y éstas son

[[[1, 3], [2, 4]], [[1, 2], [3, 4]]]

Hay 3 tablas estándar

de la forma [2, 1, 1]

y éstas son

[[[1, 4], [2], [3]], [[1, 3], [2], [4]], [[1, 2], [3], [4]]]

Hay 1 tablas estándar

de la forma [1, 1, 1, 1]

y éstas son

[[[1], [2], [3], [4]]]

Sym.*Ordta2*(4);

[[[1, 2, 3, 4]], [[1, 3, 4], [2]], [[1, 2, 4], [3]],
[[1, 2, 3], [4]], [[1, 3], [2, 4]], [[1, 2], [3, 4]],
[[1, 4], [2], [3]], [[1, 3], [2], [4]],
[[1, 2], [3], [4]], [[1], [2], [3], [4]]]

Un ejemplo con el computador

Vamos a calcular las matrices de las representaciones irreducibles en la forma seminormal de Young de S_4 para el conjunto de generadores $\{(i, i+1)_{1 \leq i \leq 3}\}$. La rutina *matriz3(N)* retorna todas las matrices de las representaciones de S_N indexadas por las particiones de *N* para los elementos de la forma $(i, i+1)$ con $1 \leq i \leq n-1$. Estas matrices son suficientes para calcular la matriz de la representación de cualquier elemento de S_N .

El siguiente es el resultado para $N=4$ y la última línea da el tiempo que tarda el CPU en el cálculo. En este caso fue de 1 segundo, pero este tiempo depende del tipo de computador usado.

Time Sym.*Matriz3*(4);

La matriz asociada a (1, 2) en la representación irreducible indexada por la partición [4] de 4 es la matriz cuadrada de dimensión 1

Mat[

[1]

]

La matriz asociada a (1, 2) en la representación irreducible indexada por la partición [3, 1] de 4 es la matriz cuadrada de dimensión 3

Mat[

[-1, 0, 0],

[0, 1, 0],

[0, 0, 1]

]

La matriz asociada a (1, 2) en la representación irreducible indexada por la partición [2, 2] de 4 es la matriz cuadrada de dimensión 2

Mat[

[-1, 0],

[0, 1]

]

La matriz asociada a (1, 2) en la representación irreducible indexada por la partición [2, 1, 1] de 4 es la matriz cuadrada de dimensión 3

Mat[

[-1, 0, 0],

[0, -1, 0],

[0, 0, 1]

]

La matriz asociada a (1, 2) en la representación irreducible indexada por la partición [1, 1, 1, 1] de 4 es la matriz cuadrada de dimensión 1

Mat[

[-1]

]

La matriz asociada a (2, 3) en la representación irreducible indexada por la partición [4] de 4 es la matriz cuadrada de dimensión 1

Mat[

[1]

]

La matriz asociada a (2, 3) en la representación irreducible indexada por la partición [3, 1] de 4 es la matriz cuadrada de dimensión 3

Mat[

[1/2, 3/4, 0],

[1, -1/2, 0],

[0, 0, 1]

]

La matriz asociada a (2, 3) en la representación irreducible indexada por la partición [2, 2] de 4 es la matriz cuadrada de dimensión 2

Mat[

[1/2, 3/4],

[1, -1/2]

]

La matriz asociada a (2, 3) en la representación irreducible indexada por la partición [2, 1, 1] de 4 es la matriz cuadrada de dimensión 3

Mat[

[-1, 0, 0],

[0, 1/2, 3/4],

[0, 1, -1/2]

]

La matriz asociada a (2, 3) en la representación irreducible indexada por la partición [1, 1, 1, 1] de 4 es la matriz cuadrada de dimensión 1

Mat[

[-1]

]

La matriz asociada a (3, 4) en la representación irreducible indexada por la partición [4] de 4 es la matriz cuadrada de dimensión 1

Mat[

[1]

]

La matriz asociada a (3, 4) en la representación irreducible indexada por la partición [3, 1] de 4 es la matriz cuadrada de dimensión 3

Mat[

[1, 0, 0],

[0, 1/3, 8/9],

[0, 1, -1/3]

]

La matriz asociada a (3, 4) en la representación irreducible indexada por la partición [2, 2] de 4 es la matriz cuadrada de dimensión 2

Mat[

[-1, 0],

[0, 1]

]

La matriz asociada a (3, 4) en la representación irreducible indexada por la partición [2, 1, 1] de 4 es la matriz cuadrada de dimensión 3

Mat[

[1/3, 8/9, 0],

[1, -1/3, 0],

[0, 0, -1]

]

La matriz asociada a (3, 4) en la representación irreducible indexada por la partición [1, 1, 1, 1] de 4 es la matriz cuadrada de dimensión 1

Mat[

[-1]

]

Cpu time = 3.00, User time = 0

El sistema CoCoA

CoCoA es un sistema algebraico computacional escrito en C, fundamentalmente diseñado para realizar cálculos en álgebra conmutativa. CoCoA ha sido desarrollado en la Universidad de Génova, Italia, bajo la dirección de L. Robbiano. El núcleo de su sistema es una implementación del algoritmo de Buchberger para el cómputo de bases de

Gröbner para ideales y módulos sobre anillos de polinomios cuyos coeficientes están en un cuerpo, y una variación de éste para el cómputo de zizigias. El sistema interactúa con el usuario a través de un protocolo de bajo nivel (LLP) el cual es independiente de la arquitectura usada. Adicionalmente, ofrece muchas facilidades para el manejo de vectores y matrices, lo que lo hace una herramienta computacional adecuada para solucionar diversos problemas en matemáticas.

CoCoA está disponible en <http://cocoa.dima.unige.it>.

PROYECTOS POR DESARROLLAR

En un futuro esperamos contar con un paquete que le permita al usuario calcular dichas representaciones no sólo en la forma seminormal de Young sino también en otras bases y que además realice el cómputo y manejo de polinomios simétricos, polinomios de Schur, cálculo de bases para módulos irreducibles sobre el álgebra del grupo S_n y algunas otras funciones en álgebra combinatoria de las tablas de Young.

Otras familias de tablas de Young están relacionadas con las representaciones de grupos lineales y simpléticos. Por lo tanto, un programa similar a éste para tablas desplazadas y tablas estrictas sería de gran utilidad en el estudio de dichas representaciones.

El programa desarrollado para el cómputo de las representaciones irreducibles de S_n en la forma seminormal de Young está disponible para su uso o aplicación y se puede solicitar a fernando.novoa@javeriana.edu.co.

CONCLUSIONES

- El programa propuesto sobre el cómputo de la representación matricial de las representaciones irreducibles de los grupos de simetría, se implementó haciendo uso del programa CoCoA y realiza los cómputos deseados.

- Aunque la complejidad algorítmica de las rutinas no fue estudiada con detenimiento, se prevee que realizando mejoras en algunas rutinas, como por ejemplo, evitar el cálculo directo de las matrices de S_n para los elementos de la forma $(i, i+1)$ con $1 \leq i \leq N-2$, por medio de la regla de ramificación debe producir significativas mejoras en el tiempo de ejecución de la rutina matriz 3.
- Rutinas adicionales con polinomios y bases de módulos se han creado en una forma natural haciendo uso de las facilidades que presenta CoCoA y esto nos ha motivado a continuar ampliando nuestro programa.
- CoCoA ha provisto un ambiente computacional adecuado para este tipo de cálculos. Posee herramientas en álgebra de matrices, vectores, ideales, anillos y módulos que hacen natural el desarrollar y ejecutar programas para solucionar problemas y proyectos en matemáticas.
- Algunas de las rutinas como por ejemplo, la que ejecuta el algoritmo de insertar por filas para hallar las tablas estándar, lo mismo que la que calcula las particiones de un número entero positivo han sido adaptadas y mejoradas para hacer cómputos sobre cadenas de DNA tratando de establecer hipótesis sobre el comportamiento del número nula definido por Laredo y Acevedo en [8].

LITERATURA CITADA

- RAM A., *Robinson Schensted-Knuth insertion and characters of symmetric groups and Iwahori-Hecke algebras of type A*. Manuscrito.
- BERGERON F., *Algèbre et Combinatoire*. Preprint.
- CURTIS C., *Pioneers of the Representation Theory*. American Mathematical Society, 1999.

- FULTON W., *Young Tableaux*. London Mathematics Society, Student Texts 35, 1997.
- GOLDSCHMIDT D., *Group characters, Symmetric Functions and the Hecke Algebra*. American Mathematical Society, 1993.
- HAMERMESH M., *Group theory and its applications to physical problems*. Dover, 1962.
- KREUZES M. and L. ROBBIANO, *Computational Commutative Algebra I*. Springer-Verlag, 2000.
- LAREO L., O ACEVEDO, *Sequence Mapping in a tree dimensional space by a numeric method and some of its applications*. Preprint.
- MASLEN D. and D. ROCKMORE, *Generalized FFT's - A survey of Some Recent Results*. DIMACS Series in discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. 28, 1997, págs. 183-237.
- ROCKMORE D., *Some Applications of generalized FFT's*. DIMACS Series in discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. 28, 1997, págs. 329-369.
- SAGAN B., *The Symetric group. Representations, combinatorial algorithms and symmetric functions*. Springer-Verlag, 2000.
- SERRE J.P., *Linear Representations of Finite Groups*. American Mathematical Society, 1977.
- SIMON B., *Representations of Finite Groups and Compact Groups*. American Mathematical Society, 1996.
- THRALL R., *Young's Seminormal Representation of the Symmetric Group*, Duke Math J. 8 1941, págs. 611-624.
- VAN LOAN C., *Computational Framework for Fast Fourier Transforms*, SIAM, 1992.