UNIVERSITAS SCIENTIARUM
Revista de la Facultad de Ciencias
PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
Vol. 9, N° 1: 23-28

GENERACIÓN DE POLINOMIOS DE SCHUBERT CON COCOA II: GRAFOS RC.

Fernando Novoa

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Javeriana,
Carrera 7ª # 43-82, Bogotá.
fernando.novoa@javeriana.edu.co

RESUMEN

El polinomio de Schubert asociado a una permutación *w* es codificado por medio de la información contenida en ciertos grafos rc. Presentamos un programa para el cómputo de los polinomios de Schubert por medio de movimientos definidos sobre estos grafos.

Palabras clave: polinomio de Schubert, grafo rc, permutación.

ABSTRACT

The Schubert polynomial associated to a permutation *w* is encoded by some rc graphs. We develop a computer program for computing Schubert polynomials using the moves on these graphs.

Key words: Schubert polynomial, rc graph, permutation.

INTRODUCCIÓN

Los polinomios de Schubert son los representantes las clases de cohomología de las variedades bandera y además, todo polinomio de Schur es un polinomio de Schubert. Por esto son herramientas útiles en diversos campos del álgebra, geometría, combinatoria y topología.

Los polinomios de Schubert fueron definidos en 1982 por Lascoux y Schülzenberger, mediante operadores de diferencias divididas. Posteriormente se han obtenido otros métodos para hallar estos polinomios y principalmente métodos combinatorios, que hacen explícitas ciertas propiedades de estos polinomios. Uno de estos métodos combinatorios son los grafos rc definidos inicialmente por Fomin y Kirillov. Por medio de estos grafos rc y movimientos en ellos, Billey y Bergeron encontraron un procedimiento para generar los polinomios de Schubert. Es de notar que por lo menos existe otra media docena de distintos procedimientos combinatorios y algebraicos para generar estos polinomios.

La idea central en el caso de los grafos rc es la siguiente. Dada una permutación *w*, su polinomio de Schubert asociado es

$$G_w(x) = G_w(x_1, ..., x_n) = x^{L(w)} + \text{otros monomios},$$

donde $L(w) = (l\ ,..., l_n)$ es el código de Lehmer de *w* y $x^{L(w)} = x_1^{l_1} ... x_n^{ln}$ su monomio asociado, el cual está dado por un grafo rc "inicial", y los otros monomios se obtienen de este grafo por medio de movimientos "permitidos".

Inicialmente recordamos algunas definiciones y propiedades básicas presentando posteriormente los grafos rc y el programa en CoCoA que calcula el polinomio y los grafos rc asociados.

Sea $R = Z[x_1,..., x_n]$ el anillo de polinomios en n variables con coeficientes en Z. Para $1 \leq i < n$, definimos los operadores de diferencias dividido ∂_i sobre R por medio de

$$\partial_i(f) = \frac{f(x_1,..., x_n) - f(..., x_{i+1}, x_i,...)}{x_i - x_{i+1}}.$$

Algunas propiedades de este operador son:

- $\partial_i^2 = 0$.
- $\partial_i(f) = 0$ si f es simétrico en x_i, x_{i+1}.
- $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$ para $|i-j| > 1$.
- $\partial_i\partial_{i+1}\partial_i = \partial_{i+1}\partial_i\partial_{i+1}$, si $1 \leq i < n-1$.

Sea $w \in S_n$ una permutación. Denotamos por $l(w)$ su longitud, es decir, si escribimos $w = [w_1,..., w_n]$ (notación de una línea) entonces

$$l(w) = \sum_{i=1}^{n} \#\{j > i : w_j < w_i\}$$

Decimos que la sucesión $(a_1,...,a_p)$ es una *palabra reducida* para w si $w = s_{a_1} s_{a_2} \dots s_{a_p}$ donde $s_j=(j, j+1)$ y $l(w)=p$.

Ejemplo 1. Sea w=[4,2,3,1]. Entonces $l(w)$=5 y (3,2,1,2,3) es una palabra reducida para w por cuanto

$$w = s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 = (3,4)(2,3)(1,2)(2,3)(3,4).$$

Es de anotar que estamos multiplicando de derecha a izquierda.

Una *sucesión compatible* para la secuencia $a=(a_1,...,a_j)$ es una sucesión no decreciente de enteros positivos $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_j)$ tales que se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\alpha_1 \leq ... \leq \alpha_j$.
2. $\alpha_i \leq ... a_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.
3. Si $a_i < a_{i+1}$ entonces $\alpha_i < \alpha_{i+1}$.

Ejemplo 2. La secuencia (1,1,1,2,3) es una secuencia compatible para la palabra (3,2,1,2,3). Es más, en este caso es la única secuencia compatible.

Dada a una palabra reducida de w y α una secuencia compatible de a definimos su grafo como un subconjunto de [1,2,...] x [1,2,...] tal que las entradas no nulas del diagrama se hallan en las coordenadas $(\alpha_k, a_k-\alpha_k+1)$ para $1 \leq k \leq p=l(w)$.

Ejemplo 3. Si $\alpha = (1,1,1,2,3)$ y $a = (3,2,1,2,3)$ entonces su grafo asociado tiene entradas no nulas en las entradas (1,3), (1,2), (1,1), (2,1), (3,1) y su grafo se puede representar por medio de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que el número de entradas no nulas es igual a $l(w)$=5. En general, si $w \in S_n$ y a,α son palabra reducida de w y sucesión compatible de a respectivamente, entonces podemos restringir el grafo al subconjunto de parejas $(i, j): 1 \leq i+j \leq n$, por cuanto $\alpha_k+(a_k-\alpha_k+1)=a_k+1 \leq n$. En el ejemplo anterior se tendrá entonces el "grafo"

$$\begin{array}{llll} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & & \\ 0 & & & \end{array}$$

Al remplazar las entradas no nulas del diagrama anterior por "cruces"

y los ceros por "codos": si el 0 no está en la diagonal *(i, j):i+j=n+*1 y si el cero está en la diagonal, obtenemos la representación usual (Bergeron y Billey,1993) de los diagramas rc:

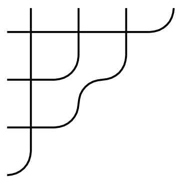

FIGURA 1

La figura 1 representa el grafo de la permutación w = [4,2,3,1]. La interpretación de estos diagramas es la siguiente. Si enumeramos las columnas y las filas en la forma usual es decir, incrementando de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, vemos que el primer "hilo", el que sale de la fila 1 termina en la columna $w_1 = 4$. El segundo hilo, sale de la segunda fila y termina en la columna $w_2 = 2$, y así sucesivamente.

En forma similar, si se tiene un diagrama rc podemos saber la permutación w, palabra reducida y la secuencia compatible que le corresponden.

Además, asociado a cada grafo rc tenemos un monomio. Si γ es un grafo rc, definimos su monomio asociado como

$$x^{\gamma} = \prod_{\gamma(i,j)=1} x_i$$

donde el producto corre sobre las entradas no nulas del grafo (o de la matriz asociada).

Ejemplo 4. El monomio asociado al rc grafo de la figura 1, cuya matriz se calculó en el ejemplo 3 será:

$$x_1^3 x_2 x_3$$

por cuanto hay tres 1 en la primera fila de la matriz, o equivalentemente, tres cruces en la primera fila del diagrama rc, un 1 en la segunda fila y un 1 en la tercera fila. Vemos además que dicho monomio está dado por la secuencia compatible α = (1,1,1,2,3) (véase ejemplo 3) y por eso también se escribe como

$$x_1^3 x_2 x_3 = x_{\alpha}$$

Entre todos lo diagramas rc asociados a una permutación el siguiente nos da una información especial. Sea $w \in S_n$. Para todo $i, 1 \leq i \leq n$ definimos $m_i = \#\{j : j > i, w_j < w_i\}$, es decir, el número de descendentes a la derecha de la posición i.

Definimos el *grafo inicial* de w como el grafo rc w_{inc} cuyas entradas no nulas se hallan en las posiciones *(i,c)* para $0<c\leq m_i$.

Ejemplo 5. Para la permutación w = [4,2,3,1] tenemos que

$$m_1 = 3,\ m_2 = m_3 = 1,\ m_4 = 0$$

y por lo tanto las entradas no nulas del diagrama son exactamente las del ejemplo 3 y así el grafo de $[4,2,3,1]_{\text{inc}}$ es el de la figura 1.

Ejemplo 6. Tomemos w = [1,3,4,2]. Entonces $m_1 = 0$, $m_2 = m_3 = 1$, $m_4 = 0$ luego su longitud es 2. Su diagrama inicial tiene la forma

$$[1,3,4,2]_{inc} = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & & \\ 0 & & & \end{matrix}$$

FIGURA 2

y su monomio asociado es x_2x_3. Sus entradas no nulas se encuentran en las posiciones (2,1) y (3,1). Como sabemos que las entradas no nulas están en las posiciones (α_k, a_k - α_k +1) sumando las coordenada y restando 1 obtenemos los a_k porque conocemos los α_k. Así para a este diagrama le corresponde la palabra reducida a con a_1 = 2 y a_2 =3.

A partir de este diagrama podemos encontrar las palabras reducidas y sus sucesiones compatibles que aportarán monomios al polinomio de Schubert.

Bergeron y Billey (1993) han establecido que el polinomio de Schubert G_w asociado a w se puede obtener de la siguiente manera:

Teorema. Sea $w \in S_n$, entonces el polinomio de Schubert G_w asociado a w está dado por

$$G_w = \sum_{a \in R(w)} \sum_{\alpha \in C(a)} x^{\alpha}$$

donde $R(w)$ es el conjunto de palabras reducidas de w y $C(a)$ el conjunto de secuencias compatibles de a y x^{α} el polinomio asociado a α.

Además ellos establecieron que los grafos rc que aparecen aportando en la fórmula anterior se pueden generar por medio de movimientos sobre el grafo inicial de la permutación. Los movimientos son llamados *movimientos escalera*, pero simplemente los llamaremos movimientos.

Los movimientos se realizan de la siguiente manera: si en el diagrama se tiene una configuración con dos columnas consecutivas y donde las $m \geq 0$ filas contienen entradas no nulas entonces se puede obtener la configuración

$$\begin{array}{ccc} & i & i+1 \\ & 0 & 0 \\ m \ filas & 1 & 1 \\ de \ 1's & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & 1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} & i & i+1 \\ & 0 & 1 \\ m \ filas & 1 & 1 \\ de \ 1's & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & 0 & 0 \end{array}$$

Ejemplo 6. Para w = [1,3,4,2], de su grafo inicial podemos hacer la siguiente sucesión de movimientos:

$$[1,3,4,2]_{inc} = \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & & \\ 0 & & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & & \\ 0 & & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & & & \end{array}$$

de los cuales obtenemos los monomios

$$x_2x_3,\ x_1x_3,\ x_1x_2$$

respectivamente.

Haciendo uso del programa **schubert.pkg** (Novoa, 2002) podemos calcular el polinomio de Schubert para la permutación w = [1,3,4,2]:

Schubert1([1,3,4,2]);
x[1]x[2] + x[1]x[3] + x[2]x[3]

y se comprueba que G_w se puede obtener por medio de movimientos sucesivos sobre el grafo inicial y los grafos así obtenidos.

Ejemplo 7. La rutina RCgrafo (w) del programa **rcgrafo.pkg** que estamos presentamos, realiza los cómputos anteriores y retorna los grafos rc asociados a una permutación w. El siguiente es el resultado con la rutina RCGrafo, desarrollada en el sistema algebraico computacional CoCoA:

```
RCGrafo([1,3,4,2]);
Las palabras reducidas para [1, 3, 4, 2]
son:

[[2, 3]]

Las secuencias compatibles con [2,
3]son

[[1, 2], [1, 3], [2, 3]]

Los RC grafos de [1, 3, 4, 2] están re-
presentados por las matices

[Mat[
  [0, 1, 0, 0],
  [0, 1, 0, 0],
  [0, 0, 0, 0],
  [0, 0, 0, 0]
], Mat[
  [0, 1, 0, 0],
  [0, 0, 0, 0],
  [1, 0, 0, 0],
  [0, 0, 0, 0]
], Mat[
  [0, 0, 0, 0],
  [1, 0, 0, 0],
  [1, 0, 0, 0],
  [0, 0, 0, 0]
]]
```

Finalmente usando las matrices anteriores, el programa calcula el polinomio de Schubert, sumando los monomios asociados a cada uno de ellos.

SchuBilley([1,3,4,2]);
x[1]x[2] + x[1]x[3] + x[2]x[3]

Observemos que el monomio asociado a grafo inicial de w = [1,3,4,2] es x_2x_3, y los otros dos monomios se obtuvieron de los movimientos escalera permitidos en ese grafo inicial.

CONCLUSIONES

El programa **rcgrafo.pkg** retorna el polinomio de Schubert de una permutación por medio del cómputo explícito de los grafos rc asociados a la permutación. El programa retorna no sólo los grafos asociados a la permutación que están asociados a los monomios que aparecen en el polinomio de Schubert, sino también retorna las palabras reducidas de la permutación y las sucesiones compatibles con las palabras. De esta forma nos proporciona los elementos combinatorios asociados a los polinomios de Schubert brindando una ayuda complementaria en el entendimiento de propiedades de estos polinomios. Adicionalmente, las rutinas del programa rcgrafo.pkg se han adicionado a las del programa schubert.pkg (Novoa, 2003) para formar un solo programa para el cómputo de polinomios de Schuber, tanto simples como dobles.

El cómputo de los grafos rc es importante no sólo por los polinomios de Schubert. Estos grafos se usan además en la comprensión de otros procesos combinatorios asociados a la descomposición de las variedades bandera. En Knutson y Miller (2001) se usan los grafos rc asociados a una permutación w, para obtener y explicar la descomposición de las clases de cohomología de la variedad de Schubert $\overline{X}_w$ asociada a w en una variedad bandera.

LITERATURA CITADA

BERGERON N and BILLEY S. 1996. *RC-graphs and Schubert polynomials*. Preprint.

KNUTSON A. and MILLAR E. 2002. *Gröbner geometry of Schubert polynomials*. Preprint arXiv:math.AG/0110058 v2.

MANIVEL L. 2001. *Symmetric functions, Schubert polynomials and degeneracy loci*. American Mathematical Society.

NOVOA F. "Generación de polinomios de Schubert con CoCoA I: Diagramas de Rothe". *Universitas Scientiarum*, vol. 8, edición especial, 17-23.

Recibido: 19-03-2003
Aceptado: 18-03-2004