UNIVERSITAS SCIENTIARUM
Revista de la Facultad de Ciencias
PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
Vol. 8, 13-15

LA REGLA DE CRAMER A PARTIR DEL PRODUCTO GENERALIZADO EN $\Re^n$

Moisés Aranda Silva[1], Reinaldo Núñez[2]

[1]Profesor Pontificia Universidad Javeriana y Universidad Sergio Arboleda,
e-mail: maranda@javeriana.edu.co
[2]Director de Matemáticas, Universidad Sergio Arboleda,
e-mail: reinaldo.nunez@usa.edu.co

Resumen

En el espacio vectorial euclídeo $\Re^3$ se definen el producto vectorial y el producto triple, a partir de la interpretación geométrica de estos productos, definimos el producto vectorial en los espacios vectoriales $\Re^2$, $\Re^4$ y $\Re^n$. Con el producto vectorial generalizado se presenta una deducción elemental de la regla de Cramer.

Palabras clave: Espacio vectorial, producto vectorial, regla de Cramer, determinante y sistemas de ecuaciones lineales.

Abstract

The vector product and the triple product are defined In the Euclidian Vector space $\Re^3$. Through the geometric interpretation of these products, we can define the product vector in the vector spaces, $\Re^2$, $\Re^4$ and $\Re^n$. With the generalized product vector, and elemental deduction of the Cramer's rule is presented.

Key words: Vector space, vector product, Cramer's rule, determinant, systems of linear equations.

En $\Re^3$ dados dos vectores B y C, el producto vectorial se define como una operación binaria donde el vector que se obtiene $B\times C$ es ortogonal a B y es ortogonal a C, y su norma, $\|B\times C\|$ es la medida (área) del paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores B y C. Si tenemos otro vector A, al producto punto o escalar $A \cdot (B \times C)$ se le denomina el producto "triple" y es igual al determinante de la matriz cuyos vectores filas o columnas son los vectores A, B y C. El valor absoluto de este determinante corresponde a la medida (volumen) del paralelepípedo cuyos lados adyacentes son los vectores A, B y C.

Estas ideas las podemos copiar en $\Re^2$, $\Re^4$ y en general en $\Re^n$. Veamos:

En $\Re^2$

Dados dos vectores A y B la medida (área) del paralelogramo determinado por A, B está dada por $\|A\|\,\|B\|$ senα, donde α el ángulo entre estos vectores; si construimos un vector X ortogonal a A y tal que la norma de X sea igual a la norma de A, la medida (área) del paralelogramo nos queda $\|X\|\,\|B\|\cos\alpha$, que es igual al producto punto entre X y B, para encontrar el vector X planteamos y resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}=0$$
$$\|X\|^2=\|A\|^2$$

Si $A=(a,b)$ el sistema tiene dos soluciones: $X=(b,-a)$ o $X=(-b,a)$. Imitando la definición nemotécnica del producto vectorial en $\Re^3$:

$$(a_1\ a_2\ a_3)\ \mathrm{x}\ (b_1\ b_2\ b_3)=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

en $\Re^2$ tenemos:

$$\mathrm{X}=\mathrm{xA}=\begin{vmatrix} i & j \\ a & b \end{vmatrix}=bi-aj=(b,-a)$$

Definición 1. La operación unaria de $\Re^2$ en $\Re^2$ definida como

$$\mathrm{x}(a,b)=\begin{vmatrix} i & j \\ a & b \end{vmatrix}=(b,-a)$$

la denominamos *Producto vectorial en* $\Re^2$.

Observe que $(\mathrm{x}\ A)\cdot B$ es el determinante de la matriz cuyas filas o columnas son los vectores A y B, y en valor absoluto corresponde a la medida (área) del paralelogramo.

En $\Re^4$

Dados A, B, C y D vectores de $\Re^4$, si queremos hallar la medida del ente geométrico cuyos lados adyacentes son los vectores A, B, C y D construimos un vector X de $\Re^4$ ortogonal a los vectores B, C y D y cuya norma sea la medida (volumen) del paralelepípedo cuyos lados adyacentes son los lados B, C y D. Para hallar el vector X resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\mathrm{B}\cdot\mathrm{X}=0$$
$$\mathrm{C}\cdot\mathrm{X}=0$$
$$\mathrm{D}\cdot\mathrm{X}=0$$
$$\|\mathrm{X}\|=|\det(\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})|,$$

resolviendo el sistema tenemos dos soluciones, una de ellas, expresadas nemotécnicamente es:

$$\mathrm{X}=\begin{vmatrix} i & j & k & w \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

la otra solución es

$$\mathrm{X}=-\begin{vmatrix} i & j & k & w \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

Definición 2. A la operación ternaria de $\Re^4$ x $\Re^4$ x $\Re^4$ en $\Re^4$ definida como

$$B\mathrm{x}C\mathrm{x}D=\begin{vmatrix} i & j & k & w \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

le denominamos *Producto vectorial en* $\Re^4$.

Observe que $\mathrm{A}\cdot(B\times C\times D)$ es el determinante de la matriz cuyas filas o columnas son los vectores A, B, C y D, y en valor absoluto corresponde a la medida de este ente geométrico en $\Re^4$.

Producto vectorial generalizado en $\Re^n$

Definición 3. Sean $A_1=(a_{11},a_{12},\ldots a_{1n}),\ldots,A_{n-1}=(a_{(n-1)1},a_{(n-1)2},\ldots a_{(n-1)n})$, $n-1$ vectores de $\Re^n$, el producto vectorial de $A_1,\ldots,A_{n-1}$ se define como el vector de $\Re^n$

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_{n-1}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}\det(X_k)\,i_k$$

Donde i_k es el k-ésimo vector coordenado de $\Re^n$ y X_k es la matriz cuadrada que se obtiene de suprimir la k-ésima columna de la matriz $(a_{ij})_{(n-1),n}$.

Nemotécnicamente, tenemos:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1} = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

al producto $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}$ lo notamos como $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1} = \mathop{\mathrm{X}}\limits_{k=1}^{n-1} A_k$

Algunas propiedades

1. Si $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ son $n - 1$ vectores de $\Re^n$ entonces $\mathop{\mathrm{X}}\limits_{k=1}^{n-1} A_k$ es un vector ortogonal a cada uno de los vectores $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, es decir, para cada $k = 1,2,\ldots, n-1$ se tiene que $A_k \cdot \mathop{\mathrm{X}}\limits_{k=1}^{n-1} A_k = 0$
2. $A_1 \times A_2 \times \cdots \times (\alpha A_i + \beta B_i) \times \cdots \times A_{n-1} =$ $A_1 \times A_2 \times \cdots \times \alpha A_i \times \cdots \times A_{n-1} +$ $A_1 \times A_2 \times \cdots \times \beta B_i \times \cdots \times A_{n-1}$
3. $\det(A_1, A_2, \ldots, A_n) = A_1 \cdot \mathop{\mathrm{X}}\limits_{k=2}^{n} A_k$, en lugar de A_1 Apodemos considerar cualquier $A_j,\ j = 1,\ldots,n$ y tenemos

   $$\det(A_1, A_2, \ldots, A_n) = (-1)^{1+j} A_j \cdot \mathop{\mathrm{X}}\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} A_k$$

Regla de Cramer y el Producto vectorial generalizado

Suponga que se tiene el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

que podemos representarlo vectorialmente de la siguiente manera

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n = B$$

donde $A_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})$ para $i = 1,2,\ldots,n$ y $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

Si multiplicamos escalarmente ambos miembros de la ecuación anterior por $\mathop{\mathrm{X}}\limits_{k=2}^{n} A_k$ obtenemos

$$(x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n) \cdot \mathop{\mathrm{X}}\limits_{k=2}^{n} A_k = B \cdot \mathop{\mathrm{X}}\limits_{k=2}^{n} A_k$$

$$x_1A_1 \cdot \mathop{\mathrm{X}}\limits_{k=2}^{n} A_k + x_2A_2 \cdot \mathop{\mathrm{X}}\limits_{k=2}^{n} A_k + \cdots + x_nA_n \cdot \mathop{\mathrm{X}}\limits_{k=2}^{n} A_k = B \cdot \mathop{\mathrm{X}}\limits_{k=2}^{n} A_k$$

Como $A_i \cdot \mathop{\mathrm{X}}\limits_{k=2}^{n} A_k = 0$ para todo i – 2,...,n, se tiene que $x_1A_1 \cdot \mathop{\mathrm{X}}\limits_{k=2}^{n} A_k = B \cdot \mathop{\mathrm{X}}\limits_{k=2}^{n} A_k$

Si $A_1 \cdot \mathop{\mathrm{X}}\limits_{k=2}^{n} A_k = \det(A_1, A_2, \ldots, A_n) \neq 0$, se tiene que

$$x_1 = \frac{B \cdot \mathop{\mathrm{X}}\limits_{k=2}^{n} A_k}{A_1 \cdot \mathop{\mathrm{X}}\limits_{k=2}^{n} A_k} = \frac{\det(B, A_2, \ldots, A_n)}{\det(A_1, A_2, \ldots. A_n)}$$

Observe que si se compara el numerador con el denominador, el numerador se obtiene remplazando en la expresión del denominador el vector columna B por el vector columna A_1. En general, para cualquier x_j aplicando el mismo procedimiento, es decir, el numerador se obtiene remplazando en el denominador el vector columna B por el vector columna A_J por lo tanto:

$$x_j = \frac{\det(A_1, A_2, \ldots, A_{j-1}, B, A_{j+1}, \ldots, A_n)}{\det(A_1, A_2, \ldots. A_n)}$$

que se conoce como **la regla de Cramer**.

LITERATURA CITADA

NÚÑEZ R. *A methodological strategy for teaching determinants and its properties with the aid of the computer*. The 12th Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics. San Francisco USA. 1999.

ARANDA M., NÚÑEZ R. *Álgebra lineal con aplicaciones*, Fondo de Publicaciones, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, D.C. 2001.