Pontificia Universidad JAVERIANA Bogotá

UNIVERSITAS SCIENTIARUM
Revista de la Facultad de Ciencias
Vol. 11, N° 1, 59-83

DIDÁCTICA EULERIANA

J. H. Pérez-Alcazar[1], I. Castro-Chadid[2]

[1] *Universidad Nacional de Colombia, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá,*
[2]Pontificia Universidad Javeriana, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá
jhppelusa@gmail.com, *icastro@javeriana.edu.co*

RESUMEN

Tomando como ejemplo la vida y la obra de Euler se presenta la propuesta de una didáctica euleriana, ilustrando el principio básico de "aprender con los clásicos".

Palabras clave: didáctica euleriana, didáctica para la formación académica, el método Ω de Euler, la teoría Ω,

ABSTRACT

Taking, as an example, the life and work of Leonhard Euler, a proposal for Eulerian didactics is presented, illustrating the basic principle of "learning with the classics".

Key words: Eulerian didactics, didactics for the academic formation, Euler's "omega" method, the "omega" theory.

INTRODUCCIÓN

¿Existe una didáctica euleriana?

Para responder a esta pregunta necesitamos un referente teórico que incluya como tipo o concepto, uno al cual haga referencia la palabra didáctica. En el presente trabajo, utilizaremos la teoría que poco a poco hemos venido construyendo en colaboración con varios colegas, entre ellos los del grupo MUSA (grupo de investigación en educación matemática de la Universidad Sergio Arboleda) algunos de cuyos constituyentes básicos se resumen a continuación:

La función principal de las organizaciones educativas, desde el preescolar hasta el nivel superior, es la académica. Esta afirmación no desconoce otras funciones importantes del sistema educativo como sería el caso de la formación ciudadana. Sin embargo, todas las organizaciones humanas, directa o indirectamente, desempeñan funciones de formación o de deformación ciudadana. La prensa, la radio, la televisión, el cine, el hogar, las organizaciones religiosas, las organizaciones políticas, el vecindario, la ciudad, el ejército, las organizaciones deportivas, etc., contribuyen todas, unos más que otras, a la formación o a la deformación de los ciudadanos; todas ellas ayudan a organizar las creencias y los comportamientos de las personas y como consecuencia educan, en el más amplio sentido de la palabra: para bien o para mal, conformándose de esta manera la denominada cultura popular.

Cabe pues el interrogante sobre la especificidad de las organizaciones escolares: ¿cuál es su función particular?, ¿cuál es la que les da identidad?

Las organizaciones escolares han sido creadas por las sociedades modernas y contemporáneas con un doble propósito explícito o implícito: El de formar buenos ciudadanos y el de fortalecer el mundo académico. Sin embargo, estas organizaciones son las escogidas por la sociedad para ofrecer condiciones favorables al trabajo académico. La escuela, el colegio, la universidad deben brindar a sus estudiantes la oportunidad de adquirir, en el caso de que lo deseen, muchos de los hábitos que son indispensables para desempeñarse como académicos o profesionales, además de los que se requieren para ser buenos ciudadanos.

Se desprende de lo anterior una primera gran conclusión: debe existir una disciplina académica cuyo objeto de estudio sea precisamente el trabajo académico: Esta es la didáctica para la formación académica. Todas aquellas actividades académicas que se desarrollan alrededor del trabajo académico, constituyen la didáctica general para el trabajo académico. Las didácticas particulares, como es el caso de la didáctica de las matemáticas, focalizan su atención en el trabajo académico de cada disciplina, así pues, el tópico central de la didáctica de las matemáticas es el trabajo académico en matemáticas.

Los didactas de la matemática investigan y utilizan los resultados de sus investigaciones para apoyar el trabajo matemático de otros y, por supuesto, el de ellos mismos; investigan acerca de cómo se construye el conocimiento matemático, qué actividades realizan los matemáticos individualmente y en grupo, qué son las teorías matemáticas, cuáles son las diferencias entre tales teorías y otras modalidades narrativas como los imaginarios y los mitos.

Una parte fundamental de esta labor exploradora, de los didactas de la matemática, consiste en entender las actividades como académicos y como seres humanos, de aquellos personajes consagrados como grandes matemáticos para, por supuesto, aprender de ellos como individuos y como académicos. Capturar, asimilar y adaptar la esencia de los métodos utilizados por estos grandes educadores, es un logro didáctico digno de alcanzar.

¿Qué nos puede enseñar, por ejemplo, un personaje como Pitágoras, en tanto que ser humano y académico? Muchas cosas, pues como lo señaló Bertran Russell (1872-1970) *«…no conozco un ser humano que haya tenido mayor influencia en los otros que Pitágoras»*. De manera similar es y ha sido posible aprender muchas cosas positivas de Euclides, Arquímedes, Galileo, Descartes, Euler, Luis Santaló, Julio Rey Pastor, Miguel de Guzmán, Yu Takeuchi, Jairo Charris, Carlo Federicci, y tantos otros que organizaron su vida para dedicarla a la investigación y al desarrollo del conocimiento matemático.

Sí existen didácticas pitagóricas y eulerianas, pues los estilos y métodos que utilizaron estos grandes educadores en vida, siguen inspirando a otros matemáticos a otros académicos y por fortuna "a otros ciudadanos" aunque algunos de ellos no sean conscientes de esto.

Este gran capítulo de la didáctica puede llamarse, como lo han sugerido varios especialistas: Aprender con los clásicos; entre ellos Niels H. Abel (1802-1829) quien afirmó (Castro, 1988):

> *"Si queremos hacer verdaderos progresos en matemáticas, debemos aprender de los maestros y no de los alumnos"*.

Los invitamos pues a seguir los consejos de otro gran matemático como Pierre Simón de Laplace (1749-1827) (Castro, 1996):

"Leed a Euler, es el maestro de todos nosotros".

VIDA Y OBRA DE LEONHARD EULER

Leonhard Euler nació en Basilea (Suiza) el 15 de abril de 1707. Su padre, un modesto pastor calvinista y a la vez matemático por afición, había sido discípulo de Jacob Bernoulli (1654-1705). Con el fin de estudiar teología Leonhard se inscribió en la Universidad de Basilea en 1720. Allí conoció a Johann Bernoulli (1667-1748), uno de los más destacados matemáticos del momento, quien pronto descubrió la extraordinaria capacidad de Euler para la matemática y logró orientarlo hacia esta ciencia.

Johann Bernoulli (1667-1748)

En 1722 se graduó como bachiller y dos años después obtuvo el título de Maestro. En 1726 publicó su primer trabajo titulado: *Constructio lincarum isochronarum in medio quocunque resistente*. En esta memoria empieza a perfilarse el estilo que siempre lo acompañó, el cual se puede describir con la siguiente expresión de Nicolás Caritat de Condorcet (1743-1794):

"Cuando publicaba una memoria sobre algún asunto nuevo, exponía con sencillez el camino que había recorrido, haciendo observar sus dificultades y vericuetos, y luego de hacer seguir a los lectores la marcha de su espíritu durante los primeros ensayos, les enseñaba cómo había conseguido encontrar el camino más fácil, lo que demuestra que prefería la instrucción de sus discípulos a la satisfacción que pudiera producirle el asombro de ellos y, creía no hacer bastante por la ciencia si no agregaba a las verdades nuevas con que la enriquecía, la sincera exposición de las ideas que le habían conducido a su descubrimiento" (Castro, 1996).

Por invitación de Nicolás y Daniel Bernoulli, ingresó a la Academia de San Petersburgo en 1727 pero debido a los problemas financieros con los que contaba la Academia, se retiró y enlistó en la marina rusa en donde estuvo hasta 1730, año en el cual se le concedió la cátedra de física en San Petersburgo.

Durante los 14 años que permaneció allí escribió más de 100 artículos y su tratado *Mechanica* (1736) obra de enorme importancia en física ya que en ella se presentan por primera vez los conceptos de partícula, aceleración de una partícula que se desplaza a lo largo de una curva, vector velocidad y vector aceleración. La importancia de este libro no sólo radica en la introducción de estos conceptos, sino también en el hecho de que aquí la mecánica es expuesta en forma totalmente analítica.

En 1733, Daniel Bernoulli renunció por motivos de salud a la cátedra de matemáticas y Euler fue llamado para remplazarlo. En este mismo año se casó con Catherine Gsell; como fruto de esta unión tuvieron 13 hijos, cinco de los cuales murieron cuando aún eran niños.

En esta primera estancia en San Petersburgo empezó a descollar por su sorprendente capacidad, a tal punto que habiendo leído en su juventud la Eneida de Virgilio podía, no sólo recitarla de memoria sino también era capaz de recordar cuál era el primero y el último renglón de cada página.

Leonhard Euler

Como consecuencia de la exposición por medio de observaciones telescópicas, Euler perdió en 1735 la visión del ojo derecho. En 1741 decidió aceptar la invitación que de tiempo atrás le venía haciendo el rey Federico II para que se vinculara a la cátedra de Ciencia de la Sociedad Científica de Berlín. A su llegada encontró el reino sumido en la primera guerra silica y por tal motivo no fue posible iniciar la cátedra en la Sociedad y se le asignaron tareas como las de escribir e impartir docencia a miembros de familias nobles, entre ellos a la nieta del rey, princesa Filippina von Schwendt. Al ser interrumpidas en 1760 Euler las completó por escrito, naciendo de esta forma sus famosas *Lettres a une princese d'Allemagne (*Cartas a una princesa alemana), obra que es considerada como la primera enciclopedia de física que se haya elaborado. Está compuesta por tres tomos publicados en Rusia, el primero en 1768 y el último en 1772. En ellos además de tratar los temas de mecánica, óptica, acústica y astronomía, estudia también cosmología y moral. Fue tan grande la acogida de estos libros que se tradujeron a siete idiomas.

La astronomía fue considerada como la verdadera profesión de este gran genio. Desde su llegada a San Petersburgo, entabló amistad con Delisle Joseph Nicholas (1688-1768), quien había determinado las coordenadas heliocéntricas de las manchas solares. Es así como en muchos de los aproximadamente quinientos libros y manuscritos de este astrónomo se observa la influencia de Euler a través de la trigonometría esférica, el análisis, y la probabilidad. Juntos encontraron, después de observaciones tomadas todos los días durante diez años, el instante exacto del medio día.

En la memoria titulada *Methodus Computandi Aequationem Meridiei* publicada en 1735, Euler encontró un algoritmo para calcular las tablas de la ecuación meridional del sol.

En 1747 publicó una memoria titulada: *Recherches sur le mouvement des corps celestes*, en la cual resolvió el denominado problema inverso de Newton; es decir, a partir de la segunda ley de la dinámica y de la ley de gravitación universal, dedujo la primera ley de Kepler.

Sus biógrafos lo describen como un hombre sencillo, amante de la vida hogareña, poco dado a las costumbres de los altos círculos sociales, a quien no le atraían las largas conversaciones, lo cual trajo como consecuencia que sus relaciones con el ambiente que rodeaba a la monarquía de Prusia se fueran enfriando. De ahí que sus 24 años de permanencia en Berlín perdieran paulatinamente su encanto. Estos hechos sumados a su posición antileibnitziana manifestada en algunos de sus escritos, fueron creándole un ambiente intolerable, que lo condujo en 1766 a retornar nuevamente a San Petersburgo en donde es nombrado por Catalina II director de la Academia.

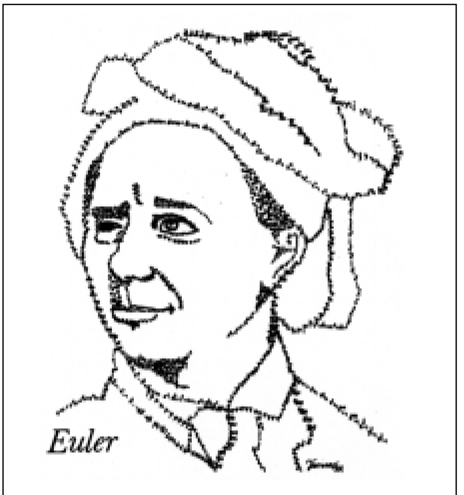
En 1776 perdió la visión del ojo izquierdo y enviudó en el mismo año. En 1777 se casó nuevamente con una media hermana de su anterior esposa y, a pesar de su ceguera, continuó su extraordinaria producción, hasta el 18 de septiembre de 1783, día en el que murió.

Leonhard Euler es considerado el matemático más prolífico que ha existido; desde 1911 se viene trabajando en la publicación de su obra completa; hasta 1945 sólo se habían publicado 72 volúmenes. Los cálculos más pesimistas afirman que publicó como mínimo 760 trabajos de investigación, y a su muerte dejó inéditos muchos de sus artículos. Aun en la actualidad no se conocen cerca de 3.000 páginas de sus escritos. La siguiente frase de Condorcet (Bell, 1955), refiriéndose a Euler, es un fiel reflejo de su creatividad:

> *"Multiplicó sus producciones más allá de lo que hubieran osado alcanzar las fuerzas humanas y, sin embargo, fue original en cada una de ellas".*

EL MÉTODO Ω DE EULER

Las justificaciones de los algoritmos empleados en los siglos XVII y XVIII se daban en que generalmente conducían a resultados aceptables; el fin parecía justificar los medios. Las sumas de potencias fueron una importante herramienta para obtener resultados en matemáticas en estos dos siglos; las manipulaban como si fueran polinomios, sin que se le prestara mucho cuidado a la convergencia. De hecho, Euler y muchos otros matemáticos de esa época, conscientemente emplearon sumas divergentes con gran ventaja. Los resultados obtenidos fueron importantes, pero los errores y las paradojas eran inevitables (Bolzano, 1991) debido principalmente al querer aplicar a las sumas infinitas, los procedimientos de la aritmética finita, ya que en esta última se pueden quitar y poner paréntesis a voluntad agrupando los términos como se quiera, mientras que con sumas infinitas este procedimiento, en general, no se puede hacer. A manera de ejemplo veamos la siguiente paradoja debida a Euler:



Euler en símbolos (Ferney Rojas)

Al hacer x = - 1 en

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots,$$

se obtiene

$$\infty = \frac{1}{0} + 2 + 3 + 4 + \ldots . \qquad (1)$$

Al hacer x = 2 en

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots ,$$

se encuentra que

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + . \qquad (2)$$

Como cada sumando de (1) es menor o igual al correspondiente sumando de (2), entonces -1>∞ pero como ∞>1, entonces -1>∞>1. De lo anterior, Euler deduce que ∞ debe ser una especie de límite entre los números positivos y los negativos, y en este sentido se parece al 0 (Castro, 1996).

Así como se llegó a paradojas al manejar las series como si fueran sumas finitas, también se obtuvieron extraordinarios resultados que permitieron desarrollar la matemática, abriendo nuevos campos del conocimiento que posteriormente irían adquiriendo la consistencia lógico-deductiva que les permitirían sustentarse sobre bases suficientemente sólidas. Si los matemáticos se hubieran quedado esperando hasta obtener la absoluta solidez de sus argumentos, no habría sido posible que se lograra el vertiginoso avance que ha tenido esta ciencia. No podemos olvidar que la matemática, como todo organismo vivo, también obedece a las leyes de la evolución y que, en particular, el concepto de "rigor matemático" no ha sido ajeno a este proceso.

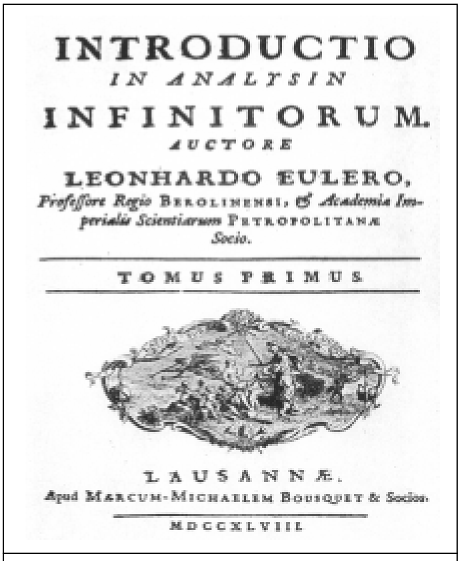
Una manera sutilmente diferente de manejar las series la introdujo Euler, quien aceptaba en forma explícita, la existencia de números naturales infinitos y por supuesto, de números reales infinitamente pequeños e infinitamente grandes; con estas ideas, una serie se convierte en una suma común y corriente:

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots = a_0 + a_1 + \dots + a_\Omega,$$

en donde Ω es un número natural infinito.

En esta forma el infinito potencial, es decir, sumas finitas tan largas como se quieran, se convierten en un infinito actual, es decir, suma hasta Ω.

No sólo por la belleza de sus construcciones, sino también por su importancia y utilidad didáctica, vale la pena conocer algunas de ellas.


INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio Berolinensi, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.
TOMUS PRIMUS.
LAUSANNÆ,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLVIII.

Portada de la obra
Introductio in Analysin Infinitorum

En el capítulo VII de su obra *Introductio in Analysin Infinitorum*, introduce el número e de la siguiente manera (Castro, 1996):

Como

$$a^0 = 1$$

entonces para un valor infinitamente pequeño

$$a^{\epsilon} = 1 + k\,\varepsilon.$$

Si x es un número positivo,

$$\varepsilon = \frac{X}{\Omega}$$

es un número infinitamente pequeño. Luego,

$$a^x = a^{\Omega\varepsilon} = (a^{\varepsilon})^{\Omega} = (1 + k^{\varepsilon})^{\Omega}$$

Aplicando la propiedad binomial de Newton, se obtiene

$$a^x = \left(1 + \frac{kx}{\Omega}\right)^{\Omega} \tag{1}$$

esto es,

$$a^x = 1 + \Omega\left(\frac{kx}{\Omega}\right) + \frac{\Omega(\Omega\text{-}1)}{2!}\left(\frac{kx}{\Omega}\right)^2$$

$$+ \ldots + \frac{\Omega\,(\Omega\text{-}1)\ldots(\Omega\text{-}n\text{+}1)}{n!}\left(\frac{kx}{\Omega}\right)^n + \ldots +$$

$$\frac{\Omega\,(\Omega\text{-}1)\ldots 1}{\Omega!}\left(\frac{kx}{\Omega}\right)^\Omega$$

$$= 1 + \frac{k}{1!}\,x + \frac{\Omega\text{-}1}{\Omega}\,\frac{k^2}{2!}\,x^2 + \ldots + \ldots\frac{\Omega\text{-}1}{\Omega}\;\frac{\Omega\text{-}2}{\Omega}$$

$$\ldots\frac{\Omega - n + 1}{\Omega}\left(\frac{k^n\,x^n}{n!}\right) + \ldots + \left(\frac{k^\Omega\,x^\Omega}{\Omega^\Omega}\right)$$

Como Ω es un número natural infinito, entonces $1/\Omega$ es infinitamente pequeño.

A continuación Euler empleó el axioma que después se conoció con el nombre de *"principio de L'Hopital"* que, establece lo siguiente:

> *«Se pide que se puedan tomar indistintamente una por la otra a dos cantidades que no difieran entre sí más que por una cantidad infinitamente pequeña, o (lo que es lo mismo) que una cantidad que no se incrementa ni se haga disminuir más que por otra cantidad infinitamente menor que ella, pueda considerarse como que permanece siendo la misma"* (L'Hopital, 1998), se concluye que

$$1 = \frac{\Omega\text{-}1}{\Omega} = \frac{\Omega\text{-}2}{\Omega} = \ldots = \frac{\Omega\text{-}j}{\Omega} = \ldots.$$

De donde,

$$a^x = 1 + \frac{x}{1!}\,k + \frac{x^2}{2!}\,k^2 + \ldots + \frac{x^n}{n!}\,k^n + \ldots + \left(\frac{k^\Omega\,x^\Omega}{\Omega!}\right)$$

Como k y x son cantidades reales, entonces

$$\frac{k^\Omega}{\Omega!}\,x^\Omega$$

es infinitamente pequeña y así, nuevamente por el principio de L'Hopital:

$$a^x = 1 + \frac{x}{1!}\,k + \frac{x^2}{2!}\,k^2 + \ldots + \frac{x^n}{n!}\,k^n + \ldots \qquad (2)$$

Substituyendo x por 1, se define el número e como el valor de a para el cual k=1; esto es,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Remplazando en (1) se obtiene:

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{\Omega}\right)^\Omega$$

en donde, como ya se dijo, el número natural Ω es infinitamente grande.

La ecuación (3) se interpreta actualmente como la conocida fórmula:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Así,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Como k=1 la ecuación (2) se transforma en:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

En este mismo capítulo Euler demuestra que:

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to\infty} n[(1+x)^{1/n} - 1]$$

y además que,

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{y^n}{n}.$$

A continuación se mostrará cómo lo hizo (Castro, 1996).

Euler tomó

$y = a^x - 1,$

por lo tanto

$1 + y = a^x = a^{\Omega\xi} = (1 + k\xi)^\Omega$.

Luego:

$1 + k\xi = (1 + y)^{1/\Omega}$

y así, $\xi = \dfrac{(1 + y)^{1/\Omega} - 1}{k}$

Pero $1 + y = a^x$, entonces: $\log_a (1 + y) = \Omega\xi$, de donde: $\log_a (1 + y) = \dfrac{\Omega}{k} [(1 + y)^{1/\Omega} - 1]$.

En particular, si a = e, entonces k=1 y, por lo tanto, esta expresión se transforma en:

$$\ln (1 + y) = \Omega \ [(1 + y)^{1/\Omega} - 1] . \tag{4}$$

Esta ecuación la interpretamos ahora como:

$$\ln (1+y) = \lim_{n\to\infty} n[(1+y)^{1/n} - 1]$$

Es claro, que si z =1+y, y m = 1/n, la anterior ecuación se transforma en:

$$\ln (z) = \lim_{m\to 0} \left(\frac{z^m - 1}{m}\right)$$

Por otra parte, utilizando nuevamente la serie binomial, resulta:

$$(1 + y)^{1/\Omega} = 1 + \frac{1}{\Omega} y + \frac{\frac{1}{\Omega}\left(\frac{1}{\Omega} - 1\right)}{2!} y^2 + \frac{\frac{1}{\Omega}\left(\frac{1}{\Omega} - 1\right)\left(\frac{1}{\Omega} - 2\right)}{3!} y^3 + \ldots .$$

Pero como Ω es infiniamente grande, entonces (según el principio de L'Hopital)

$$\frac{1}{\Omega} - k = - k, \forall\, k \in Z_+ ,$$

luego:

$$\Omega [(1 + y)^{1/\Omega} - 1] = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{y^n}{n} + \ldots .$$

Remplazando en (4) se obtiene:

$$\ln(1 + y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} y^n.$$

Es claro que, Euler no se preocupó por determinar para qué valores son, o no, convergentes las series que obtuvo, a pesar de que su amigo Daniel Bernoulli, lo había prevenido acerca de este peligro.

Aunque Newton y otros matemáticos anteriores a Euler ya habían encontrado el desarrollo en series de potencias de las funciones seno y coseno, Euler las obtuvo por otro camino.

Sea ξ un número infinitamente pequeño y N un número infinitamente grande (y entero positivo), de tal manera que $N\xi$ sea una cantidad real x. Por la identidad de De Moivre se tiene que

$$\cos (N\xi) = \frac{1}{2} [(\cos\xi + i \operatorname{sen}\xi)^N + (\cos\xi - i \operatorname{sen}\xi)^N] \tag{5}$$

y

$$\operatorname{sen} (N\xi) = \frac{1}{2i} [(\cos\xi + i \operatorname{sen} \xi)^N - (\cos\xi - i \operatorname{sen}\xi)^N] \tag{6}$$

Euler utiliza a continuación el desarrollo binomial y elimina términos de signos contrarios para así obtener:

$$\cos(N\xi) = \cos^N\xi - \frac{N(N-1)}{2!} \cos^{N-2}\xi \operatorname{sen}^2\xi + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4!} \cos^{N-4}\xi \operatorname{sen}^4\xi - \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)(N-6)}{6!} \cos^{N-6}\xi \operatorname{sen}^6\xi + \ldots$$

y

$$\operatorname{sen}(N\xi) = N \cos^{N-1}\xi \operatorname{sen}\xi - \frac{N(N-1)(N-2)}{3!} \cos^{N-3}\xi \operatorname{sen}^3\xi + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)}{5!} \cos^{N-5}\xi \operatorname{sen}^5\xi - \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)(N-6)}{7!} \cos^{N-7}\xi \operatorname{sen}^7\xi + \ldots$$

Como ξ es muy pequeño, por el principio de L'Hopital, $\cos(\xi) = \cos(0)=1$, y $\operatorname{sen}(\xi)$ lo identifica con ξ; dado que N es infinitamente grande nuevamente por el principio de L'Hopital, $N = N-1 = N-2 = \ldots$; y así se obtiene:

$$\cos x = 1 - \frac{\xi^2N^2}{2!} + \frac{\xi^4N^4}{4!} - \ldots \text{ y } \operatorname{sen} x = \xi N - \frac{\xi^3N^3}{3!} + \frac{\xi^5N^5}{5!} - \ldots$$

esto es,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \text{ y } \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + - \ldots$$

En *Introductio in Analysin Infinitorum*, una de las obras más conocidas de Euler y de mayor influencia tanto en la matemática como en la educación matemática, encuentra nuevas relaciones para las funciones trigonométricas a partir de la exponencial compleja de la siguiente manera:

En (5) y (6) hace $\cos\xi = 1$, $\operatorname{sen}\xi = \xi$ y $x= \xi N$, así obtiene:

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left[\left(1 + i\frac{x}{N}\right)^N + \left(1 - i\frac{x}{N}\right)^N\right]$$

y

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2i}\left[\left(1 + i\frac{x}{N}\right)^N + \left(1 - i\frac{x}{N}\right)^N\right]$$

pero, por ser N un número infinitamente grande se tiene que:

$$\left(1 + i\frac{x}{N}\right)^N = e^{ix} \quad \text{y} \quad \left(1 - i\frac{x}{N}\right)^N = e^{-ix}.$$

Por lo tanto:

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \text{ y } \operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right).$$

Es obvio, que aunque los métodos que se han presentado fueron los seguidos por Euler, la notación no es la misma que él utilizó.

En un artículo publicado en 1740, partió de la serie (Castro, 1996):

$$y = \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n + \ldots .$$

Supuso que y no es cero, y construyó la ecuación:

$$1 - \frac{x}{y} + \frac{x^3}{3!y} - \ldots + \frac{x^{2n+1}(-1)^{n-1}}{y(2n+1)!} + \ldots = 0. \quad (1)$$

A continuación, tomó el polinomio:

$f(x) = 1 - a_1 x + \ldots + (-1)^n a_n x^n$. Con $a_n \neq 0$.

Entonces,

$$f(x) = (-1)^n a_n\left(x^n - \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n} x + (-1)^n\frac{1}{a_n}\right)$$

Si α_1 , … , α_n son las raíces del polinomio f(x), se tiene que:

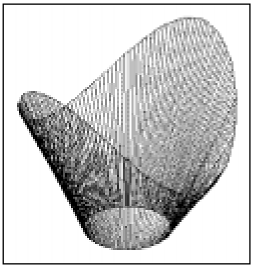
$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = \frac{1}{a_n} \quad y \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\prod_{i=1}^{n} \alpha_i}{\alpha_j} = \frac{a_1}{a_n}$$

de donde,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\frac{1}{a_n}}{\alpha_j} = \frac{a_1}{a_n}$$

luego,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j} = \alpha_1. \qquad (2)$$



Por otra parte,

$$a_1^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j}\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j^2} + 2 \sum_{i<j} \frac{1}{\alpha_i \alpha_j}. \qquad (3)$$

Pero,

$$\frac{1}{a_n} \sum_{i<j} \frac{1}{\alpha_i \alpha_j} = \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\left(\sum_{i<j} \frac{1}{\alpha_i \alpha_j}\right)$$

$$= \sum_{i_1 < \dots < i_{n-2}} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{n-2}}$$

$$= \frac{a_2}{a_n} .$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i<j} \frac{1}{\alpha_i \alpha_j} = a_2 .$$

Remplazando en (3) y despejando, obtuvo que:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j^2} = a_1^2 - 2\, a_2 .$$

Por otra parte,

$$f(x) = (-1)^n a_n (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$$

$$= (-1)^n a_n (-1)^n \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right)$$

Por consiguiente,

$$1 - a_1 x + \dots + (-1)^n a_n x^n = \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right). \qquad (5)$$

Si $\alpha_{1,}$ $\alpha_{2,}$ … , α_N (N es un número natural infinitamente grande) son las infinitas soluciones de la ecuación (1), supuso que se podía extender el resultado de (5), y expresó

$$1 - \frac{x}{y} + \frac{x^3}{3!y} - \dots + \frac{(-1)^{2N+1} x^{2N+1}}{(2N+1)!y}$$

$$= \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{\alpha_N}\right).$$

Si x = A es una solución de (1), es decir, si sen(A) = y, entonces, las otras soluciones de (1) son de la forma $2n\pi + A$, y también $(2n + 1)\pi + A$, para todo n entero.

Euler consideró también que podía extenderse la fórmula (2) al caso infinito. En particular, para la ecuación (1) se tiene que

$$a_1 = \frac{1}{y};$$

por lo tanto:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\alpha_j} = \frac{1}{y}.$$

Ordenando las raíces convenientemente, obtuvo:

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n\pi + (-1)^n A} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\pi + (-1)^{n+1} A} = \frac{1}{y}. \qquad (6)$$

La fórmula (4) también la extendió al caso infinito, y como en (1), $a_2 = 0$, entonces,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n\pi + (-1)^n A)^2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n\pi + (-1)^{n+1} A)^2} = \frac{1}{y^2}. \qquad (7)$$

También (6) puede escribirse en la forma:

$$\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2n\pi+A}+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(2n+1)\pi-A}\right)$$

$$-\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n\pi-A}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n+1)\pi+A}\right)=\frac{1}{y}$$

Si $A=\frac{\pi}{2}$, resulta que y = 1, remplazando estos valores en (6), y teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{(2n+1)\pi-\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n+1}$$

y

$$\frac{1}{(2n-1)\pi+\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n-1}$$

se tiene la fórmula:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{4n+1}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n-1}=1$$

Nuevamente, reordenando los sumandos, Euler obtiene:

$$\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots\frac{(-1)^N}{2N+1}\right)=1,$$

de donde,

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4} \qquad (8)$$

Aplicando el principio de L´Hopital, la ecuación (8) se escribe:

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

Procedió en forma semejante con (7) y, teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left((2n+1)\pi-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{1}{\pi^2\,(4n+1)^2}$$

y, que además:

$$\frac{1}{\left((2n-1)\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{8}{\pi^2\,(4n+1)^2}.$$

obtuvo:

$$\frac{8}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{(2N+1)^2}\right)=1.$$

Luego,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8} \qquad (9)$$

En forma similar al método que siguió para obtener las series (8) y (9), encontró otras fórmulas, como por ejemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^5}=\frac{5\pi^5}{1536}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$$

El valor de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ lo obtuvo de la siguiente manera (Castro, 1996).

Si $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$, entonces,

$$S-\frac{\pi^4}{96}=S-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^4}.$$

Luego

$$S-\frac{\pi^4}{96}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}$$

$$=\frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$=\frac{1}{16}S$$

Así

$$\frac{15}{16}S = \frac{\pi^4}{96}\ .$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Otro procedimiento interesante fue el que empleó para calcular un desarrollo en serie de la función cotangente.

Euler extendió la ecuación (5) al caso de series de números reales, de la siguiente manera:

Si los puntos en donde se anula la serie

$1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n x^n$ son $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, entonces,

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n x^n = \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)\cdots\ .$$

Como

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

y los puntos donde se anula esta serie son, $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$,

entonces,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{k\pi}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x}{k\pi}\right)$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Luego,

$$\ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

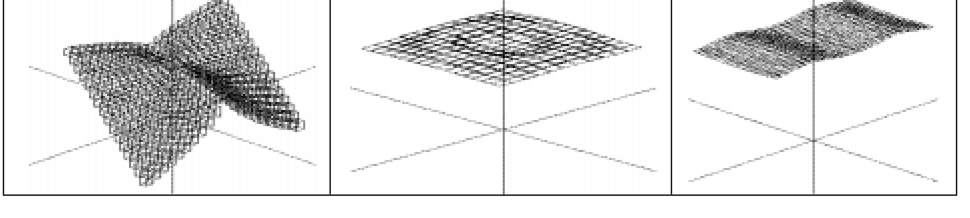
Derivando esta ecuación se obtiene:

$$\cot(x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

por lo tanto,

$$\cot(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}\ .$$

Como se vio anteriormente, el tratamiento de las series como sumas finitas no siempre era exitoso y, por el contrario, en muchas ocasiones condujo a paradojas. Este hecho trajo como consecuencia que varios matemáticos y filósofos, entre ellos el obispo Berkeley con su obra *Discourse Addressed to an Infidel Mathematician* (1734) empezaran a cuestionar este método. Esta crítica condujo a que se introdujera un nuevo enfoque a partir del concepto de límite. Entre los más destacados artífices de esta nueva forma de abordar los problemas, están Gauss, Abel, Cauchy (Cauchy, 1994), Kummer y Dirichlet. El éxito de este nuevo enfoque condujo "desafortunadamente" al abandono de los métodos empleados por Leibniz, Euler y otros matemáticos, los cuales empiezan a retomarse, nuevamente, dos siglos después a partir de la creación del análisis no-estándar y de la geometría diferencial sintética.



DIDÁCTICA EULERIANA

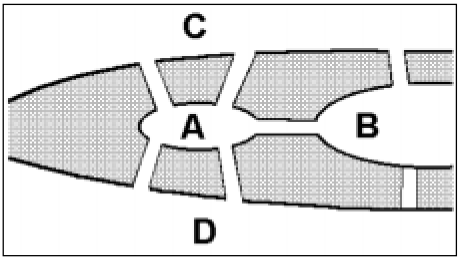
Los métodos empleados por Euler para hacer matemáticas además de ser ingeniosos, constituyen una poderosa herramienta de la didáctica de las matemáticas no sólo porque nos demuestran que es posible llegar a resultados interesantes con muy pocas herramientas matemáticas, sino también, porque son una importante fuente de ideas acerca de la manera como se deben enfrentar los problemas de esta ciencia. Euler no sólo fue un gran innovador, sino además un excelente reformador, pues, reformuló resultados ya conocidos y propuso técnicas nuevas para deducirlos. Veamos algunos ejemplos:

DIDÁCTICA EULERIANA DE LA GEOMETRÍA

Ejemplo 1:

Uno de los problemas más populares que resolvió este genio, fue el denominado de Los Siete Puentes de Königsberg. Por la forma sorprendente de enfocarlo, por la belleza lógica que encierra la argumentación euleriana y por el hecho de ser uno de los primeros problemas que se conocen en donde se demuestra "que algo no se puede hacer", este problema ha sido considerado como un modelo de razonamiento lógico-deductivo.

El asunto es el siguiente: por la ciudad de Königsberg pasa el río Pregel, al cual pertenecen dos islas que están comunicadas entre sí y con los márgenes del río por siete puentes como se ilustra a continuación.



El problema consiste en determinar si es posible trazar un recorrido que pase por cada puente una y sólo una vez. Euler logró demostrar en una memoria publicada en San Petersburgo en 1736, que esto no puede hacerse. El análisis que empleó sirvió para iniciar el desarrollo de varias nuevas ramas de la matemática, entre ellas la Teoría de Grafos y la Topología Combinatoria. Por ser el método que empleó, una forma de razonamiento que permite ilustrarnos acerca de su ingeniosa forma de razonar, vamos a presentarlo.

Denotó con las letras A, B, C y D, las cuatro regiones en que queda dividida Königsberg por el río, como se indica en el gráfico. Si una persona va de la región A a la C independientemente de si usa un puente o el otro, notamos este paso por AC. Si después va de C a D notamos CD; para indicar que se han realizado ambos pasos notamos ACD.

De la misma forma la expresión CADBAD, indica que la persona partió de C hasta A, siguió de A a D, luego de D a B, después de B a A y por último de A a D. Para hacer este recorrido tuvo que pasar por cinco puentes. En general, si el recorrido que siguió una persona está indicado por n de estas letras (A, B, C y D), es porque tuvo que pasar por n-1 puentes. Por lo tanto:

El paso por los siete puentes de Konigsberg, requiere de

ocho letras para designarlo (1)

Por otra parte, si a una región E conducen por ejemplo siete puentes y una persona desea realizar un recorrido que incluya estos siete puentes de tal manera que pase sólo una vez por cada uno, entonces en la secuencia de letras que denota el camino recorrido aparecerá exactamente cuatro veces la letra E, por lo siguiente:

Supongamos que empezó el recorrido por fuera de E y notemos F la parte exterior a E.

Inicialmente hace el recorrido FE pasando por un primer puente. Como tiene que salir, hace el recorrido EF pasando por un segundo puente; de tal forma que aunque ha pasado por dos puentes, sólo aparece una vez la letra E.

Más adelante tendrá que realizar el recorrido FE pasando por un tercer puente y necesariamente hará EF pasando por un cuarto puente; aquí nuevamente ha agotado dos puentes pero sólo ha agregado una sola letra E a la secuencia que denotará el trayecto.

Tarde o temprano tendrá que hacer FE pasando por un quinto puente y lógicamente EF pasando por un sexto puente. Nuevamente se tiene que se han recorrido dos puentes más y se ha agregado una sola letra E.

Finalmente tendrá que hacer FE, pasando por el último puente y agregando una letra E a la secuencia.

De lo anterior se desprende que el número de veces que aparece la letra E en la secuencia es cuatro. Si se hubiera iniciado el recorrido en E, el resultado sería idéntico.

En general, aplicando el mismo procedimiento podemos darnos cuenta que si existen 2n + 1 puentes que comunican a E con F, el número de veces que aparece la letra E en la secuencia es n + 1.

Aplicando esto al caso de los puentes de Königsberg, podemos observar que si fuera posible hacer el recorrido pasando por cada puente una y sólo una vez, entonces, como a C llegan tres puentes, el número de veces en que aparece C en la secuencia será dos.

Como a A llegan cinco puentes, el número de veces en que aparece A en la secuencia es tres. De la misma forma a D y B llegan respectivamente tres puentes, entonces el número de veces en que aparece cada una de estas dos letras en la secuencia es dos.

De donde, el recorrido por los siete puentes de Königsberg requiere de nueve letras para designarlo, lo cual contradice (1).

Ejemplo 2:

En 1748 Euler publicó la memoria *Variae Demonstrationes Geometriae*, en la cual da una prueba sintética, es decir, dentro del espíritu euclidiano, de la fórmula de Herón que establece lo siguiente:

Si ΔABC tiene lados a, b y c y semiperímetro $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

Entonces el área de ΔABC es $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Demostración (Dunham, 1999):

Dado el ΔABC se construye la circunferencia inscrita de centro en O punto de concurrencia de las bisectrices del triángulo dado. Constrúyase desde A la perpendicular a la recta BO, la cual se intercepta en el punto V. Llamemos N al punto de intersección de las rectas AV y SO, esta última perpendicular a la recta AB.

Como $\angle AOV$ es exterior al ΔAOB, se tiene la siguiente ecuación:

$$\angle AOV = \angle OAB + \angle OBA \qquad (1)$$

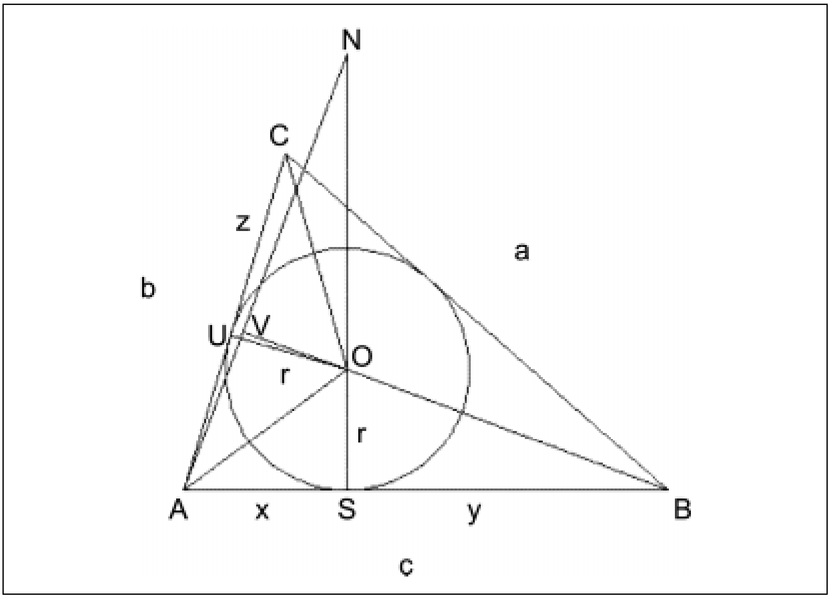
Como ΔAOV es rectángulo entonces

$$\angle AOV + \angle VAO = \angle 90°. \qquad (2)$$

Se tiene:

$$\angle OAB = \frac{1}{2}\angle CAB = \frac{\alpha}{2},$$

$$\angle OBA = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{\beta}{2} \qquad (3),$$



Haciendo

$\gamma = \angle ACB,$

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° \,. \qquad (4)$$

De (1) y (2) se sigue que

$$\angle OAB + \angle OBA + \angle VAO = \angle\, 90°. \qquad (5)$$

De (3), (4) y (5) se sigue que

$$\angle VAO = \frac{\gamma}{2} \qquad (6)$$

Trácese la perpendicular OU a la recta AC, como

$$\angle ACO = \angle UCO = \frac{\gamma}{2},$$

de (6) se sigue que los triángulos rectángulos ΔOAB y ΔOCU son semejantes, en consecuencia,

$$\frac{AV}{VO} = \frac{CU}{OU} = \frac{z}{r} \qquad (7)$$

las siguientes parejas de triángulos son semejantes:

$\Delta NOV \equiv \Delta NAS$, $\Delta NAS \equiv \Delta BAV$ y $\Delta NOV \equiv \Delta\ BAV$,

por lo tanto:

$$\frac{AV}{OV} = \frac{AB}{ON} \,. \qquad (8)$$

De (7) y (8) se concluye que

$$\frac{z}{r} = \frac{AB}{ON} = \frac{x+y}{SN\text{-}r}$$

y así,

$z(SN) = r\,(x+y+z) = rs.$

Como los ángulos BOS y VON son congruentes, entonces ΔNAS es semejante al ΔBOS, y en consecuencia,

$$\frac{SN}{AS} = \frac{BS}{OS}\,,$$

por lo tanto,

$$\frac{SN}{x} = \frac{y}{r}\,,$$

es decir

$$SN = \frac{xy}{r}.$$

Utilizando las identidades anteriores se concluye que

$$\text{Área } (\Delta ABC) = r\, s = \sqrt{(rs(rs))} = \sqrt{(z(SN)(rs))}$$

$$= \sqrt{\frac{(z(xy)rs)}{r}}$$

$$= \sqrt{(sxyz)} = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

que era lo que se quería demostrar.

DIDÁCTICA EULERIANA DE LA ARITMÉTICA

La principal afición de Euler fue la aritmética. A ella dedicaba sus ratos libres, de ahí la gran cantidad de resultados que obtuvo, pero el legado más importante que nos dejó fue su riqueza argumental. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1:

En 1737 Euler dio otra prueba de la existencia de infinitos números primos. El método que empleó fue el siguiente:

Supóngase que sólo hay un número finito de primos. Sean éstos

$p_1, \ldots, p_n$, con $p_j > 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n$ y $p_i \neq p_j$ $\forall i \neq j$.

Sea m>1 un entero. Por el teorema fundamental de la aritmética, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in N$ tales que

$$m = \exp(p_1, \alpha_1)\exp(p_2, \alpha_2) \ldots \exp(p_n, \alpha_n),$$

donde

$$\exp(p, \alpha) = p^{\alpha}$$

Si

$$\alpha = \max\ \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\},$$

entonces

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} < \left(\sum_{j=0}^{\alpha} \frac{1}{P_1^j}\right)\left(\sum_{j=0}^{\alpha} \frac{1}{P_2^j}\right) \cdots \left(\sum_{j=0}^{\alpha} \frac{1}{P_n^j}\right)$$

Pero, como:

$$\sum_{j=0}^{\alpha} \frac{1}{P_k^j} = \frac{1-P_k^{-\alpha-1}}{1-P_k^{-1}} < \frac{Pk}{Pk-1} \quad \forall k \in I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$$

entonces,

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} < \prod_{k=1}^{n} \frac{P_k}{P_k - 1}.$$

Pero esto es una contradicción, ya que la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} + \ldots,$$

llamada armónica, es divergente, y por lo tanto, no se puede suponer que hay un número finito de primos.

El procedimiento empleado en esta demostración, así como también otros resultados publicados posteriormente, dieron origen a la hoy denominada *Teoría Analítica de Números*, en la cual se utilizan las series como una de las herramientas para determinar propiedades de los números naturales.

Ejemplo 2:

Sean

$$p = \{p \in Z \mid p \text{ es primo}\}, \text{ y } \xi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s};$$

Euler probó que

$$s = \sum_{p \in p} \frac{1}{p}$$

es una serie divergente y que

$$\xi(s) = \prod_{p\in \mathcal{p}} \left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right), \forall s > 1. \qquad (5)$$

La demostración de que S diverge, la hizo basándose en que

$$\forall p > 1, \quad \frac{1}{1-p^{-1}} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^m} + \ldots$$

Como

$$\mathcal{p} = \{2, 3, 5, \ldots, p_n, \ldots\},$$

entonces,

$$\frac{1}{1-2^{-1}}\,\frac{1}{1-3^{-1}}\,\frac{1}{1-5^{-1}} \cdots \frac{1}{1-P_n^{-1}} > \sum_{k=1}^{P_n} \frac{1}{k}$$

$$> \int_1^{P_{n+1}} \frac{dx}{x}$$

$$\geq \ln(P_n+1)$$

$$> \ln(P_n).$$

Luego,

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{P_n}\right) < \frac{1}{\ln(P_n)}.$$

Por lo tanto:

$$\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \ln\left(1-\frac{1}{P_n}\right)$$

$$< -\ln(\ln(P_n)).$$

Como la función f(x) = 2x - ln(1 + x) empieza a crecer a partir de -1/2

entonces

$$f\left(-\frac{1}{P}\right) < f(0), \forall p \in \mathcal{p}.$$

Luego

$$-\frac{2}{P} < \ln\left(1-\frac{1}{P}\right), \forall p \in \mathcal{p}.$$

Por lo tanto,

$$-\frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \ldots - \frac{2}{P_n} > -\ln(\ln P_n).$$

De donde,

$$\sum_{\substack{p\in \mathcal{p}\\ P<P_n}} \frac{1}{P} > \frac{1}{2}\ln(\ln P_n).$$

Como existen infinitos primos y

$$\lim_{m\to\infty} \ln(\ln(m)) = \infty,$$

entonces, la serie S diverge. La divergencia de la serie anterior implica en particular que existen infinitos primos, luego si se demuestra independientemente que esta serie es divergente, se tendría otra prueba de que el conjunto de todos los números primos es infinito.

Para demostrar que

$$\xi(s) = \prod_{p\in \mathcal{p}} (1-p^{-s})^{-1}$$

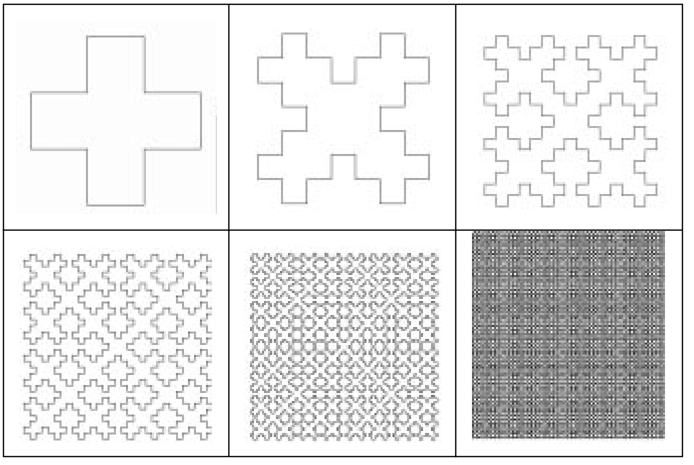
procedió de la siguiente manera (Takeuchi, 1980), (Castro, 1996).

$$\prod_{p\in \mathcal{p}} (1-p^{-s})^{-1} = \prod_{p\in \mathcal{p}} \left(1 + \frac{1}{P^s} + \ldots + \frac{1}{P^{ks}} + \ldots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \xi(s).$$

Esta prueba requiere de una sólida justificación para cada uno de sus pasos. Euler no la dio y por esto cayó en el error de suponer que era válida para s = 1; Kronecker en 1875 demostró que esta fórmula es válida sólo para s > 1.



Ejemplo 3:(Castro, 2005)

Pierre de Fermat (1601-1665) afirmó que todos los números de la forma

$F_n = 2^{2^n} + 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$,

son primos. Este hecho es cierto para n = 0, 1, 2, 3 y 4, ya que:

$F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ y $F_4 = 65537$,

pero en 1732 Euler demostró que

$F_5 = 2^{2^5} + 1$ es compuesto. Veamos cómo lo hizo:

Como $641 = 625 + 16 = 5^4 + 2^4$,

entonces 641 divide a cualquier múltiplo de $5^4 + 2^4$, en particular

$$641 \mid (5^4 + 2^4)2^{28}, \qquad (1)$$

Pero $641 = 5 \times 2^7 + 1$, Entonces

$641 \mid (5 \times 2^7 + 1)(5 \times 2^7 - 1)$.

Luego $641 \mid (5^2\, 2^{14} - 1)(5^2 2^{14} + 1)$

esto es

$$641 \mid 5^4 2^{28} - 1. \qquad (2)$$

De (1) y (2) se desprende que

$641 \mid (5^4\, 2^{28} + 2^{32}) - (5^4\, 2^{28} - 1)$

De donde

$641 \mid 2^{32} + 1$,

es decir

$641 \mid F_5$.

El anterior ejemplo ilustra muy bien la habilidad de Euler para realizar cálculos y a la cual se refería Dominique Francois Arago (1786-1853) (Castro, 1996) cuando afirmaba:

> *"…calculaba sin esfuerzo aparente, como otros hombres respiran o como las águilas se sostienen en el aire".*

Ejemplo 4:

En muchos casos Euler dio varias pruebas de un mismo teorema, con lo cual enseñaba que lo más importante en matemática no es el resultado sino el camino que conduce a éste; así presentó varias demostraciones del denominado Teorema de Fermat, el cual afirma:

Si p es un número primo, b^p-b es divisible por p, $\forall b \in Z$.

En su disertación titulada *Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demostratio* (Demostración de algunos teoremas respecto de números primos), publicada en 1736 dio la primera prueba conocida de este teorema de la siguiente manera:

Como

$$(b+1)^P - b^P - 1 = \sum_{k=1}^{p-1} \binom{P}{k} b^k$$

y p divide a

$$\binom{P}{k} \ \forall k = 1, \ldots, p-1$$

entonces p divide a

$(b+1)^P - b^P - 1$.

Por otra parte, si p divide a

$b^P - b$

entonces, también divide a

$(b+1)^P - (b+1) = (b+1)^P - b^P - 1 + b^P - b$

pero, como p divide

$1^P - 1$,

entonces, también divide a

$2^P - 2$

y en general p divide a

$b^P - b$

En una carta dirigida a Christian Goldbach (1690-1764) en 1742, Euler presenta esta segunda prueba (Castro, 1996):

p divide a,

$$(c+b)^P - c^P - b^P = \sum_{k=1}^{p-1} \binom{P}{k} c^k b^{P-k}$$

Si p divide a,

$c^P - c$ y también *a* $b^P - b$

entonces p divide a

$(c+b)^P - c^P - b^P + c^P - c + b^P - b = (c+b)^P - (c+b)$,

pero como p divide a $b^P - b$

para b=1 y b=2 entonces también lo hace para b=3, continuando así sucesivamente se concluye que para todo número natural b, p divide a $b^P - b$

La tercera prueba del Teorema de Fermat que dio Euler, fue publicada en 1758 y reproducida por Gauss en sus *Disquisitiones Arithmeticae* (Gauss, 1965).

Ejemplo 5:

"El maestro de todos"

Se sabe que un número entero positivo es perfecto si la suma de sus divisores propios es él mismo. En la proposición 36 del Libro IX de los *Elementos*, Euclides demuestra que si un número par tiene la forma

$2^{q-1}(2^q - 1)$,

en donde tanto q como $2^q - 1$ son primos, es perfecto. A Euler se le debe la prueba del recíproco de este teorema. Veamos cómo lo hizo.

Sea a un número perfecto par, existen n y b enteros con $n \geq 1$ y b impar y positivo, tales que $a = 2^n b$.

Pero como $a = \sum_{\left(\substack{d|a \\ d\neq a}\right)} d$

entonces

$$2^n b = \sum_{\left(\substack{d|a \\ d\neq a}\right)} d = \left(\sum_{f|2^n} f\right)\left(\sum_{g|b} g\right) = (2^{n+1}-1)\, B.$$

Entonces

$$\frac{b}{B} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n}\,. \qquad (1)$$

Luego

$$b = (2^{n+1}-1)\frac{B}{2^n} \qquad (2)$$

Si B fuese impar, entonces

$B = (2^{n+1}-1)$

también sería impar, y por lo tanto b no sería entero. De lo anterior se desprende que B es par luego

$B = 2^m h,$

con $1 \leq m$, y h impar; m no puede ser menor que n porque de (2) se desprende que b no sería entero. Luego $m \geq n$ por lo tanto

$$\frac{B}{2^n} = 2^{m-n} h \in Z.$$

Llamando

$$C = \frac{B}{2^n}$$

se tiene de (2) que

$b = (2^{n+1}-1)\, C$

Supongamos que $C>1$, como

$$B = \sum_{g|b} g \geq b+2^{n+1} - 1 + C + 1$$

porque

$b|b$, $(2^{n+1}-1)\,|b$, $C|b$ y $1|b$.

Pero

$b+2^{n+1}-1+C+1 = (2^{n+1}-1)\, C + (2^{n+1}-1)+C+1$
$= 2^{n+1}\,(C+1)$

luego

$B \geq 2^{n+1}(C+1)$

por lo tanto

$$\frac{B}{b} \geq \frac{2^{n+1}(C+1)}{(2^{n+1}-1)\, C} > \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1} = \frac{B}{b}\, 2\,,$$

lo cual es una contradicción. Por consiguiente

$C = 1$, $b = 2^{n+1}-1$ y $a = 2^n(2^{n+1}-1)$.

Si $2^{n+1}-1$ fuera compuesto, entonces

$$\sum_{\left(\substack{d|a \\ d\neq a}\right)} d > (1+2+\ldots+2^n) + (2^{n+1}-1)(1+2+\ldots+2^{n-1}),$$

luego

$$\sum_{\left(\substack{d|a \\ d\neq a}\right)} d > (2^n-1)\, 2^{n+1} + 2^n = (2^{n+1}-1)\, 2^n = a,$$

pero esto es imposible porque a es perfecto. De donde $2^{n+1}-1$

es primo, y además si n+1 fuese compuesto, $2^{n+1}-1$ tendría factores propios, lo cual es falso. En consecuencia, n+1 también es primo.

DIDÁCTICA EULERIANA PARA EL CÁLCULO DIFERENCIAL

Euler abordaba el cálculo diferencial a partir de un enfoque algebraico que le permitía llegar más temprano a resultados prácticos, que empleando los métodos analíticos que posteriormente adoptó la matemática. Si bien es cierto el tratamiento de las series como sumas finitas potencialmente infinitas tiene riesgos, los casos que él trabajó fueron exitosos. El método que siguió fue el siguiente (Edwards, 1982):

Si y=f(x), se define la diferencial leibniziana de esta función como

$dy=f(x+dx)-f(x)$

Dado que dx es muy pequeño y siguiendo el principio de L´Hopital, Euler remplazaba

$(dx)^n$

por 0 si n≥2. Veamos algunos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 1:

Calcular la diferencial leibnitziana de la función

$y = f(x)=x^n$.

$$\begin{aligned} dy &= (x + dx)^n - x^n \\ &= x^n + nx^{n-1}dx + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}(dx)^k - x^n \\ &= nx^{n-1}dx. \end{aligned}$$

Ejemplo 2:

Calcular la diferencial leibnitziana de la función

$y = f(x)=e^x$.

$$\begin{aligned} dy &= e^{x+dx} - e^x. \\ &= e^x (e^{dx} - 1) \\ &= e^x \left((1+dx+ \frac{(dx)^2}{2!} + \ldots + \frac{(dx)^n}{n!} + \ldots) - 1\right) \\ &= e^x\, dx \end{aligned}$$

Ejemplo 3:

Calcular la diferencial leibnitziana de un producto.

Sea y=uv, en donde u=u(x) y v=v(x). Entonces

$$\begin{aligned} dy &= u(x+dx)\, v(x+dx) - u(x)\, v(x) \\ &= u(x+dx)\, v(x+dx) - u(x)\, v(x+dx) + u(x)\, v(x+dx) - u(x)\, v(x) \\ &= (u(x+dx) - u(x))\, v(x+dx) + u(x)\, (v(x+dx) - v(x)) \\ &= du\, v(x+dx) + u(x)\, dv \end{aligned}$$

Pero como du dv = 0, entonces du (v(x+dx) - v(x)) = 0, luego

$du\, v(x+dx) = du\, v(x)$.

Así que

$dy = du\, v(x) + u(x)\, dv$.

Ejemplo 4:

Calcular la diferencial leibnitziana de la función y=f(x)= sen(x).

Como

$$\cos(dx) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (dx)^{2n} = 1$$

y

$$\mathrm{sen}(dx) = dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (dx)^{2n+1} = dx$$

entonces

$$\begin{aligned} dy &= \mathrm{sen}(x+dx) - \mathrm{sen}(x) \\ &= \mathrm{sen}(x) \cos(dx) + \mathrm{sen}(dx) \cos(x) - \mathrm{sen}(x) \\ &= \mathrm{sen}(x) + dx \cos(x) - \mathrm{sen}(x) \\ &= \cos(x)\, dx \end{aligned}$$

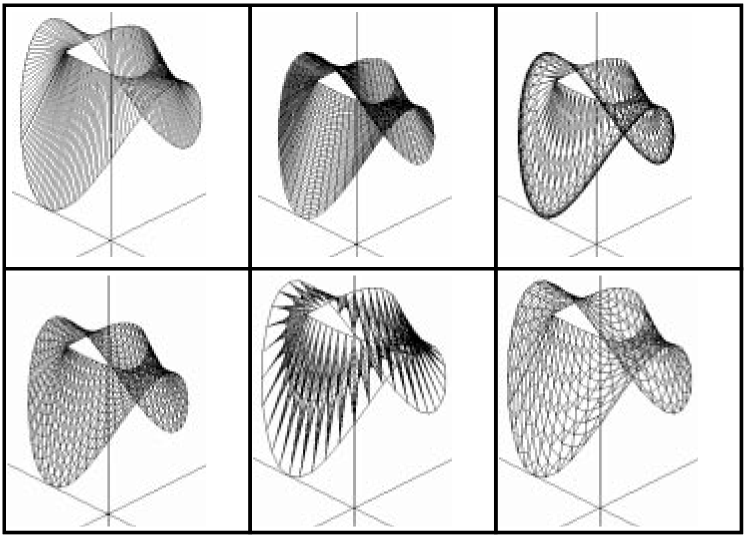
LA TEORÍA Ω

La idea seminal de Euler de asociarle a la sucesión de números naturales un número natural infinito, fue ampliada años después por Agustin Cauchy, quien, partiendo de los números racionales, definió los números reales como colecciones de sucesiones equivalentes (Bravo, 1971). Esta idea fundamental ha sido utilizada desde entonces como una forma alternativa a la definición de Eudoxo-Dedekind para construir los números reales (Bravo, 1971).

Más recientemente Curt Schmieden y posteriormente Detlef Laugwitz (Laugwitz, 1999) emprendieron la tarea de elaborar una fundamentación de las matemáticas a la cual llamaron *cálculo, siguiendo la idea básica de Euler y Cauchy de asociar a cada sucesión una nueva entidad matemática*. Esta propuesta no atrajo la atención de los matemáticos quienes en su gran mayoría, prefirieron seguir las ideas de Abraham Robinson para encontrar una formulación rigurosa de las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes de Leibniz, Euler y Cauchy (Edwards, 1982).

Recientemente (1999), los matemáticos italianos Vieri Benci y Mauro di Nasso (di Nasso, 1999), desarrollaron completamente esta propuesta, superando los inconvenientes señalados por Karel Hrbaceck para la formulación de una fundamentación de la matemática que incluya los objetos ideales que hoy en día se conocen con el nombre de *"cantidades infinitesimales"* y *"cantidades infinitamente grandes"*.

La propuesta de Benci y di Nasso, que ellos han llamado α-*teoría* y que preferimos llamar Ω-*teoría* en homenaje a Euler, es básicamente la siguiente:



Se suponen como términos indefinidos los de pertenencia ($\in$), conjunto (x,y,z,…, A,B,C,) y un operador Ω que actúa sobre sucesiones de conjuntos asignándole a cada sucesión s un nuevo conjunto (s), el cual se llamará *"el elemento ideal determinado por s"*.

Estos términos se manejan según los siguientes axiomas:

1°) Todos los axiomas de la teoría de Zermelo-Frainkel con elección para la pertenencia, sin incluir el axioma de regularidad; recuérdese que el axioma de fundamentación o regularidad es aquél que impide la formación de sucesiones del tipo:

$$\ldots \in x_n \in \ldots \in x_2 \in x_1 \in x_0 \,;$$

en consecuencia, en la Ω -teoría este tipo de sucesiones es permitido.

En los axiomas de separación y de remplazo, se permite el uso del término Ω. Así, para el caso del axioma de separación, si Φ es una proposición en la cual figura eventualmente Ω, y si x es un conjunto, entonces:

$\{y \mid y \in x \wedge \Phi (y, a_1, \dots , a_\eta)\}$

es un conjunto, en donde $a_1, \dots , a_\eta$

son conjuntos dados y Φ tiene exactamente n+1 variables libres.

Con estos axiomas se construyen todos los conjuntos usuales de la práctica matemática como

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

2º) Los axiomas específicos para manejar el operador Ω son los siguientes:

(Ω_1) $\Omega(id_N) \notin \mathbb{N}$.

(Ω_2) Si Cø es la sucesión constante de valor el conjunto vacío ø, entonces $\Omega (C_ø) = ø$.

(Ω_3) Si *s* es una sucesión de conjuntos no vacíos, entonces,
$\Omega(s) = \{\Omega (t) \mid \forall n \in \mathbb{N}\ t(n) \in s(n)\}$

(Ω_4) Si *s*, *t* son sucesiones, y si *u* es la sucesión definida por $u(n) = s(n) \cup t(n)$, entonces, $\Omega(u) = \Omega(s) \cup \Omega(t)$

(Ω_5) Si *s*, *t* son sucesiones que toman valores en un conjunto E y si f es una función de dominio E, entonces de $\Omega(s) = \Omega(t)$ se sigue que

$\Omega(f \circ s) = \Omega (f \circ t)$.

El cuarto axioma es especialmente poderoso pues, en particular, implica lo siguiente:

Si v es una sucesión tal que

$\forall n \in \mathbb{N}\ v(n) \in u(n)$

entonces, existe una sucesión *w* tal que $\Omega(v) = \Omega(w)$ y, o bien

$w(n) \in s(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$, ó, $w(n) \in t(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Esto último motiva la siguiente definición:

Definición 1:

Dos sucesiones s y t son equivalentes si y sólo si $\Omega(s) = \Omega(t)$.

Proposición 1:

Si s, t y u son sucesiones entonces

1) $\Omega(s \cap t) = \Omega(s) \cap \Omega(t)$, en donde $(s \cap t)(n) = s(n) \cap t(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$.
2) Si $u(n) = \{s(n), t(n)\}$ para todo n, entonces $\Omega(u) = \{\Omega(s), \Omega(t)\}$.
3) Si $u(n) = < s(n), t(n) >$ para todo n, entonces $\Omega(u) = < \Omega(s), \Omega(t) >$.
4) Si $u(n) = s(n) - t(n) >$ para todo n, entonces $\Omega(u) = \Omega(s) - \Omega(t)$.
5) Si $u(n) = s(n) \times t(n) >$ para todo n, entonces $\Omega(u) = \{\Omega(s) \times \Omega(t)$.

Proposición 2:

Si C_n es la sucesión constante de valor igual a $n \in \mathbb{N}$, entonces $\Omega(C_n) = n$.

Proposición 3:

Si a es un conjunto finito y C_a es la sucesión constante de valor a, entonces

$\Omega(C_a) = a$.

Proposición 4:

Si s, t son sucesiones entonces:

a) Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N\ s(n) = t(n)$, entonces $\Omega(s) = \Omega(t)$.
b) Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N\ s(n) \neq t(n)$, entonces $\Omega(s) \neq \Omega(t)$.

Definición 2:

a) Si A es un conjunto, $A^* = \Omega(C_A)$, donde C_A es la sucesión constante de valor A.

b) Un conjunto B se dice interno, si existe un conjunto A tal que $B \in A^*$.

El siguiente teorema resume algunas de las propiedades básicas del operador *:

Teorema 1:

Para A, B conjuntos, valen las siguientes propiedades:

1) $\{A, B\}^* = \{A^*, B^*\}$.

2) $A \subseteq B \Leftrightarrow A^* \subseteq B^*$.

3) $A \in B \Leftrightarrow A^* \in B^*$.

4) $A = B \Leftrightarrow A^* = B^*$.

5) $(\cup A)^* = \cup A^*$.

6) $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$.

7) $(A-B)^* = A^* - B^*$.

8) $\langle A, B\rangle^* = \langle A^*, B^*\rangle$.

9) $(A \times B)^* = A^* \times B^*$.

Algunas de las ideas de Euler, de Leibniz, y de quienes utilizan las cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas se pueden justificar plenamente considerando los conjuntos

$\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*$ y $\mathbb{C}^*$,

y utilizando el teorema de transferencia que se explicará a continuación.

Sea υ el universo de John von Neumann es decir, la clase de todos los conjuntos que pertenecen a algún υ_α, α número ordinal, donde estos conjuntos se definen por inducción transfinita de la siguiente manera:

$\upsilon_0 = \Phi$ (en donde Φ = el conjunto vacío).

$\upsilon_{\alpha+1} = \upsilon_\alpha \cup P(\upsilon_\alpha)$,

$\upsilon_\beta = \bigcup_{\alpha\in\beta} \upsilon_\alpha$, para β ordinal límite.

Llamando $\mathcal{I}$ a la clase de los conjuntos internos, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2: *(Teorema de transferencia)*

Si Φ es una proposición en la cual no interviene el operador Ω, y si en Φ sólo figuran cuantificadores acotados, entonces la proposición

$\Phi(a_1, \ldots , a_n)$ vale en el universo υ si y sólo si

$\Phi(a^*_1, \ldots , a^*_n)$ vale en el universo $\mathcal{I}$, $\forall$ $a_1, \ldots , a_n$ del universo υ.

Aplicando este último teorema y todas las propiedades hasta aquí mencionadas, se pueden establecer propiedades que relacionen los conjuntos A del universo de von Neumann, con los conjuntos A* del universo $\mathcal{I}$. A manera de ejemplo, considérese el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales y $\mathbb{R}^*$ de los números reales no estándar; cada número real r, determina un único número no estándar $\Omega(C_r)$, que se puede identificar con r y así, el conjunto $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^*$. Esta contenencia es propia puesto que el número de Euler $\Omega = \Omega(id_N)$ es un número real no estándar diferente de todos los números reales.

Comentario final:

Este trabajo fue presentado por los autores en el *XV Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* y en el *III Encuentro de Aritmética.* (Universidad Pedagógica Nacional, 2004).

LITERATURA CITADA

BELL, E.T. 1955. "Los grandes matemáticos", Editorial Losada, S.A., Buenos Aires.

BOLZANO, B. 1991. "Las paradojas del infinito", traducción del alemán de Luis Felipe Segura, MATHEMA. Facultad de Ciencias UNAM, México.

BRAVO, R. 1971. "Fundamentos de los sistemas numéricos". Editorial Interamericana S.A., México.

CASTRO, I. 1996. "Leonhard Euler", Grupo Editorial Iberoamérica, México.

CASTRO, I. 2005. "Temas de teoría de cuerpos, Teoría de Anillos y Números Algebraicos", t. I, segunda edición, Universidad nacional de Colombia, Bogotá.

CASTRO, I. 1988. *"Niels Henrik Abel". Notas de matemáticas*, No. 25. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 67-89.

CAUCHY, A. 1994. "Curso de análisis", Selección, traducción del francés y notas de Carlos Álvarez Jiménez, MATHEMA. Facultad de Ciencias UNAM, México.

DI NASSO, M. 1999. *"Nonstandard analysis by means of ideal values of sequences". Reuniting the antipodes-constructive and nonstandard views of the continuum. Symposion Proceedings*, San Servolo, Venice, Italy, May 16-22, 63-73.

DUNHAM, W. 1999. "Euler the Master of Us All", *The Dolciani Mathematical Expositions*, Number Twenty-Two, The Mathematical Association of America, Washington.

EDWARDS, C.H., Jr. 1982. "The historical development of the calculus", Springer-Verlag, New York.

GAUSS, C.F. 1995. "*Disquisitiones Arithmeticae*", Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Colección Enrique Pérez Arbeláez, Nº 10, Santa Fe de Bogotá.

L'HOPITAL MARQUÉS DE. 1998. "Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas". Introducción y traducción del francés Rodrigo Cambray Núñez, MATHEMA. Facultad de Ciencias UNAM, México.

LAUGWITZ D. 1999. *"Curt schmieden's Approach to Infinitesimals"*. Reuniting the antipodes- constructive and nonstandard views of the continuum. Symposion Proceedings, San Servolo, Venice, Italy, May 16-22, 127-142.

TAKEUCHI Y. 1980. *Sucesiones y series*, t. I, Limusa Wiley S.A., México.

Recibido: 15.10.2005
Aprobado: 14.03.2006