



OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE VARIANZAS Y COVARIANZAS A TRAVÉS DE LOS PRODUCTOS KRONECKER PARA MODELOS BALANCEADOS

Luz Marina Moya Moya

Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia

E-mail: luz.moya@javeriana.edu.co

RESUMEN

Se presenta una metodología basada en la teoría de productos Kronecker que facilita la construcción de la matriz de varianzas y covarianzas cuando se trabaja en diseños con estructura balanceada de datos. El método propuesto puede ser aplicado a modelos mixtos con efectos fijos o aleatorios con cualquier número de factores. La matriz de varianzas y covarianzas se construye bajo los supuestos usuales para modelos finitos o infinitos.

Palabras clave: Productos Kronecker, matriz de varianzas y covarianzas, diseños balanceados, modelos lineales.

ABSTRACT

We present a method for constructing variance and covariance matrices for balanced design using the Kronecker product. The method can be applied to fixed, random, or mixed models with any number of factors. The covariance matrices are constructed under the usual infinite and finite model assumptions.

Key words: Kronecker product, variance and covariance matrices, balanced designs, linear models.

INTRODUCCIÓN

Los modelos de efectos mixtos tienen gran importancia por sus múltiples aplicaciones especialmente en la determinación de parámetros genéticos e índices de selección de especies animales y/o vegetales¹.

En este tipo de modelo es importante determinar los mejores estimadores lineales insesgados (MELI), y los mejores predictores lineales (BLUP), con el objeto de realizar inferencia puntual y por intervalos, para tomar decisiones apropiadas.

Tanto los MELIS como los BLUP dependen del conocimiento de la estructura apro-

piada de la matriz de varianzas y covarianzas, así como de su inversa.

A través de los años algunos autores² se han dado a la tarea de presentar propuestas para hallar esta matriz. Muchos de estos trabajos se han concebido desde la perspectiva puramente teórica. Indudablemente la descripción más completa sobre el estudio de modelos de varianza se encuentra en Searle *et al.* (1972), en donde se abordan

1 PIANOLA, DANIEL. *los métodos estadísticos en el mejoramiento genético.*

2 HENDERSON, C.R, LAMOTTE y RAO, PATTERSON y THOMSON.

detalladamente varias propuestas por otros autores; desde su formulación, hasta detalles técnicos de cálculo y estimación.

El objetivo de este artículo es proveer un algoritmo basado en la teoría de productos Kronecker que se aplique directamente a diseños balanceados con cualquier número de factores fijos o aleatorios para construir la matriz de varianzas y covarianzas.

• **El modelo mixto general**

La formulación del modelo mixto general originalmente propuesta por Harley y Rao (1967) y aceptada como estándar en el campo de la estimación de las componentes de varianza es la siguiente:

$$\text{Sea el modelo } y = X\beta + ZU + e \quad (1)$$

Donde

- y : Vector de observaciones.
- β : Vector de parámetros desconocidos asociados a los efectos fijos.
- X : Matriz conocida asociada a los efectos fijos.
- U : Vector no observable asociado a los efectos aleatorios.
- Z : Usualmente es una matriz de incidencia asociada a efectos aleatorios en general observable.
- e : Vector no observable o vector de términos del error.

Como:

$$ZU = [Z_1 \ Z_2 \ \dots \ Z_s][U_1 \ U_2 \ \dots \ U_s]^T$$

Entonces:

$$y = X\beta + \sum_{i=1}^s Z_i U_i + e$$

y la varianza de y se define como:

$$\text{Var}(y) = \sum_{i=1}^s Z_i Z_i^T \sigma_i^2 + \sigma_e^2 I_N$$

Adicionalmente, el valor esperado de y es:

$$E(y) = X\beta \quad \text{y} \quad E(y|U) = X\beta + ZU$$

por lo cual $e = y - E(y|U)$. A e se le atribuye la estructura usual de varianza-covarianza de un componente de error, esto es:

$$E(e) = 0 \quad \text{y} \quad \text{Var}(e) = \sigma_e^2 I_N$$

Tomamos el siguiente modelo por ejemplo, si:

$$y = \mu + \tau_{i_1}^1 + \tau_{i_2}^2 + e, \quad i_1 = 1, \dots, n_1, \quad i_2 = 1, \dots, n_2$$

con n_1 niveles del factor aleatorio τ^1 y n_2 niveles del factor aleatorio τ^2 .

Entonces la estructura del modelo (1) para este ejemplo será: $X = 1_{n_1 n_2}$ este vector columna es de tamaño $n_1 n_2 \times 1$ con entradas de unos, μ el efecto medio general, $\mu = \beta$.

En el modelo (1) $U = \begin{bmatrix} \tau^1 \\ \tau^2 \end{bmatrix}$

$$\text{con } \tau^1 = [\tau_1^1, \tau_2^1, \dots, \tau_{n_1}^1]^T, \quad \tau^2 = [\tau_1^2, \tau_2^2, \dots, \tau_{n_2}^2]^T$$

$$\text{y } Z = \begin{bmatrix} I_{n_1} \otimes 1_{n_2} & ; & 1_{n_1} \otimes I_{n_2} \end{bmatrix}$$

donde $Z_1 = I_{n_1} \otimes 1_{n_2}$ y $Z_2 = 1_{n_1} \otimes I_{n_2}$

y asumimos que:

$$\tau^1 \approx N(0, \sigma_{\tau^1}^2) \quad \text{y} \quad \tau^2 \approx N(0, \sigma_{\tau^2}^2),^4$$

³ A^T es la transpuesta de una matriz, es decir las filas se intercambian por las columnas.

⁴ $\tau^2 \approx N(0, \sigma_{\tau^2}^2)$ tiene distribución normal con media cero y varianza $\sigma_{\tau^2}^2$.



Por lo tanto, la varianza de y utilizando la fórmula (2) es

$$\text{Var}(y) = \sum_{i=1}^{n_1} Z_i Z_i^T \sigma_{\tau_i}^2 + \sigma_e^2 I_N = \sigma_e^2 I_N + (I_{n_1} \otimes J_{n_2}) \sigma_{\tau_1}^2 + (J_{n_1} \otimes I_{n_2}) \sigma_{\tau_2}^2.$$

• **Productos Kronecker**

El producto Kronecker de dos matrices $A_{p \times q}$ y $B_{m \times n}$ se define como:

$$A_{p \times q} \otimes B_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1q}B \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1}B & \dots & a_{pq}B \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ el producto}$$

Kronecker es:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y tenemos las siguientes propiedades:

- $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$.
- Para X y Y vectores:
 $X^T \otimes Y = YX^T = Y \otimes X^T$.
- Sea λ un escalar:
 $\lambda \otimes A = \lambda A = A \otimes \lambda = A\lambda$.
- En matrices particionadas:
 $[A_1 A_2] \otimes B = [A_1 \otimes B; A_2 \otimes B]$
 $A \otimes [B_1 B_2] \neq [A \otimes B_1; A \otimes B_2]$

5. Para A y B matrices cuadradas no singulares

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

6. Sea D_K una matriz diagonal de orden K con elementos d_i :

$$D_k \otimes A = d_1 A \otimes d_2 A \otimes \dots \otimes d_k A$$

$$A_{p \times k} \otimes D_k = (A \otimes I_k)(I_q \otimes D)^5 \\ = (A \otimes I)(\oplus_{i=1}^q D)$$

7. $\lambda(A \otimes B) = (\lambda A) \otimes B = A \otimes (\lambda B)$ para todo escalar λ .

8. $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$

9. $(A \otimes B)(F \otimes G) = (AF) \otimes (BG)$

10. $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$

11. $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$

MATERIALES Y MÉTODOS

Los modelos de componentes de varianza son modelos lineales que incorporan términos aleatorios, lo cual genera una matriz de varianzas y covarianzas.

Esta matriz V como lo vimos en los modelos mixtos tiene la estructura

$$V = \sum_{i=1}^s Z_i Z_i^T \sigma_i^2 \text{ donde } Z_i Z_i^T \text{ puede ser escri-$$

ta en términos de productos Kronecker, de matrices I_s y J_s ⁶.

De acuerdo a esta estructura el algoritmo de la matriz V es:

Sea P el número de subíndices asociados a la variable respuesta, los cuales dependen

5 \oplus representa la suma directa. $A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$

6 I_s Representa la matriz identidad de tamaño $S \times S$, y J_s la matriz de unos con tamaño $S \times S$.

de los efectos e interacciones fijos y aleatorios del modelo. Se tiene entonces 2^P particiones de productos Kronecker con matrices I_s y J_s , las cuales son resumidas por la expresión.

$$\Delta_{1 \times 2^P}^0 = \begin{bmatrix} I_{n_1} \otimes I_{n_2} \otimes \dots \otimes I_{n_m} \\ I_{n_1} \otimes I_{n_2} \otimes \dots \otimes J_{n_m} \\ \vdots \\ J_{n_1} \otimes J_{n_2} \otimes \dots \otimes J_{n_{m-1}} \otimes J_{n_m} \\ J_{n_1} \otimes J_{n_2} \otimes \dots \otimes J_{n_m} \end{bmatrix}^T$$

Para ejemplizar el algoritmo tomamos un diseño factorial a dos vías jerárquico, cuyo modelo tiene la forma:

$$y_{i_1 i_2 i_3} = \mu + \tau_{i_1}^1 + \tau_{i_2}^2 + (\tau^1 \tau^2)_{i_1 i_2} + e_{i_1 i_2 i_3}$$

$$i_1 = 1, 2, \dots, n_1, i_2 = 1, 2, \dots, n_2, i_3 = 1, 2, \dots, n_3$$

en donde μ es el efecto medio general, $\tau_{i_1}^1$ es el efecto del i^1 -ésimo nivel del factor reglón, $\tau_{i_2}^2$ es el efecto del i^2 -ésimo nivel del factor columna, $(\tau^1 \tau^2)_{i_1 i_2}$ es el efecto de la interacción entre $\tau_{i_1}^1$ y $\tau_{i_2}^2$, $e_{i_1 i_2 i_3}$ es el componente del error aleatorio y

$$\tau_{i_1}^1 \approx N(0, \sigma_{\tau^1}^2), \quad \tau_{i_2}^2 \approx N(0, \sigma_{\tau^2}^2),$$

$$(\tau^1 \tau^2)_{i_1 i_2} \approx N(0, \sigma_{\tau^1 \tau^2}^2), \quad e \approx N(0, \sigma_e^2).$$

En este modelo $P=3$ corresponde a la cantidad de subíndices presentes en el modelo, y por lo tanto Δ^0 es:

$$\Delta^0 = \begin{bmatrix} I_{n_1 n_2 n_3} \\ I_{n_1 n_2} \otimes J_{n_3} \\ I_{n_1} \otimes J_{n_2} \otimes I_{n_3} \\ J_{n_1} \otimes I_{n_2 n_3} \\ J_{n_1 n_2} \otimes I_{n_3} \\ J_{n_1} \otimes I_{n_2} \otimes J_{n_3} \\ I_{n_1} \otimes J_{n_2 n_3} \\ J_{n_1 n_2 n_3} \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

definiendo la función indicadora

$$\delta_{\text{efecto}}^2 = \begin{cases} 1 & \text{si aparece } J_s \\ 0 & \text{si aparece } I_s \end{cases}$$

se puede describir (3) como

$$\Delta = [00\dots 0; 00\dots 1; \dots; 111\dots 0; 111\dots 1]$$

Para el ejemplo anterior

$$\Delta = [000; 001; 010; 100; 110; 101; 011; 111]$$

Caracterizado el vector Δ se construye el vector asociado con las componentes de varianza θ^0 , según el siguiente criterio:

Las componentes del vector fila θ^0 son σ_a^2 si existe una relación directa entre el subíndice del efecto y la posición del cero en Δ , es decir para nuestro ejemplo la primera componente de Δ es 000 entonces el subíndice del efecto que tiene tres componentes es $e_{i_1 i_2 i_3}$ por lo tanto la a se remplaza por e y la varianza que tomamos para esa primera posición es σ_e^2 , en caso de que no haya ninguna relación se coloca cero.

Entonces

$$\theta^0 = [\sigma_e^2 \quad \sigma_{\tau^1 \tau^2}^2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \sigma_{\tau^1}^2 \quad \sigma_{\tau^2}^2 \quad 0] \quad (4)$$

Con esto tenemos V como $V = \Delta^0 (\theta^0)^T$, reemplazando Δ^0 , θ^0 , y multiplicando obtenemos:

$$V = I_{n_1 n_2 n_3} \sigma_e^2 + I_{n_1 n_2} \otimes J_{n_3} \sigma_{\tau^1 \tau^2}^2 + J_{n_1} \otimes I_{n_2} \otimes J_{n_3} \sigma_{\tau^1}^2 + J_{n_1} \otimes J_{n_2 n_3} \sigma_{\tau^2}^2$$

Teniendo en cuenta el procedimiento anterior podemos deducir la fórmula general de V para diseños jerárquicos balanceados.

Definimos el modelo general de la forma:

$$y_{i_1 i_2 \dots i_n} = \mu + \tau_{i_1}^1 + \tau_{i_2}^2 + \tau_{i_3}^3 + \dots + \tau_{i_{n-1}}^{n-1} + (\tau^1 \tau^2)_{i_1 i_2} + (\tau^1 \tau^3)_{i_1 i_3} + \dots + (\tau^1 \tau^{n-1})_{i_1 i_{n-1}} + (\tau^2 \tau^3)_{i_2 i_3} + \dots + (\tau^{n-2} \tau^{n-1})_{i_{n-2} i_{n-1}} + (\tau^1 \tau^2 \tau^3)_{i_1 i_2 i_3} + (\tau^1 \tau^2 \tau^4)_{i_1 i_2 i_4} + \dots + (\tau^{n-4} \tau^{n-3} \tau^{n-2} \tau^{n-1})_{i_{n-4} i_{n-3} i_{n-2} i_{n-1}} + \dots + (\tau^1 \tau^2 \dots \tau^{n-1})_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} + e_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

donde

$$i_1 = 1, 2, \dots, n_1; i_2 = 1, 2, \dots, n_2; \dots; i_{n-1} = 1, 2, \dots, n_{n-1}; i_n = 1, 2, \dots, n_n$$

$$\tau_{i_1}^1 \approx N(0, \sigma_{\tau^1}^2), \quad \tau_{i_2}^2 \approx N(0, \sigma_{\tau^2}^2), \dots, (\tau^1 \tau^2)_{i_1 i_2} \approx N(0, \sigma_{\tau^1 \tau^2}^2), \dots$$

$$(\tau^1 \tau^2 \dots \tau^{n-1})_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} \approx N(0, \sigma_{\tau^1 \tau^2 \dots \tau^{n-1}}^2), e \approx N(0, \sigma_e^2)$$

Si $P=n$ corresponde a la cantidad de subíndices presentes en el modelo podemos ver que el número de elementos correspondientes es 2^n y se tiene que como:

$$\Delta^0 = \begin{bmatrix} I_{n_1 n_2 \dots n_n} \\ I_{n_1 n_2 \dots n_{n-1}} \otimes J_{n_n} \\ I_{n_1 \dots n_{n-2}} \otimes J_{n_{n-1}} \otimes I_{n_n} \\ \vdots \\ I_{n_1 n_2 \dots n_{n-2}} \otimes J_{n_{n-1} n_n} \\ I_{n_1 n_2 \dots n_{n-3}} \otimes J_{n_{n-2}} \otimes I_{n_{n-1}} \otimes J_{n_n} \\ \vdots \\ J_{n_1 n_2 \dots n_{n-1}} \otimes I_{n_n} \\ J_{n_1 n_2 \dots n_n} \end{bmatrix}^T$$

$$\theta^0 = [\sigma_e^2; \sigma_{\tau^1}^2; \sigma_{\tau^2}^2; \dots; \sigma_{\tau^{n-1}}^2; \sigma_{\tau^1 \tau^2}^2; \sigma_{\tau^1 \tau^3}^2; \dots; \sigma_{\tau^1 \tau^2 \dots \tau^{n-1}}^2; \sigma_{\tau^2 \tau^3}^2; \dots; \sigma_{\tau^{n-2} \tau^{n-1}}^2; 0; 0]$$

Sustituyendo en $V = \Delta^0 (\theta^0)^T$, obtenemos la fórmula general de la matriz de varianzas y covarianzas para diseños jerárquicos balanceados como.

$$V = \sigma_e^2 I_{n_1 n_2 \dots n_n} + \sigma_{\tau^1}^2 I_{n_1} \otimes J_{n_2 \dots n_n} + \dots + \sigma_{\tau^{n-1}}^2 J_{n_1 n_2 \dots n_{n-1}} \otimes I_{n_n} + \sum_{k=2}^{n-1} \sigma_{\tau^k}^2 (I_{n_1} \otimes J_{n_2 n_3 \dots n_{k-1}} \otimes I_{n_k} \otimes J_{n_{k+1} \dots n_n} \text{ si } k = \tau^k, k_1 = 2, \dots, n) + \dots + \sigma_{\tau^{n-1}}^2 J_{n_1 n_2 \dots n_{n-2}} \otimes I_{n_{n-1} n_n} + \dots + \sigma_{\tau^1 \tau^2 \dots \tau^{n-1}}^2 I_{n_1 n_2 \dots n_{n-1}} \otimes J_{n_n}$$

Veamos ahora el siguiente ejemplo:

Se toma un experimento que consiste en determinar a largo plazo el contenido de calcio promedio en las hojas de un cultivo

de nabo. Se tomaron cuatro plantas de nabo de cada parcela en forma aleatoria, luego se seleccionaron tres hojas al azar de cada planta y de cada hoja se tomaron dos muestras de 100 mg, en las que se determinó el contenido de calcio por métodos microquímicos.

TABLA 1

Planta, i_1 $i_1=1, \dots, 4$	Hoja, i_2 $i_2=1, 2, 3$	Determinaciones		$y_{i_1 i_2}$	y_{i_1}	$y_{..}$
		$y_{i_1 i_2}$	$y_{i_1 i_2}$			
1	1	3.28	3.09	6.37	19.05	72.29
	2	3.52	3.48	7.00		
	3	2.88	2.80	5.68		
2	1	2.46	2.44	4.90	13.07	72.29
	2	1.87	1.92	3.79		
	3	2.19	2.19	4.38		
3	1	2.77	2.66	5.43	17.71	72.29
	2	3.74	3.44	7.18		
	3	2.55	2.55	5.10		
4	1	3.78	3.87	7.65	22.46	72.29
	2	4.07	4.12	8.19		
	3	3.31	3.31	6.62		

El modelo utilizado en el ejemplo es

$$y_{i_1 i_2 i_3} = \mu + \tau_{i_1}^2 + \tau_{(i_1) i_2}^1 + e_{(i_1 i_2) i_3},$$

$$i_1 = 1, \dots, 4, \quad i_2 = 1, 2, 3, \quad i_3 = 1, 2.$$

Donde μ es la media general, τ^1 es el efecto de la i_1 -ésima planta, τ^2 es el efecto de la i_2 -ésima hoja en la i_1 -ésima planta y la e es el error aleatorio, y además se supone que:

$$\tau^1 \approx N(0, \sigma_{\tau^1}^2), \quad \tau^2 \approx N(0, \sigma_{\tau^2}^2), \quad e \approx N(0, \sigma_e^2)$$

En primer lugar hallamos Δ^0 y θ^0 para hallar la matriz de varianzas y covarianzas para este modelo:

$$\Delta^0 = \begin{bmatrix} I_{24} \\ I_4 \otimes I_3 \otimes J_2 \\ I_4 \otimes J_3 \otimes I_2 \\ J_4 \otimes I_3 \otimes I_2 \\ J_4 \otimes J_3 \otimes I_2 \\ J_4 \otimes I_3 \otimes J_2 \\ I_4 \otimes J_3 \otimes J_2 \\ J_{24} \end{bmatrix}^T \quad \text{y} \quad \theta^0 = [\sigma_e^2; 0; 0; 0; \sigma_{\tau^1}^2; \sigma_{\tau^2}^2; 0; 0]$$

de donde tenemos:

$$V = \begin{bmatrix} I_4 \otimes I_3 \otimes I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_4 \otimes I_3 \otimes J_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_4 \otimes J_3 \otimes I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_4 \otimes I_3 \otimes I_2 & 0 & 0 & \sigma_{\tau^2}^2 & 0 & 0 & 0 \\ J_4 \otimes J_3 \otimes I_2 & 0 & 0 & \sigma_{\tau^2}^2 & 0 & 0 & 0 \\ J_4 \otimes I_3 \otimes J_2 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\tau^2}^2 & 0 & 0 \\ I_4 \otimes J_3 \otimes J_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\tau^2}^2 & 0 \\ J_4 \otimes J_3 \otimes J_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_e^2 \end{bmatrix}$$

$$= I_{24} \sigma_e^2 + \sigma_{\tau^2}^2 I_4 \otimes J_3 \otimes J_2 + \sigma_{\tau^2}^2 J_4 \otimes I_3 \otimes J_2.$$

Para predecir el valor promedio utilizamos el mejor predictor lineal insesgado:

$$BLUP(x\beta) = DZ^T V^{-1} \left(y - \left(x(x^T V^{-1} x)^{-1} x^T V^{-1} y \right) \right)$$

Donde D es una matriz diagonal de tamaño 16×16 que contiene todas las varianzas $\sigma_{\tau^2}^2, \sigma_{\tau^2}^2$ del modelo en su diagonal principal y los elementos por fuera de la diagonal son ceros.

Efectuando los productos y hallando la inversa de V se obtiene que:

$$BLUP(x\beta) = 3,0120833$$

el valor promedio que se predice es de 3,0120833 calcio en las hojas de nabo.

CONCLUSIONES

1. Esta metodología sirve para agilizar el desarrollo y solución de algunos problemas de aplicación en la determinación de parámetros genéticos e índices de selección de especies animales y / o vegetales que requieren de la matriz de varianzas y covarianzas.
2. Facilita la inferencia puntual donde se necesita la matriz de varianzas y covarianzas.
3. El algoritmo para la obtención de la matriz de varianzas y covarianzas requiere

de P , el número de subíndices asociados a la variable respuesta. Se tiene entonces 2^P particiones de productos Kronecker con matrices I_s y J_s , de donde obtenemos Δ^0 . Utilizando la función indicadora podemos caracterizar Δ , para poder construir el vector asociado con las componentes de varianza θ^0 , con esto tenemos V como $V = \Delta^0 (\theta^0)^T$, y reemplazando Δ^0 , θ^0 obtenemos la matriz de varianzas y covarianzas para modelos balanceados con n vías de clasificación.

LITERATURA CITADA

GRAYBILL, F.A. *ON QUADRATIC ESTIMATES OF VARIANCE COMPONENTS*, ANN. MATH. STAT. 1954, 25: 367-372.

LÓPEZ, L.A., & IEMMA, A. *ON THE ESTIMATION OF VARIANCE COMPONENTS*, BIOMETRICS. 1973, 29: 311-330.

LÓPEZ, L.A. CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA DE COMPONENTES DE VARIANZAS EN ESTRUCTURAS BALANCEADAS Y DESBALANCEADAS, *REVISTA COLOMBIANA DE ESTADÍSTICA*, SANTA FE DE BOGOTÁ, 19-20, 1989, 113-124.

SEARLE, S.R. *ANOTHER LOOK AT HENDERSON'S METHODS OF ESTIMATING VARIANCE COMPONENTS*, BIOMETRICS, 1968, 24: 749-789.

SEARLE, S.R. *LINEAR MODELS*, JOHN. WILEY AND SONS. NEW YORK, N.Y. 1971.

SEARLE, S.R., CASELLA, G. & MCCULLOCH, C.E. *VARIANCE COMPONENTS*, JOHN. WILEY AND SONS. NEW YORK, N.Y. 1992.

Recibido: 20-05-2003

Aceptado: 6-08-2003