ISSN 0122-7483

Universitas Scientiarum

Vol. 7 No. 2

Julio - Diciembre 2002

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
Revista de la Facultad de Ciencias

ICFES

UNIVERSITAS SCIENTIARUM
Revista de la Facultad de Ciencias
PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
Vol. 7, N° 2: 7-15

LA GRAN REVOLUCIÓN ARITMÉTICA DE LA EDAD MEDIA Y EL SURGIMIENTO DEL ÁLGEBRA

Iván Castro Chadid[1]

Jesús Hernando Pérez[2]

[1] *Profesor titular. Pontificia Universidad Javeriana. E-mail: ivan.castro@jol.net.co*

[2] *Profesor emérito. Universidad Nacional de Colombia. E-mail: pelusa@col1.telecom.com.co*

RESUMEN

Contrariamente a lo que mucha gente se imagina, la Edad Media no fue un período muerto para el desarrollo del conocimiento matemático. En este ensayo se presentan dos de los aportes más importantes de los matemáticos medievales como son: la introducción de la notación posicional y de los algoritmos asociados y el surgimiento de métodos no geométricos para la solución de ecuaciones. El primero permitió la universalización de los procedimientos para calcular y el segundo la liberación definitiva del finitismo geométrico ligado a la obra euclidiana.

Palabras clave: notación posicional, algoritmo, procedimientos para calcular, álgebra, ábaco.

ABSTRACT

Contrary to common belief, the Middle Age was not a lost period for the development of the mathematical knowledge. In this article are presented two of the most important contributions of the medieval mathematicians. They are the positional notation with their associate algorithms and the emergence of the non-geometrical methods for the solution of equations. The positional notation permitted the universalization of the calculation procedures and the non-geometrical methods freed us from the geometric finitism to the Euclidian work.

Key words: Positions notation, algorithms, calculation procedures, algebra, abacus.

La oposición entre aritmética mística y racionalismo aristotélico, inspirados respectivamente en Platón y Aristóteles, fue uno de los motores que impulsaron el desarrollo matemático en la Edad Media. Esta tensión junto con la gran influencia del mundo árabe creó el ambiente necesario para que se iniciara la gran transformación que poco a poco condujo a la creación del álgebra y a la superación del finitismo geométrico fundamentado en la obra de Euclides.

Dada la influencia del platonismo, en las nacientes escuelas catequéticas creadas por los cristianos en Alejandría se empieza a cultivar el pensamiento de Platón, quien era considerado como uno de los "elegidos por Dios", ya que a través de su verbo contribuyó a preparar el ambiente propicio para la revelación plena del cristianismo; de ahí que Agustín de Hipona lo considerara como *"un cristiano precristiano"*.

Platón fue en gran medida quien recuperó el pensamiento aritmético de los pitagóricos. La alta Edad Media cristiana occidental estuvo muy influenciada por este genial filósofo griego y sus sucesores, quienes atribuían al número una triple dimensión: matemática, filosófica y mística, de ahí que en la filosofía cristiana el número está en el origen de la creación. Comentando *El libro de la sabiduría* San Agustín (354-430) sostiene:

"El Creador ha obrado según el número y la medida" y más adelante recuerda: "no es porque la creación se obrara en seis días por lo que el 6 es perfecto (es decir 6 es la suma de todos sus divisores propios 6=1+2+3); es porque el 6 es perfecto por lo que el mundo se hizo en 6 días" (B. Ribemont).

Este papel destacado que ocupaba el número permitió que se desarrollara una aritmología que se sustentaba en la interpretación de los números a la luz de las Sagradas Escrituras. El procedimiento era muy sencillo: dado un número determinado se buscaba en una amplia red de referencias religiosas la presencia de este número. Veamos algunos ejemplos ilustrativos en los que se puede ver claramente la influencia del pitagorismo.

1. El número 2 remite a las dos tablas de Moisés y a los dos testamentos.

2. Sabemos que 3 es primo, por lo tanto no se descompone, lo cual corresponde a una perfección que nos remite a la divinidad. Por otra parte, al ser 3=1+1+1 está representado el misterio de la Santísima Trinidad; de igual forma, tres es la unión del par y el impar 3=2+1, el par es divisible por 2 lo cual lo hace menos perfecto, además representa la dualidad del hombre: cuerpo y alma, también está asociado a lo terrestre; por consiguiente, el impar está asociado al cielo, tanto más cuanto que 3 representa el número, es decir, el círculo relacionado con el movimiento del cielo y de los planetas, por lo tanto, es la unión de lo terrestre con lo celeste.

3. Isidoro de Sevilla (560-636), considerado como el primer enciclopedista de la Edad Media, escribió la obra *Libro de los números que se encuentran en las Santas Escrituras,* en ella enuncia unas propiedades simbólicas de varios enteros como las siguientes:

   "Abraham vio tres ángeles, la Tierra estaba dividida en tres partes, hay cuatro vientos, siete planetas, diez Mandamientos".

4. Thibaut de Langres, considerado como uno de los más destacados representantes de esta aritmología cristiana, refiriéndose al número 7 sostenía lo siguiente:

   "El 7 es virgen puesto que dentro de los diez primeros enteros no engendra (no hay ningún múltiplo de 7 inferior a diez) ni es engendrado (es primo). Puede, por tanto, ser atribuido al Espíritu Santo" (T. de Langres, 1978).

5. En relación con el número 14 sostiene:

   "Como en los muchachos la capacidad de procrear empieza a manifestarse en el transcurso del año decimocuarto, este número simboliza la generación. Esto implica que la escritura haga venir a Cristo después de tres veces catorce generaciones. De igual modo, las leyes santas han estimado que el matrimonio no puede celebrarse antes de los 14 años del muchacho. Los hebreos quisieron también derivar su nombre de Heber, que perteneció a la decimocuarta generación después de Adán". (T. de Langres, 1978).

Las especulaciones aritmológicas contribuyen a sustentar la tesis consistente en que la ciencia para el hombre medieval tenía una absoluta legitimidad, en la medida en que estuviera de acuerdo con el dogma cristiano. Al lado de esta influencia de los números se dio otra también fundamental: la de la lógica.

Uno de los grandes méritos de Aristóteles consiste en haber logrado sistematizar y codificar por primera vez los procedimientos de razonamiento que en sus predecesores eran vagos o no estaban formulados. La lógica formal fue organizada por Aristóteles y constituyó conjuntamente con la teología, el estudio básico de gran parte de la Edad Media, aunque durante la alta Edad Media debido a la influencia platónico-agustiniana Aristóteles no era bien visto. Fue con la llegada a España en el siglo XII de las traducciones de las obras de Aristóteles del árabe al latín como empezó a manifestarse la enorme influencia de este genial filósofo griego. El método hile-mórfico (materia-forma), introducido por Aristóteles, se convierte en el punto central de la doctrina sacramental de la teología medieval. En el siglo XII Santo Tomás de Aquino a través de sus escritos hizo ver que la adaptación de la filosofía aristotélica era más favorable para la apologética, convirtiéndose Aristóteles de esta forma, en el filósofo de cabecera de los escolásticos.

El aporte fundamental de Aristóteles del silogismo, esto es, de los argumentos deductivos en los que se infiere una conclusión a partir de dos o más premisas; los escolásticos no fueron más allá de Aristóteles; de ahí el limitado desarrollo de la ciencia en la Edad Media. Bertrand Russell sostenía al respecto:

> *"A lo largo de toda la Edad Media, casi todos los mejores intelectos se dedicaron a la lógica formal, mientras que en el siglo XIX sólo una parte infinitesimal del pensamiento de todo el mundo se dedicó a este tema. Sin embargo, se ha hecho más por su avance en cada una de las décadas que han seguido a 1850 de lo que se hizo en el período que va de Aristóteles a Leibniz" (B. Russell, 1979).*

En el siglo XII por medio de las traducciones árabes al latín el mundo cristiano occidental no sólo se pone en contacto con Aristóteles, sino también con los más destacados geómetras griegos como Euclides y Arquímedes y algunos de los matemáticos árabes como Al-Khwarizmi.

Estos hechos, asociados a la vez con la creación de las primeras universidades, trajeron como consecuencia que la corriente simbolista que se sustentaba en especulaciones aritmológicas fuese desapareciendo para dar paso a la que posteriormente sería considerada como *la gran revolución aritmética de la Edad Media.*

El problema central consistía en ¿cómo calcular? En la Edad Media ésta era realmente una forma de poder, los notarios dependían de quienes supieran contar, mientras que en la actualidad son muchos los que saben calcular, en esa época muy pocos eran los que poseían esta habilidad. Para efectuar cálculos se empleaba fundamentalmente el ábaco de fichas y como forma de representar los números se recurría a la numeración romana. Las operaciones aritméticas con el ábaco requerían numerosos ejercicios de aprendizaje, especialmente para las incómodas operaciones de multiplicación y división. Veamos a manera de ejemplo, en la tabla adjunta, cómo se realizaba la división 4675/39.

	M	C	X	I
100-39=61				
4000÷100=40	4			
(4675-4000) + (40x61)=3115				
3000÷100=30	3			
(3115-3000)+(30x61)=1945				
1000÷100=10	1			
(1945-1000)+(10x61)=1555				
1000÷100=10	1			
(1555-1000)+(10x61)=1165				
100÷100=10	1			
(1165-1000)+(10x61)=775				
700÷100=7		7		
(775-700)+(7x61)=502				
500÷100=5		5		
(502-500)+(5x61)=307				
300÷100=3		3		
(307-300)+(3x61)=190				
100÷100=1		1		
(190-100)+(1x61)=151				
100÷100=1		1		
(151-100)+(1x61)=112				
100÷100=1		1		
(112-100)+(1x61)=73				
73+61				
100÷100=1		1		
134-100=34 (residuo)				
Cociente	1	1	9	

Obsérvese que se trata de una secuencia finita de restas iteradas, y que para este caso serían las siguientes:

4675= ((4000+3000+1000+1000+1000)+
(700+500+300+100+100+100))
-((40+30+ 10+10+10)+ (7+5+3+1
+1+1)) 61+73

Esto es:

4675= ((4000+3000+1000+1000+1000)+
(700+500+300+100+100+100))
-((40+30+10+10+10)+(7+5+3+1+
1+1)) (100-39)+(39+34)

o sea:

4675= ((4000+3000+1000+1000+1000)
+(700+500+300+100+100+100))
-((4000+3000+1000+1000+1000)
+(700 +500+300+100+100+100))
+((40+30+10+10+10)+(7+5+3+1+1
+1)) 39+(39+34)

finalmente:

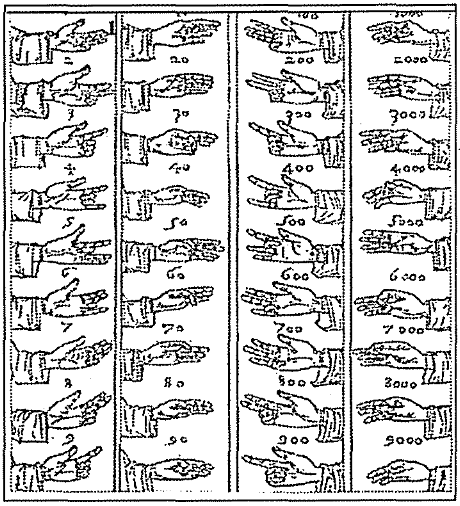
4675=((40+30+10+10+10)+ (7+5+3+1 +1
+1))39+(39+34)
=((40+30+10+10+10)+(7+5+3+1+1+
1+1)) 39+34
=(119)(39)+34

y así las restas sucesivas serían las siguientes:

4675-((40+30+10+10+10)+(7+5+ 3+1+
1+1+1))39=34.

Como puede observarse este proceso de división parece dispendioso, pero si se mira con detenimiento realmente no lo es. El algoritmo de la división se encuentra en *Los elementos* de Euclides, aparece aquí manejado de una manera sistemática, abriéndole camino al método del descenso infinito creado y popularizado en el siglo XVII por Fermat (F. Cajori, 1980).

Por otra parte, en la alta Edad Media existía una forma práctica de representar los números mediante posiciones especiales de los dedos de ambas manos, que facilitaba la memorización de las cantidades llevadas en las operaciones de cálculo mental y tal vez de ábaco, por lo menos cuando en las fichas no había indicación de números.



Numeración digital

Este tipo de numeración con los dedos fue llamada numeración digital, y empleado por los más destacados matemáticos del momento como Leonardo de Pisa (1170-1240) más conocido como Fibonacci (hijo de Bonacci), quien recomendaba *"guardar en la mano las cantidades llevadas en la multiplicación"* (L. Pisano, 1987). Esta misma recomendación la hacía fray Luca Paccioli (1445-1514) en su obra *Summa Aritmethica*, pero a quien se atribuye la creación de este simbolismo es al monje inglés Beda el Venerable (673-735); este tipo de numeración fue muy útil hasta antes de que se hiciera corriente el uso de la tinta y el papel.

Alrededor del año 825, en Bagdad, Muhammad ibn Musa (780?-850?), llamado

Al-Khwarizmi, reveló al mundo el contenido de los trabajos indios de aritmética, en los que los números se representan con nueve cifras y un cero. Los orígenes de esta numeración se remontan al siglo II, pero sólo empezaron a conocerse seis siglos después en el mundo árabe y sólo hasta el siglo XII en el mundo católico occidental sin mucha difusión y con mucha resistencia. Dado que los copistas occidentales escribían de izquierda a derecha, mientras que los árabes lo hacían de derecha a izquierda, las cifras fueron modificándose hasta la forma actual que se remonta al siglo XV (F. Vera, 1947).

Los textos más conocidos de Al-Khwarizmi son: *Algorithmi de numero Indorum y Hisab al-jabr wal-muqabala* (ciencia de reducción y confrontación). En el primero, como ya se mencionó, introdujo la numeración empleada por los matemáticos de la India y algunos procedimientos para realizar cálculos aritméticos, que posteriormente se conocerían con el nombre de algoritmos, siendo este término una latinización del nombre del autor. En el segundo discute las ecuaciones lineales y cuadráticas, pero no a partir de la geometría sino empleando un enfoque hasta entonces desconocido, el cual sería reconocido posteriormente con el nombre de álgebra, también latinización de "aljabr".

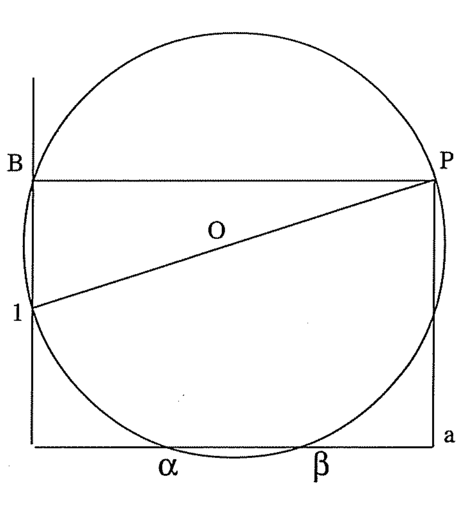
El álgebra es uno de los mayores aportes de los árabes a la cultura universal, ya que a diferencia de lo que hacían los griegos con esta área de la matemática, rompieron todo vínculo con la intuición geométrica, dándole a sus razonamientos un rigor que permite olvidar el significado de los elementos que se combinan para atender sólo el mecanismo de combinación, de manera que permita operar con rapidez y seguridad ahorrando tiempo, trabajo e imaginación.

Con el fin de contrastar entre los métodos empleados en el tratamiento del álgebra después de Al-Khwarizmi y el enfoque geométrico para la solución de problemas, y ver la ventaja del nuevo enfoque algebraico, veamos cómo se encuentran con regla y compás las raíces de la ecuación:

$$x^2 - ax + b = 0 \text{ con } a^2 > 4b$$

1. Trace dos rectas perpendiculares y considérense como ejes coordenados.
2. Sobre la vertical coloque los segmentos de longitud 1 y b.
3. Sobre la horizontal coloque el segmento de longitud a.
4. Construya el rectángulo de lados a y b como se indica en la figura siguiente.
5. Una el punto P=(a, b) con el punto (0, 1) y encuentre el punto medio O.
6. Construya la circunferencia con centro en O y radio OP.
7. Los puntos de corte de la circunferencia con el eje horizontal son las soluciones de la ecuación $x^2 - ax + b = 0$ con $a^2 > 4b$.

La justificación de este procedimiento es la siguiente:



Sabemos que

$$x^2 - ax + b = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{b+1}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{b-1}{2}\right)^2$$

Por otra parte, la ecuación

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b+1}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{b-1}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

es la de una circunferencia

con centro en $\left(\frac{a}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$

y radio $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(\frac{b-1}{2}\right)^2}$

pero cuando $y = 0$ en (1), se obtiene la ecuación original.

Luego las soluciones de la ecuación se obtienen al interceptar la circunferencia (1) con el eje horizontal. Como los puntos (0, 1) y (a, b) satisfacen (1) y además el punto medio del segmento que une (0, 1) y (a, b) es el centro de la circunferencia, para encontrar las raíces de la ecuación original con regla y compás se debe proceder como se indica en los pasos 1) al 7) (W.R. Knorr, 1986-B. Bold, 1969).

Este nuevo enfoque algebraico abre las puertas para la construcción de la geometría analítica a la manera de Fermat y Descartes, y se inicia la ruptura del esquema euclidiano amarrado a las figuras todas ellas de carácter finito, abriendo posibilidades que permitirán nuevos enfoques sobre las magnitudes y los objetos geométricos que empiezan a aparecer como colecciones de puntos. Entre los griegos los objetos geométricos son figuras, es decir, "trazos" que se construyen sólo con regla y compás, no son colecciones de puntos, de ahí el carácter finitista de la matemática griega.

El empleo de las diez cifras para expresar un número entero o fraccionario cualquiera es otro de los acontecimientos más importantes en la matemática de la Edad Media, por los siguientes motivos:

1. Se muestra claramente la relación finito-vs-infinito: con sólo diez cifras o dígitos es posible nombrar cualquier número. Las secuencias de cifras crecen indefinidamente.

2. Se introduce el cero, hasta entonces inusitado, cuyo nombre inicial era *circulus* (círculo pequeño), posteriormente *cifra* (el vacío del árabe as-sifr) y también *figura nihili* (cifra de nada). Aunque en honor a la verdad tardó mucho tiempo para que este número fuera aceptado en el mundo occidental cristiano.

3. Se introducen por primera vez las fracciones decimales, aunque sin sacar todo el partido a este descubrimiento.

4. Surgen algoritmos para realizar operaciones aritméticas mucho más ágiles que los utilizados con el ábaco.

A manera de ejemplo, puede verse cómo realizaba Fibonacci el producto de dos números de tres cifras; tomemos 345 x 267.

Con el fin de facilitar la comprensión del método, construimos los polinomios:

$f(x) = 3x^2 + 4x + 5$ y $g(x) = 2x^2 + 6x + 7$

entonces:

$f(x)g(x) = (3x2)x^4 + ((3x6) + (4x2))x^3 + ((3x7) +(2x5)+(4x6))x^2+((4x7)+((6x5))x + (5x7)$

Tomando x=10, se tiene:

(5x7)=35=3x10+5
Se escribe **5** y se lleva **3**

(4x7)+(6x5)+3=61=6x10+1
Se escribe **1** y se lleva **6**

(3x7)+(2x5)+(4x6)+6=61=6x10+1
Se escribe **1** y se lleva **6**

(3x6)+(4x2)+6=32=3x10+2
Se escribe **2** y se lleva **3**

3x2+3=**9**

Por lo tanto el resultado es:

345x267 = **92115**.

En 1202, Fibonacci publicó una obra titulada *El libro sobre el ábaco*, en ella describió unos métodos para realizar operaciones aritméticas especialmente de multiplicación, los cuales denominó "métodos indios" y se propuso oponerlos a los que se empleaban con el ábaco (A. Sestier, 1988); entre ellos vale la pena destacar por su importancia histórica uno para realizar multiplicaciones que denominó "*in forma scacherii*" (en forma de damero tablero para el juego de Damas). Veamos cómo se efectúa la multiplicación 567x4321 empleando este método.

Se hace el producto 4321x7 y se almacena en la segunda fila de la tabla adjunta, a continuación se hace el producto 4321x6 y se almacena en la tercera fila de la tabla, finalmente se hace el producto 4321x5 y se almacena en la cuarta de la tabla obteniéndose:

	4	3	2	1	
3	0	2	4	7	7
2	5	9	2	6	6
2	1	6	0	5	5

Se van sumando los elementos de las diagonales en la dirección izquierda-derecha, como en el juego de damas y almacenando los resultados en las respectivas casillas de abajo como se indica en la siguiente secuencia:

	4	3	2	1			
3	0	2	4	7	7		
2	5	9	2	6	6		
2	1	6	0	5	5		
						-	7

	4	3	2	1			
3	0	2	4	7	7		
2	5	9	2	6	6		
2	1	6	0	5	5		
						0	7

	4	3	2	1			
3	0	2	4	7	7		
2	5	9	2	6	6		
2	1	6	0	5	5		
					0	0	7

	4	3	2	1			
3	0	2	4	7	7		
2	5	9	2	6	6		
2	1	6	0	5	5		
				0	0	0	7

	4	3	2	1			
3	0	2	4	7	7		
2	5	9	2	6	6		
2	1	6	0	5	5		
			5	0	0	0	7

	4	3	2	1			
3	0	2	4	7	7		
2	5	9	2	6	6		
2	1	6	0	5	5		
		4	5	0	0	0	7

	4	3	2	1			
3	0	2	4	7	7		
2	5	9	2	6	6		
2	1	6	0	5	5		
	2	4	5	0	0	0	7

Con mínimas diferencias, que podrían estar en la simple escritura de los números, este método ya era conocido por los árabes en el siglo X aunque con el nombre de *"método de las casas"*.

Fue necesario esperar casi tres siglos para que estos métodos que suponen cierto virtuosismo en el manejo de los números, fueran aceptados después de un arduo conflicto entre los partidarios del cálculo mediante el uso del ábaco de fichas (abacistas) y los partidarios del cálculo por cifras (algoristas), llegando estos últimos finalmente a imponerse por la menor dificultad que implicaban estos procedimientos (Vera, 1947).

ALGORISTA *vs.* ABACISTA
(Strassboug 1504)

El grabado en madera titulado Perla filosófica de Gregor Reisch impreso en 1503, ha sido considerado como una imagen alegórica de la victoria de los algoristas sobre los abacitas, ya que en ella, la diosa aritmética arbitra a favor del *"cálculo por cifras"*. Es claro que el *"cálculo por cifras"* no solamente es más fácil de manejar, sino que por sus características es un modelo del infinito potencial, puesto que se puede aplicar a números con cifras tan numerosos como se quiera.

Como se ha dicho, Luca Pacioli escribió en 1494 su obra cumbre *Summa arithmetica*, en la cual describe ocho métodos distintos para multiplicar, introduciendo en particular el actual método de multiplicación que se impuso universalmente (A. Allard). Uno de los más interesantes es el siguiente:

Efectuar el producto 435x967.

Inicialmente, se construye un cuadrado que tenga nueve casillas también cuadradas. Se efectúan los productos:

5x9, 3x9, 4x9, 5x6, 3x6, 4x6, 5x7, 3x7 y 4x7.

Los resultados se colocan en cada una de las casillas como se indica a continuación:

	4	3	5	
	3/6	2/7	4/5	9
	2/4	1/8	3/0	6
	2/8	2/1	3/5	7

Finalmente, se suman todos los números encerrados por dos diagonales consecutivas empezando por el cuadrado inferior derecho, obteniéndose:

	4	3	5	
4	3/6	2/7	4/5	9
2	2/4	1/8	3/0	6
0	2/8	2/1	3/5	7
	6	4	5	

luego, 435x967=420645.

Esta "revolución aritmética", que se produjo en la Edad Media, representó un aporte de tal importancia, que sin él hubiera sido imposible que se lograran los extraordinarios avances que posteriormente se dieron, no sólo en matemáticas, sino también en física, astronomía y otras ciencias afines.

AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer a los profesores Alberto Campos de la Universidad Nacional de Colombia y Álvaro Duque, S.J., de la Pontificia Universidad Javeriana, por sus valiosas observaciones, recomendaciones y sugerencias.

LITERATURA CITADA

DE LANGRES, THIBAUT. *De quatuor modis quibus significationes numerorum operiuntur,* Dominique Gueniot, 1978.

ALLARD, A. "La revolución aritmética de la Edad Media". *Mundo científico*, nº 161, vol. 15, 822-828.

RUSSELL, BERTRAND. *Los metafísicos y las matemáticas*, SIGMA, el mundo de las matemáticas, vol. 1, 1979, 368-381.

CAJORI, F. *A history of mathematics*. Chelsea Publishing Company, New York, 1980.

PISANO FIBONACCI, LEONARDO. *The book of squares*. Academic Press, Inc., Orlando, Florida, 1987.

KNORR, W.R. *The ancient tradition of geometric problems*. Dover Publications, Inc., New York, 1986.

BOLD, B. *Famous problems of geometry, and how to solve them.* Dover Publications, Inc., New York, 1969.

VERA, F. *Historia de las ideas matemáticas,* tomo I, Editorial El Gráfico, Bogotá, 1947.

SESTIER, A. *Historia de las matemáticas*, Editorial Limusa, S.A., México, 1988.

RIBEMONT, B. "La Edad Media y la simbología de los números", *Mundo científico*, nº 161, vol. 15, 816-821.