



GENERADORES PARA IDEALES ASOCIADOS A DIFERENCIA DE TABLAS DE FERRERS Y CÁMPUTO DE LOS GENERADORES PARA IDEALES DE FERRERS

F. Novoa

*Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias., Pontificia Universidad Javeriana,
Cra 7 No. 43-82 Bogota , Colombia
fernando.novoa@javeriana.edu.co*

Resumen

Recientemente (Barile, 2006) se reportó un método combinatorio para identificar ciertos generadores de los ideales de Ferrers. Se observa que su procedimiento se puede implementar en un computador con un sistema algebraico computacional. En este reporte se presenta la implementación en CoCoA de un programa que permite calcular generadores para este tipo de ideales, implicando el cómputo inmediato del rango aritmético del ideal. También se presenta una extensión de estos resultados para ideales asociados a la diferencia de tablas de Ferrers.

Palabras clave: ideal, tabla de Ferrers, radical, generadores, rango aritmético, diferencia de tablas de Ferrers.

Abstract

Recently (Barile, 2006) it was reported a combinatorial method for identifying generators of Ferrers ideals. This process can be implemented in a computer using an algebraic computer system. This paper shows how to do that using CoCoA. In this way, we can compute the arithmetic rank for a Ferrers ideal. We also present an extension of these results for generators of ideals associated to skew tableaux.

Key words: ideal, Ferrers tableaux, radical, generators, arithmetic rank, skew tableaux.

INTRODUCCIÓN

Sea $R=K[x_1, \dots, x_n]$ el anillo de polinomios sobre un campo K de característica 0. Por el teorema de la base de Hilbert sabemos que cualquier ideal I de R es finitamente generado, es decir, existen $f_1, \dots, f_j \in R$, tal que, $I = \langle f_1, \dots, f_j \rangle$.

Por otra parte, las tablas de Ferrers son elementos combinatorios de gran importancia

en la teoría combinatoria de representaciones de grupos de simetría, geometría combinatoria, variedades de Schubert, etc. Usualmente se identifican las tablas de Ferrers por la forma de la partición que las determina.

Una partición es una sucesión no creciente de enteros positivos $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > 0$, la cual se grafica por medio de un arreglo de cajas alineadas a la izquierda en donde la fila

tiene λ_i cajas. De esta forma, la partición $G = (4,2,2,1)$ se identifica con la tabla que se muestra en la figura 1.

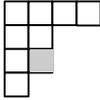


FIGURA 1. Tabla de Ferrers asociada a la partición $(4,2,2,1)$

Una caja de la tabla se identifica por la fila y columna en la cual se encuentra. La caja sombreada en la figura 1 es la $(3,2)$.

El ideal de Ferrers $I(G)$ asociado a una tabla G es generado por los monomios $x_p y_q$ tal que $(p, q) \in G$, (Barile, 2006).

Ejemplo 1. Sea $G=(4,2,2,1)$. Entonces

$$I(G) = \langle x_1 y_1, x_1 y_2, x_1 y_3, x_1 y_4, x_2 y_1, x_2 y_2, x_3 y_1, x_3 y_2, x_4 y_1 \rangle$$

Con la ayuda de algún sistema algebraico computacional como CoCoA, Macaulay o Singular, podemos hacer algunos cálculos para ver algunas propiedades de estos ideales. Por ejemplo, con CoCoA verificamos que el ideal del ejemplo anterior es radical:

```
Use Q[x[1..10],y[1..10]];— anillo de
polinomios en las variables x[1],..., x[10] y
y[1],..., y[10]

IG:=Ideal(x[1]y[1],x[1]y[2],x[1]y[3],x[1]
y[4],x[2]y[1],x[2]y[2])

,x[3]y[1],x[3]y[2],x[4]y[1]);—definición
del ideal de Ferrer asociado a (4,2,2,1)

R:=Radical(IG);—computo del radical de I(G)

R=IG;—verificación I(G) es ideal radical

TRUE
```

Recordemos que el radical de un ideal I está definido como el ideal

$$\sqrt{I} = \{f \in R : f^n \in I, \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}^+\}$$

En (Barile, 2006) se usa un resultado de (Schmitt, Vogel, 1979) véase lema 5, más adelante, para demostrar que $I(G)$ satisface

$$I(G) = \sqrt{\langle r_1, \dots, r_\mu \rangle},$$

donde, $\mu = \max\{\lambda_i + i - 1\}$, y la forma cerrada de los elementos esta dada por las sumas

$$r_i = \sum_{x_p y_q \in I(G), p+q=i+1} x_p y_q. \quad (1)$$

Con esta forma cerrada de los generadores del radical, es evidente la necesidad de programar estas funciones y verificar su efectividad. Antes de ver la programación veamos otras conclusiones que se pueden obtener de este resultado. En (Barile, 2006) se prueba que el rango aritmético de $I(G)$ denotado por $ara I(G)$ es $\mu = \max\{\lambda_i + i - 1\}$, en donde, recordemos que el rango aritmético de un ideal I es dado como el menor entero s tal que

$$\sqrt{I} = \sqrt{\langle f_1, \dots, f_s \rangle}$$

Una aplicación de esta fórmula es el cómputo inmediato de la dimensión de cohomología local de I , lo mismo que la dimensión proyectiva del ideal I . Para algunos detalles, véase (Corso y Naguel, 2006).

Ejemplo 2. Para la partición $G = (4,2,2,1)$ su rango aritmético es

```
ARA1([4,2,2,1]);

4
```

Por tanto, debemos calcular los cuatro generadores r_1, \dots, r_4 como se definieron en la ecuación (1):

```
ARA4([4,2,2,1]);
[x[1]y[1], x[2]y[1] + x[1]y[2], x[3]y[1]
+ x[2]y[2] + x[1]y[3], x[4]y[1] +
x[3]y[2] + x[1]y[4]]
```

De esta forma obtenemos que $r_1 = x_1y_1$,
 $r_2 = x_1y_2 + x_2y_1$, $r_3 = x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1r_3$,
 $r_4 = x_1y_4 + x_3y_2 + x_4y_1$

En la siguiente secuencia de comandos se verifica la relación

$$I(G) = \sqrt{\langle r_1, \dots, r_4 \rangle}$$

```
W:=Ideal(ARA4([4,2,2,1]));—ideal generado por los  $r_i$ 
T:=Radical(W);—ideal radical de los  $r_i$ 
I:=ARA2([4,2,2,1]);—ideal I(G) donde G es [4,2,2,1]
I=T;—verificación
TRUE
```

Descripción combinatoria de los generadores

La interpretación combinatoria para la generación de los elementos r_i es la siguiente. Observe el diagrama de la partición y tome las “diagonales ascendentes” de éste y observe que los elementos r_i están dados por la suma de los monomios correspondientes a las cajas del diagrama en cada una de las diagonales.

El programa que se presenta es realizado en CoCoA, sistema en el cual ya se han implementado otros programas para cálculo combinatorio de permutaciones, particiones, representaciones de grupos de simetría y polinomios en varias variables. El programa principal consta de cuatro funciones, las cuales combinadas proveen los

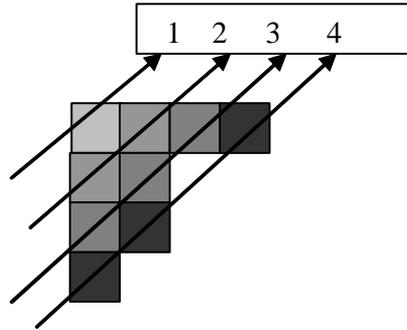


FIGURA 2. Diagonales ascendentes en el diagrama de la tabla asociada a la partición (4,2,2,1).

generadores del ideal de Ferrers lo mismo que la dimensión del rango aritmético del ideal.

Las funciones implementadas tienen como argumento de entrada la partición G asociada al ideal de Ferrers. La función **ARA1(G)** calcula la dimensión aritmética calculando $\mu = \max\{\lambda_i + i - 1\}$, en donde $G = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. **ARA2(P)** calcula el ideal de Ferrers asociado a G , para luego compararlo con el radical del ideal que se obtiene en **ARA4(G)**, el cual es generado por los elementos descritos en la ecuación (1). **ARA3(G)** es una función adicional que se usa en la descomposición primaria de $I(G)$ y que para este caso no tiene mayor trascendencia.

Adicionalmente, cabe destacar que con el uso de este programa se encontró un pequeño error en el último generador del radical del ejemplo 1, en (Barile 2006), el cual le fue reportado a su autora, corrigiéndolo en su siguiente versión arXiv:math.AC/0606353 v2 de junio 30 2006.

Generadores para ideales asociados a diferencias de tablas de Ferrers

Teniendo el resultado anterior para tablas de Ferrers, una pregunta natural se tiene para diferencias de tablas de Ferrers.

Recordando que si $G \hat{\subseteq} G'$ son dos tablas de Ferrers donde $\lambda_i \leq \lambda'_i$, la tabla diferencia G/G' (skew tableau) se obtiene de la tabla de G al suprimirle las cajas de G' .

Ejemplo 3. Si $G=(10,9,9,5,5,5,4,4,2,2)$ y $G'=(9,6,6,5,5,2,2,2)$ entonces la tabla diferencia tiene la forma que se muestra en la figura 3.

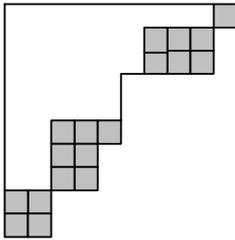


FIGURA 3. Las cajas marcadas forman la tabla diferencia G/G'

En forma similar a como se definió el ideal $I(G)$ se define $I(G/G')$ como el ideal generado por los monomios $x_p y_q$ en donde $(p,q) \in G/G'$.

Ejemplo 4. Para $G=(10,9,9,5,5,5,4,4,2,2)$ y $G'=(9,6,6,5,5,2,2,2)$ y el ideal $I(G/G')$ está generado por los monomios

$$x_1 y_{10}, x_2 y_7, x_2 y_8, x_2 y_9, x_3 y_7, x_3 y_8, x_3 y_9, x_6 y_3, x_6 y_4, x_6 y_5, x_7 y_3, x_7 y_4, x_8 y_3, x_8 y_4, x_9 y_1, x_9 y_2, x_{10} y_1, x_{10} y_2$$

Para el próximo resultado se necesita el siguiente resultado de (Schimitt y Vogel, 1979) usado en (Barile, 2006) y que se sirve para establecer un resultado similar al de la ecuación (1) para los generadores del ideal $I(G/G')$.

Lema 5. Sea R un anillo conmutativo y P un conjunto finito de elementos de R . Sean P_1, \dots, P_r subconjuntos de P tales que:

- $\bigcup_{i=1}^r P_i = P$;

- La cardinalidad de P_i es 1;
- Si p y p' son elementos distintos de $P_i, 1 < i \leq r$, existe $i', 1 \leq i' < i$, y un elemento en $P_{i'}$ que divide a pp' ;

entonces, $\sqrt{\langle P \rangle} = \sqrt{\langle q_1, \dots, q_r \rangle}$ en donde, $q_i = \sum_{p \in P_i} p^{e(p)}$ y $e(p) \geq 1$ y son enteros arbitrarios.

Para diferencia de tablas, cambiamos la forma de los conjuntos P_i : en vez de ser diagonales “ascendentes” como en (Barile, 2006), utilizaremos diagonales con diferencias constantes. De esta forma las cajas (p,q) y (p',q') están en la misma diagonal si $p-q = p'-q'$.

Ejemplo 6. Si $G=(10,9,9,5,5,5,4,4,2,2)$ y $G'=(9,6,6,5,5,2,2,2)$ entonces las diagonales con diferencias constantes se muestran en la siguiente figura,

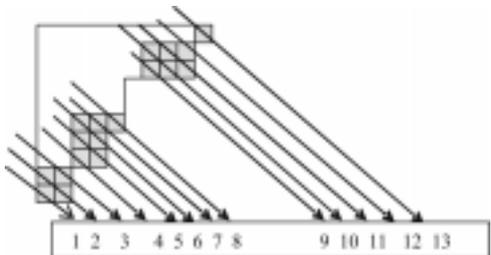


FIGURA 4. Diagonales en la tabla dadas por diferencias constantes

y las enumeraremos de abajo hacia arriba. De esta forma la primera es la que tiene la diferencia constante más grande.

$P_1 = \{x_{10} y_1\}$, la diferencia de los subíndices es 9

$P_2 = \{x_9 y_1, x_{10} y_2\}$, la diferencia de los subíndices es 8

$P_3 = \{x_9 y_2\}$, la diferencia de los subíndices es 7

Note que no hay cajas en el diagrama con diferencia de subíndices igual a 6.

$P_4 = \{x_8y_3\}$, la diferencia de los subíndices es 5

$P_5 = \{x_7y_3, x_8y_4\}$, la diferencia de los subíndices es 4

Continuando de esta forma, finalmente se tiene,

$P_{13} = \{x_1y_{10}\}$, la diferencia de subíndices es -9.

Es inmediato verificar que se cumplen con las condiciones del lema 5. En efecto:

1. Claramente estas diagonales cubren el diagrama de la tabla G/G' .
2. Observe también que si (p, q) y (p', q') están en G/G' y $x_p y_q, x_{p'} y_{q'} \in P_i$ para algún i , entonces $p - q = p' - q' = k$. Podemos suponer que $p < p'$ y $q < q'$. Entonces la caja con índice (p', q) está en G/G' . De otra forma, $\lambda'_{p'} > q$, pero como $\lambda'_p \geq \lambda'_{p'} > q$, entonces la caja $(p, q) \notin G/G'$, lo cual es imposible.
3. Por otra parte, $x_p y_q \in P_j$ para algún $j < i$, por la forma como se han enumerado las diagonales y $x_p y_q$ divide a $x_{p'} y_{q'} x_p y_q$.

Por tanto, se tiene el siguiente teorema cuya demostración se deriva de las observaciones anteriores.

Teorema 7. Sea $I(G/G')$ el ideal de Ferrers asociado a la tabla G/G' . Entonces:

1. $ara(I)$ está acotado superiormente por el número de diagonales con diferencia constante contenidas en G/G' .
2. $\sqrt{I} = \sqrt{(q_1, \dots, q_r)}$, donde r es el número de diagonales contenidas en G/G' y los q_i tienen la forma del lema 5.

Observe que $I = I(G/G')$ es ideal monomial libre de cuadrados, es decir, es un ideal generado por producto de variables distintas dos a dos, entonces, es un ideal monomial radical, es decir, $I = \sqrt{I}$, (Barile 2005), por tanto, en el teorema anterior se tiene que $\sqrt{I} = \sqrt{(q_1, \dots, q_r)} = I$.

De nuevo, usando CoCoA podemos ver un ejemplo con G, G' definidas como en el ejemplo 3, 4 y 6

```
I:=Ideal(x[1]y[10], x[2]y[7], x[2]y[8],
x[2]y[9], x[3]y[7], x[3]y[8], x[3]y[9],
x[6]y[3], x[6]y[4], x[6]y[5], x[7]y[3],
x[7]y[4], x[8]y[3], x[8]y[4], x[9]y[1],
x[9]y[2], x[10]y[1],x[10]y[2]);--ideal de
Ferrer asociado a G/G'
```

```
T:=Ideal(x[10]y[1],x[9]y[1]+x[10]y[2],x
[9] y [2],x[8]y[3],x[7]y[3]+x[8]y[4],x[6]y
[3]+x[7]y[4],x[6]y[4],x[6]y[5],x[3]y
[7],x[2]y[7]+x[3]y[8],x[2]y[8]+x[3]
y[9],x[2]y[9],x[1]y[10]);--ideal genera
do por los elementos de las sumas de las
diagonales con diferencia constante
```

```
I=Radical(I);--verificación que I es ideal
radical
```

```
TRUE
```

```
I=Radical(T);--verificación del teorema
```

```
TRUE
```

Finalmente cabe mencionar que aún quedan algunas preguntas abiertas en la caracterización de los ideales de Ferrers asociados a diferencias de tablas. Por ejemplo, determinar la descomposición primaria de estos ideales y su relación combinatoria con las cajas de los diagramas de Ferrers.

CONCLUSIONES

Propiedades combinatorias ayudan a determinar propiedades algebraicas para idea-

les asociados a elementos combinatorios. En particular, en este trabajo se generalizan los resultados recientes de (Barile, 2006) para ideales de Ferrers, extendiéndolos a ideales asociados a la diferencia de tablas de Ferrers.

Adicionalmente, con el programa CoCoA y las funciones implementadas en él, se verificaron los resultados de (Barile, 2006) y se ha obtenido un conjunto de funciones que ayudan a calcular computacionalmente el rango aritmético de un ideal de Ferrers y los generadores de los ideales de de Ferrers.

LITERATURA CITADA

BARILE M. A note on monomial ideals. arXiv:math.AC/0512235 v1, 2005.

BARILE M. A note on the edge ideals of Ferrers graphs. arXiv:math.AC/0606353 v1, 2006.

BARILE M. A note on the edge ideals of Ferrers graphs. arXiv:math.AC/0606353 v2, 2006.

BARILE M. Comunicación personal, junio 29, 2006.

CoCoATeam, CoCoA, a system for doing Computations in Commutative Algebra. Available at <http://cocoa.dima.unige.it>.

CORSO A., NAGEL U. *Monomial and toric ideals associated to Ferrers graphs*. Preprint, 2006.

SCHMITT TH., VOGEL W. Note on the set theoretic intersections of subvarieties of projective space. *Math. Ann.* 245, (1979), 247-253.

Recibido: 6-07-2006

Aprobado: 15-04-2007