ISSN 0120-8233

REVISTA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD JAVERIANA

CONTENIDO

EDITORIAL 7

TRABAJOS DE INVESTIGACION 9

Comparación citogenética de dos poblaciones de *Aedes aegypti* en Colombia: Felio Bello, Bertha Ospina de Dulce, Alejandro Giraldo y Sofía Duque 11

Análisis limnológico y concentración de biocidas en peces de los ríos Ariari, Guayuriba, Humea y Meta: John Ch. Donato 29

Perfil lipítico en pacientes renales crónicos hemodializados: Martha Guerra de Muñoz y Ernesto Pachón M. 55

Contribución a los estudios en anélidos Glossoscolécidos de Colombia. Morfología y anatomía de *Martiodrilus crassus:* Giovani M. Iafrancesco V. y Edith Portella 65

Tabla de desarrollo del estado metamórfico en *Hyla labialis:* Eliseo Ladino e Irma Colmenares de Escamilla 85

Anillos de Boole: Carlos Ruiz S. 101

Disminución de danlings bonds sin oxidación: Alfonso Suárez G. 133

Flavonas metoxiladas de tres especies del género *Eupatorium:* Rubén D. Torrenegra, Julio A. Pedrozo, Alvaro Rozo y Jorge E. Robles 141

REVISIONES 153

Presencia de *Achirus novoae* Cervigón (Pisces: Soleidae) en la Orinoquía Colombiana: Germán Galvis y José I. Mojica 155

RESUMENES DE TESIS 161

INSTRUCCIONES PARA LA PRESENTACION DE ARTICULOS 180

Rev. Fac. Cien. UNIV. JAV.	Bogotá, D.E. Colombia	V.I.	Nº 1	Pp. 1-184	Jul.-Dic. 1987	ISSN 0120-8233

ANILLOS DE BOOLE

(Primera Parte)

Por: CARLOS RUIZ SALGUERO

El presente trabajo se realizó con la ayuda de la Universidad Nacional de Colombia y de la Pontificia Universidad Javeriana. Forma parte del proyecto "Una visión algebráica de la topología general" que auspicia la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia.

ABSTRACT

Applaying the theory of adjoint functions and adjoint functors en basic concepts of Boolean Algebra are revised.

RESUMEN

Dentro del marco de la teoría de funciones adjuntas y funtores adjuntos se revisan los conceptos básicos de la teoría de las Algebras Booleanas.

ANILLOS BOOLEANOS

1. INTRODUCCION

Este tema, el de los anillos de Boole, no es nuevo. En 1936 y 1937 aparecieron dos artículos muy completos que resumen la primera parte del trabajo de M. STONE en la materia. A pesar de no ser quien inició el estudio de esta rama del álgebra nos llamó la atención el que, en su trabajo, establezca relaciones entre los anillos de Boole y la Topología. En una de sus publicaciones, la de 1937, asocia a un álgebra de Boole un espacio topológico y caracteriza los espacios así obtenidos. El método establece una equivalencia entre esa categoría de anillos y la correspondiente categoría de espacios.

Es nuestro parecer que se pueden aportar resultados en la dirección indicada por STONE. De manera muy especial con el estudio de una topología que generaliza la usada en su segundo artículo. También podemos afirmar que hoy se dispone de instrumentos y lenguajes que no existían en esa época a saber la teoría de categorías y teoría de haces, que, en principio, deben permitir un tratamiento más general del tema.

En la primera parte de esta serie nos proponemos presentar los elementos de la Categoría **Bo** de los anillos de Boole y establecer su rela-

ción con la categoría de los conjuntos con ayuda de una pareja de funtores adjuntos contravariantes.

Esta revisión termina con una serie de ejemplos generales o digamos mejor de construcciones naturales en los que se agrega de ser posible un análisis de la propiedad universal de la construcción y un estudio de sus elementos minimales.

Hemos dejado para la segunda parte los temas que relacionan de alguna manera la topología con las álgebras de Boole inclusive en la presentación de ejemplos y construcciones.

1. ESTRUCTURA DE ORDEN ASOCIADA A UNA ESTRUCTURA DE ANILLO

a) Definición de la Relación < y Propiedades del Orden.

En un anillo A se define una relación < por medio de la proposición "x<y si y solo si xy=x". En un anillo conmutativo arbitrario esa relación es antisimétrica y transitiva. Evidentemente la reflexividad es equivalente a la propiedad.

$$\text{para todo } x \text{ de } A,\ x^2=x \qquad [B]$$

Cuando un anillo cumple esta propiedad [B] recibe el nombre de anillo **booleano** o anillo del tipo [B]. Dicha propiedad entraña entre otras que la estructura multiplicativa del anillo es conmutativa y que todo elemento es inverso aditivo de sí mismo:

$$\text{para todo } x \text{ en } A,\ x+x=0 \qquad (1)$$

Este hecho se interpreta también diciendo que el cuerpo Z_2 opera sobre el anillo A para convertirlo en un espacio vectorial.

La relación < es compatible con la multiplicación del anillo pero no lo es con respecto a la adición:

$$\text{si } x<y \text{ entonces } zx<zy \qquad (2)$$

Si por ejemplo en A se supone que hay elemento unidad, hecho que no es indispensable para definir el orden, entonces

$$\text{Si } x<y \text{ necesariamente } x+1>y+1 \qquad (3)$$

Evidentemente el hecho de que haya elemento unidad es equivalente a que, para el orden $<$, haya en A un elemento máximo. El elemento mínimo es, en cualquier caso, el cero de la adición.

No sobra decir que si f es un homomorfismo de anillos $f: A \longrightarrow B$ del tipo [B], necesariamente se convierte en aplicación monótona creciente (o mejor no-decreciente):

$$\text{Si } x<y \text{ en A entonces } f(x)<f(y) \qquad (4)$$

Se usa en esta observación la propiedad $f(aa')=f(af(a')$ pero **no** interviene la propiedad $f(a+a')=f(a)+f(a')$.

b) **Extremos Superiores e Inferiores.**

En un anillo de este tipo el orden puede tener serios defectos. Por ejemplo puede haber subconjuntos (no vacíos) U de A para los que no exista el extremo superior y/o el extremo inferior.

Anotemos, sin embargo, que si el anillo tiene elemento unidad entonces la existencia del extremo superior $\alpha=\sup(U)$ asegura la existencia del extremo inferior del conjunto denotado por $1+U=\{1+u \mid u\in U\}$ y además

$$1 + \mathrm{Sup}(U) = \mathrm{Inf}(1+U) \qquad (5)$$

En consecuencia en el caso de anillos uníferos la existencia de extremos superiores para los subconjuntos no vacíos de A asegura la existencia de extremos inferiores, lo cual no quiere decir, como lo veremos en ejemplos posteriormente, que la existencia de elemento unidad baste para asegurar la existencia de los primeros.

En cambio si suponemos que U es un subconjunto finito de A no vacío, sí existen su extremo superior y su extremo inferior: como de costumbre basta considerar U={a,b} y observar que

$$\inf\{a,b\} = ab \qquad (6)$$

$$\sup\{a,b\} = a+b+ab \qquad (7)$$

hecho lo cual proceder por iteración.

c) **Las nociones de Elementos Minimales y de Elementos Maximales**

Recuérdese que en un conjunto ordenado $(X,<)$ se llama **elemento minimal** un elemento m de X tal que el conjunto $\{a\in X \mid a<m,\ a\neq m\}$ es vacío. De manera dual se define **elemento maximal.**

En nuestro caso, el cero de un anillo juega el doble papel de minimal y mínimo. Si retiramos el cero, el subconjunto X=A-{0} podría tener o no elementos minimales. Es más, podría tenerlos sin que fueran suficientes: en un conjunto ordenado hay **suficientes minimales** cuando para cada x de X existe por lo menos un minimal m que cumple m<x.

El estudio de los anillos de Boole A que tienen suficientes minimales, es decir en aquellos en que X=A-{0} los tiene (suficientes) es mas sencillo y quiza más productivo que el caso general. Se denota min(A) el conjunto de los minimales de A-{0}.

También se pueden definir los anillos con suficientes maximales.

En los anillos con elemento unidad se cumple

x es minimal si y solo si 1+x es maximal (8)

así que si en A hay suficientes minimales, haya suficientes maximales (cuando hay elemento unidad). Pero en general la existencia de los unos nada tiene que ver con la de los otros.

d) Caracterización Algebráica de los Minimales

Afirmación: Para que un elemento x de un anillo A del tipo [B] sea minimal es condición necesaria y suficiente que para todo y de A se cumpla una de las proposiciones siguientes y una sola

$$xy = x \quad \text{o bien} \quad xy=0 \tag{9}$$

Demostración:

Supongamos que x es minimal y que y es un elemento cualquiera de A. En particular $x \neq 0$. En tales condiciones las dos proposiciones de (9) no pueden cumplirse al mismo tiempo. Por otra parte siempre es cierto que $xy<x$. Si fueran diferentes, por ser x minimal, se ten-

dría que xy debería anularse.

Inversamente supongamos que x cumple (9). Veamos que es minimal: si $z<x$ y $z\neq x$ entonces $zx=z\neq x$ con lo cual $zx=0$ (por (9)) es decir $z=0$. Es decir no hay en $A-\{0\}$ elementos estríctamente menores que x: es entonces minimal.

e) **Las Multiplicaciones** $c:A \longrightarrow A$ **Admiten Adjunto** (o la existenciá de de unidad en A).

Si A es un anillo de Boole y c es un elemento de A, la función $x \longrightarrow cx$ es monótona no decreciente. A pesar de tratarse de un homomorfismo (no unífero) de anillos nos interesa únicamente el que respete el orden.

Afirmación: Si A es un anillo del tipo [B] con elemento unidad, toda multiplicación $c:A \longrightarrow A$, $x \longrightarrow cx$ por un elemento c de A, admite adjunto a derecha, es decir que existe una función $f_c: A \longrightarrow A$ que cumple, para cada a y b de A la equivalencia

$$c.a<b \text{ si y solo si } a<f_c(b) \qquad (10)$$

y además también es monótona

$$a<a_1 \text{ entonces } f_c(a)<f_c(a_1)$$

Demostración: En efecto basta definir $f_c:A \longrightarrow A$ como

$$f_c(x) = 1+c(x+1) \qquad (11)$$

Nótese que $f_c(xy) = f_c(x)f_c(y)$. De donde se deduce la

monotonía. En cambio **no** es cierto que $f_c(x+y)$ sea $f_c(x)+f_c(y)$.

Consecuencias: (a) Para todo b, se cumple

$$c.f_c(b)<b \tag{12}$$

y

$$b<f_c(cb) \tag{13}$$

(b) La función c:A ⟶A conmuta con extremos superiores:

$$c.\mathrm{Sup}\{a_\lambda\} = \mathrm{Sup}\{ca_\lambda\} \tag{14}$$

(c) La función f_c:A ⟶A conmuta con extremos inferiores:

$$f_c(\mathrm{Inf}\{a_\lambda\}) = \mathrm{Inf}\{f_c(a_\lambda)\} \tag{15}$$

En los casos, claro está, en que los dos miembros de (14) y (15) estén definidos. O mejor: por ejemplo, si $\mathrm{Sup}\{a_\lambda\}$ existe, también $\mathrm{Sup}\{ca_\lambda\}$ y vale (14).

Estos resultados son de carácter general, válidos cuando se encuentra ante un par de funciones adjunta, como fue explicado en [3]. Agreguemos una consecuencia que tiene que ver con los elementos minimales (y que no aparece en [3]): Aquí $\min(b)=\{x \mid x \in \min A,\ x < b\}$

Consecuencia: (2^a parte). Recuérdese que se ha supuesto que A es unífero. Si existe en A el extremo superior $\mathrm{Sup}\{b_\lambda\}_\lambda$ de un subconjunto $\{b_\lambda\}_\lambda$ de elementos de A, entonces

$$\min(\mathrm{Sup}\{b_\lambda\}_\lambda) = \bigcup_\lambda \min(b_\lambda) \qquad (16)$$

Demostración: Evidentemente el miembro izquierdo de (16) contiene al derecho. Inversamente, si existiera x en min(b), $b=\mathrm{Sup}\{b_\lambda\}_\lambda$ tal que para todo λ, $x \notin \min(b_\lambda)$, entonces $xb_\lambda=0$ para todo x y $0=\mathrm{Sup}\{xb_\lambda\}_\lambda = x\ \mathrm{Sup}\{b_\lambda\}=xb=x$ lo que contradice que x sea minimal.

Consecuencia: (Caso particular) Si K representa un subconjunto de minimales de un anillo unífero A y se supone que k=SupK existe en A, entonces

$$\min(k) = K \qquad (17)$$

Afirmación: Sea A un anillo de Boole. Si para algún elemento c de A la multiplicación por $c:A \longrightarrow A$, $x \longrightarrow cx$ admite adjunto a derecha d_c, entonces A tiene elemento unidad.

Demostración: En efecto la existencia de d_c asegura que para cada b en A, $\{x\in A \mid cx<b\}$ admite extremo superior: se trata de $d_c(b)$. Si se toma x=c entonces es claro que $\{x\in A \mid cx<c\}$,es A. Su extremo superior $d_c(c)$ será mayor que todo x de A con lo cual $d_c(c).x=x$. Es decir $d_c(c)=1$.

En consecuencia en un anillo de Boole la existencia de elemento uni-

dad y la existencia de adjuntos a izquierda de las multiplicaciones $x \longrightarrow cx$ (c en A) son equivalentes. El adjunto d_0 de la multiplicación por 0 es justamente la función constante de valor 1 (cuando este existe).

e) **Los Anillos de Boole y los Anillos de Partes.**

El ejemplo más simple que se puede dar de un anillo de Boole es el del conjunto P(X) de las partes de un conjunto X, eventualmente vacío. Las leyes de adición y multiplicación están dadas por

$$A+B := (A-B) \cup (B-A) \quad \text{y} \quad AB := A \cap B \tag{18}$$

Como es ampliamente conocido el anillo $(P(x),+,\cdot)$ tiene elemento unidad, es cerrado para extremos superiores e inferiores y tiene suficientes minimales (los singletones $\{x\}$) y suficientes maximales (sus complementarios $X-\{x\}$). El operador de complementación $A \longrightarrow A^c$ se identifica con $A \longrightarrow X+A$.

El interés de este ejemplo elemental radica en la posibilidad de poner en contacto, mediante un homomorfismo, un anillo del tipo [B] y un anillo de partes. Dicha función es un homomorfismo natural pero, en general, ni es sobreyectiva ni es inyectiva.

Notación: Dado un elemento b de un anillo (booleano) B definimos el conjunto $\min(b) = \{x \in B / x \neq 0,\ x<b$ y x minimal en $B-\{0\}\}$. Eventualmente min(b) puede ser vacío. Si B hay

hay elemento unidad, min(1) coincide con el conjunto min(B) de los elementos minimales de B-{0}.

Definición: Para cada anillo se define una función M_B,

$$M_B: B \longrightarrow P(\min(B))$$

haciendo

$$M_B(b) = \min(b) \text{ si } b \neq 0$$
$$= \emptyset \quad \text{si } b \neq 0$$

Nota: Es evidente que la función M_B está definida inclusive si B no tiene elementos minimales.

Afirmación: M_B es un homomorfismo de anillos. Si B tiene elemento unidad y por lo menos un minimal entonces M_B es unífero. Es más: M_B **es especial**, es decir que dado un elemento minimal z de P(min(B)) existe un minimal x de B tal que $M_B(x) > z$.

Condición de Inyectividad de M_B.

Como, entre otras cosas M_B es un morfismo de grupos, su inyectividad es equivalente a la relación: Ker M_B=0. Con lo cual se está diciendo que si, para algún elemento b $M_B(b)=0$ entonces b=0. En otras palabras si b no es nulo, min(b) no puede ser vacío. Es decir //

Afirmación: Las condiciones (b) y (a) son equivalente para un ani-

llo B del tipo [B].

(a) M_B es inyectivo

(b) Hay, en B-{0} suficientes minimales.

En tal caso B se identifica a un subanillo de un anillo de partes.

Ejemplo: Un anillo de Boole en el que M_B es inyectivo y no sobreyectivo: Se denota por $P_*(X)$ los conjuntos A, de un conjunto X **infinito**, que cumplen: A es finito o bien A^C es finito. P_*X estará constituído por los conjuntos finitos y sus complementarios. Las operaciones son las de PX. Los elementos minimales son los singletones {z}. Con lo cual PX y P_*X comparten los elementos minimales. Sin embargo este último no es cerrado para extremos superiores. La aplicación M_{P_*X} : $P_*X \longrightarrow PX$ es la inclusión, que evidentemente no es sobreyectiva.

Condición para la sobreyectividad de M_B.

Afirmación: Sea B un anillo de Boole con elemento unidad y supongamos que cumple la siguiente condición [c], de **completez**:

Para todo subconjunto no vacío K de min(B) existe, en B, su extremo superior.

En esas condiciones M_B es sobreyectiva.

Demostración: En efecto si K < min(B) (no vacío) se define b=Sup K y por (17) se cumple que min(b)=K.

Observación: **La Completez y el Adjunto de M_B.**

Supongamos que B es un anillo de Boole pero omitamos que tenga elemento unidad. Entonces la aplicación M_B: B $\longrightarrow$ P (min B) admite adjunto a izquierda a la condición necesaria y suficiente que B sea completo.

Demostración: a) Supongamos que exista una aplicación conjuntista S:P(min B)$\longrightarrow$B (monótona no decreciente) que cumpla (i) Para todo elemento K$\in$P(min B), $MS(K) > K$ y (ii) Para todo elemento de b de B, $SM(b) < b$. Entonces (iii) S transforma los minimales de P(min B) en minimales de B: por cuanto, si {k} es un singletón en min(B), {k} = M(k) - aquí se usa que M transforma minimales en minimales - con lo cual $S\{k\} = SM(k) < k$. Como k es minimal en B, pueden suceder dos casos: o $SM(k) = \{S\}k = k$, o bien $S(k) = S\{k\} = 0$. Este último caso queda descartado por cuando $\phi = M(0)$ sería $MS\{k\} = \{k\}$. Por otra parte (iv) S conmuta con extremos superiores (ver[3]): si K es un subconjunto de minimales de B, para calcular Sup(K) en B podemos proceder escribiendo $K = U\{k\}$ en P(min B) y aplicar S

$$k\in K$$

$$S(K) = S(U\{k\}) = \operatorname{Sup}_{k\in K} S\{k\} = \operatorname{Sup}_B(K).$$

(por iii). Es decir que Sup(K) en B es S(K). En conclusión B es completo.

(b) Inversamente, si B es completo y K es un subconjunto de minimales no vacío se define $S(K) = Sup_B(K)$. Además $S(\phi)=0$. Se demuestran sin dificultad (i) y (ii).

Consecuencia: Si B es completo, la función M_B conmuta con extremos inferiores.

Cuándo un Anillo de Boole es un anillo de Partes

Teorema: Para que un anillo de Boole B sea un anillo de parte ($B \cong P(X)$) es condición necesaria y suficiente que:

1) B tenga suficientes minimales y que
2) B sea completo.

Nota: El elemento unidad nace de las condiciones (1) y (2) al escribir $\alpha = Sup_B(min(B))$.

Anillo con suficientes minimales asociado a un anillo de Boole.

En este numeral notaremos M al homomorfismo de anillos natural $M_B: B \longrightarrow P$ (min B). Como M es un homomorfismo de anillos el núcleo Ker M es un ideal del anillo B. El cociente B/Ker M es un anillo de Boole, es más se identifica con la imagen de M en P(minB). B/Ker M tiene suficientes minimales. Es mas por la identificación canónica de B/Ker M con Imagen (M) en P(min B) se puede decir que hay tantos minimales en el uno como en el otro. Si B es completo con unidad entonces B/Ker M sería isomorfo a P(min B).

2. EL FUNTOR P ADMITE ADJUNTO

a) Definición de la Categoría Bo

Definición: Un homomorfismo f:A-->B entre anillos del tipo [B] es especial si, para todo elemento minimal b de B existe un elemento minimal a de A tal que b<f(a).

Afirmación: El elemento a, de la definición anterior, queda determinado de manera única por el elemento b (y la función f).

En efecto si f(a)>b y f(a')>b, también f(aa')>b. Si a y a' fueran minimales distintos aa' sería 0. Con lo cual b sería 0. Pero b es minimal (en B-{0}).

Definición: Denotaremos por **Bo** la categoría cuyos objetos son los anillos de Boole y cuyos morfismos son los homomorfismos especiales (La composición es la usual).

Nota: Fácilmente se observa que el compuesto de dos morfismos especiales es especial y que la identidad es especial.

El Funtor P: Conj —> Bo

Conj denota la categoría de los conjuntos. P(X) el anillo de Boole de las partes de X. Si f:X—>Y es una aplicación conjuntista la función P(f):P(Y) —>P(X) definida como P(f)(U)={xεX/f(x)εU} (imagen recíproca de U <Y por f) es un morfismo unífero especial. Es más P(f∘g) = P(g)∘ P(f) y P(id)=id (id: representa de manera genérica cualquier morfismo idéntico).

El Funtor M: Bo —>Conj

Si A denota un anillo de Boole, **M**(A) representa el conjunto min(A) de sus minimales (es decir el conjunto de los elementos minimales de A-{0} para el orden "x<y si si xy=x"). Eventualmente **M**(A) puede ser vacío.

Si f:A—>B es un morfismo de anillos se define **M**(f):**M**(B)—>**M**(A) por la norma

M(f)(b) = a si y solo si f(a)>b.

Recuérdese que si f es especial ese valor aεmin(A) está completamente determinado por b (y por f).

Como en el caso de P, la construcción **M** cumple las condiciones M(f∘g)= **M**(g)∘**M**(f) y **M**(id) = id.

Afirmación: Conj $\xrightarrow{P}$ Bo $\xrightarrow{M}$ Conj

son funtores (contravariantes) adjuntos. De manera precisa existe un isomorfismo natural en A y Y

$$\Theta_{A,Y} : [A,P(Y)] \xrightarrow{\cong} [Y, M(A)]$$

Nota: Para descargar un poco la escritura hemos notado indistintamente con corchetes [-,-] el conjunto de morfismos entre dos objetos de una categoría.

Demostración: (a) Definamos $\Theta_{A,Y}(f)$. Si f: A $\longrightarrow$PY es un homomorfismo especial de anillos, para cada $y \in Y$ existe un único x minimal en A para el que f(x)>y . Este hecho permite definir una aplicación conjuntista $f^*:Y \longrightarrow M(A)$, $f^*(y)=x$. Definimos $\Theta_{A,Y}(f)=f^*$.

(b) $\Theta_{A,Y}(f)$ es inyectiva: Este hecho es consecuencia del siguiente Lema.

Lema: Si $f:A \longrightarrow B$ es un morfismo especial entre anillos del tipo [B], y a es un elemento cualquiera de A

$$\min(f(a)) = \min(f(x))$$

(la reunión se efectúa sobre los x en min(a))

Demostración: (Del Lema). Como f es monótona, el miembro izquierdo contiene al derecho. Inversamente sea z en min(f(a)). Por ser f especial existe un (único) x en min A tal

que f(x)>z. Por ser x minimal hay dos posibilidades: x<a o xa=0. Esta última no puede ser: ya que z<f(a) y z<f(x) entonces z<f(a)f(x)=f(ax) que sería 0. Pero z es minimal. Se concluye que zεmin f(x) con xεmin(a).

Veamos entonces que $\Theta_{A,Y}$ es inyectiva. Si $\Theta_{A,Y}(f)=\Theta_{A,Y}(f')$ entonces dado y en Y=minPY existiría un x que cumple (a la vez) f(x)>y, y, f'(x)>y. (x en minA). Sea aεA. Para demostrar que f(a)=f'(a) basta demostrar que min(f(a))=min(f'(a)). (allí se está trabajando en el anillo de partes!). Lo que se deduce del hecho minf(x) = minf'(x) cuando x es minimal en A de acuerdo con el Lema. Desmostremos esta última igualdad: Si yεmin f(x) existe un único x_1 tal que (a)x_1 es minimal en A y (b) $f(x_1)>y$. Es decir $x=x_1$. Pero además x es el mismo para f'. Entonces $f'(x)=f'(x_1)>y$ con lo cual yεmin f'(x). Por simetría se concluye la otra inclusión minf'(x)< minf(x).

$\Theta_{A,Y}$ es sobreyectiva: veamos porqué. De acuerdo con el lema, dado g: Y ⟶ **M**(A), el homomorfismo f:A ⟶PY que le corresponda (ie:Θ(f)=g) debe cumplir min(f(a))= min(f(x)) (con x en min(a)). Se define $f(a)=g^{-1}(\min(a))$. Esta función resulta el compuesto: $f=P(g)M_A$.

$$A \xrightarrow{M_A} \mathbf{PM}(A) \xrightarrow{P(g)} \mathbf{P}Y$$

Por esa razón es un homomorfismo especial de anillos. Finalmente $\Theta_{A,Y}(f)=g$. En efecto $\Theta_{A,Y}(f)(y)=x$ si si $f(x)>y$. Es decir, si y solo si $g^{-1}(\min(x))=g^{1}(x)$ contiene a y, lo que equivale a que $g(y)=x$. Es decir que $\Theta_{A,Y}(f)(y) = g(y)$.

Consecuencia: **M** y **P** convierten sumas en productos. Mas generalmente transforman límites inductivos en proyectivos.

Consecuencia: **P**: Conj $\longrightarrow$Bo es funtor fiel. Es decir: la aplicación evidente $\mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{P}Y,\mathbf{P}X)$ $f \longrightarrow \mathbf{P}(f)$ es biyectiva.

En efecto $\mathbf{MP}X=X$, entonces $[X,Y] \cong [X,\mathbf{MP}(Y)] \cong [\mathbf{P}Y,\mathbf{P}X]$.

3. EJEMPLOS Y CONSTRUCCIONES DE ANILLOS DE BOOLE

a) Anillo Unífero Asociado a un Anillo del Tipo [B]

Supongamos que A es un anillo del tipo [B] que, no necesariamente tiene elemento unidad. Formamos el anillo A_1 constituído por las parejas (a,0) y (a,1) con a ε A. Es decir $A_1 = A \times Z_2$. La adición se define coordenada a coordenada empleando las estructuras aditivas de A y de Z_2. Para la multiplicación se define

$$(a,\lambda)(b,\mu) = (ab+\lambda b + \mu a, \lambda\mu) \qquad (\ )$$

A_1 es de nuevo un anillo Booleano, el elemento unidad es (0,1). Si A ya tiene unidad, A_1 es un anillo diferente de A en el que este último se sumerge, pero pierde su elemento unidad para dar paso al de A_1 (1,0) es unidad para elementos de la forma (a,0) pero no para (0,1)).

A es un ideal maximal de A_1: $0 \longrightarrow A \longrightarrow A_1 \longrightarrow Z_2 \longrightarrow 0$. La retracción evidente $(a,\lambda) \longrightarrow a$ de A_1 en A no es un homomorfismo de anillos.

A un homomorgismo de anillos $f: A \longrightarrow B$ corresponde uno $f_1: A_1 \longrightarrow B_1$, unífero: $f_1(a,\lambda) = (f(a),\lambda)$.

El orden que resulta en A_1 depende del de A pero de manera especial: así pues

$(a,0) < (a',0)$ en A_1 si si $a<a'$ en A

$(a,0) <(a',1)$ en A_1 si si $aa' = 0$

$(a,1)<(a',1)$ en A_1 si si $a'<a$ en A

$(a,1)<(a',0)$ en ningún caso

Los elementos minimales quedan en consecuencia trastocados:

$(a,0)$ es minimal si si a lo es en A

$(a,1)$ es minimal en A_1 si si (a) el ideal $Ort(a) = \{b\varepsilon A/ba=0\}$ se reduce a 0, y, (b) a es maximal en A (e.d: maximal en $A-\{1\}$).

Para que haya suficientes minimales en A_1 debe haberlos en A en cantidad suficiente: Nótese que el caso interesante sería el de encontrar un minimal en A_1 menor que $(a',1)$: si $a'=0$ cualquier $(a,0)$ con $a\varepsilon min\ (A)$ sirve; si $a'\neq 0$ existe un minimal tal que $aa'=0$ salvo el caso en que a' sea la unidad en A (cuando en A exista elemento unidad!): en efecto si en A hay suficientes minimales, sup min(a')=a'.

La propiedad universal del homomorfismo (no unífero) $A \xrightarrow{i} A_1$ $(a,\longrightarrow(a,0))$ se expresa diciendo que si $f: A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos y B tiene elemento unidad entonces existe uno y un solo homomorfismo unifero. $\overline{f}: A_1 \longrightarrow B$ tal que $\overline{f}\circ i=f$. Si f es especial, $\overline{f}$ también lo es.

Si denotamos por $\mathbf{Bo}_1$ la categoría de anillos de Boole con elemento

unidad y morfismos especiales y uníferos entonces la construcción $(\ )_1$: **Bo** $\longrightarrow$ $\mathbf{Bo}_1$ determina un functor, adjunto a la derecha del funtor "**olvido**" V: $\mathbf{Bo}_1$ — **Bo**

b) **Anillo del Tipo [B] asociado a un anillo arbitrario.**

En un anillo arbitrario A se forma el ideal a engendrado por los elementos de la forma a^2-a, en donde a recorre A.

Afirmación:

1) A/a es un anillo de Boole;
2) La función ϕ_A: A $\longrightarrow A/a$ satisface la siguiente propiedad universal: si α:A $\longrightarrow$B es un homomorfismo de anillos y B es booleano, entonces, existe uno y un solo homomorfismo $\overline{\alpha}$: $A/a \longrightarrow$ B tal que $\overline{\alpha}.\phi = \alpha$;
3) Un elemento m de A da lugar a un elemento minimal $\phi(m)$ en A/a, si, para cada x en A se cumple una de las dos situaciones siguientes: (i) $mx \in a$ o bien (ii) $mx+m \in a$.

Un elemento m en A cuya imagen es minimal en A/a se llamará pre-minimal.

Denotaremos con la letra **B** la construcción anterior: $B(A)=A/a$. De la propiedad universal se deduce que si f:A $\longrightarrow$A' es un homomorfismo de anillos, $\phi_{A'} \circ f$:A $\longrightarrow A'/a' = B(A)$ da lugar a un homomorfismo B(f): B(A) $\longrightarrow$ B(A') tal que $B(f)\circ\phi_A = \theta_{A'}\circ f$. Nóteses que B(fg)=B(f).B(g)

y B(id)=id (id=identidad). Es decir que **B** tiene un carácter funtorial. Sin embargo **no** debe esperarse que **B**(f) sea especial.

4) Para que **B**(f) sea especial se necesita que para todo elemento preminimal a' de A' exista un preminimal a de A tal que f(a).a'-a' esté en $\mathcal{a}'$.
5) Si A y C representan dos anillos y C es booleano, los conjuntos [**B**(A),C]' y [A,C] de morfismos de anillos **no** necesariamente especiales (por eso empleamos una comilla ' en la notación) son canónicamente isomorfos..

Si **Bo**' es la categoría de anillos de Boole y homomorfismos **no** necesariamente especiales y además V: **Bo**'—> **An** olvida simplemente que un anillo es Booleano, para considerarlo como un anillo,entonces B:

6) **B** es adjunto a la izquierda de V.

El funtor **B** está lejos de ser fiel, como era de esperarse. Así $B(Z) = Z_2 = B(Z_4)$. Si K es un cuerpo la construcción se trivializa.

c) <u>El "Anillo de Polinomios"</u> A' = A[x]/(x(x-1)).

Sea A un anillo de Boole que supondremos **con** elemento unidad. Formamos el anillo de los polinomios A[x] y pasamos al cociente por el ideal generado por x(x-1). Es decir que entramos a considerar B(A[X]),anillo que denotamos por A'.

Se puede dar otra descripción de A', como el conjunto de los elementos (a,b) en AxA. En ellos se define

$$(a,b) + (a',b') = (a+a',\ b+b')$$

$$(a,b).(a',b') = (aa',\ ab' + a'b + bb')$$

El isomorfismo nace de asociar a un polinomio $p(x) = a_o + \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ en A[X] el elemento $(a_0, \sum_{i=1}^{n} a_i)$ y luego de pasar al cociente.

Afirmación: Si un elemento (a,b) es minimal en A' entonces

1) a=b y a es minimal en A, o bien
2) a=0 y b es minimal en A

Consecuencia: Si en A hay suficientes minimales, también los hay en A'. Es más:

$$\min(x,y) = \{(a,a) \mid a \in \min(x)\} \cup \{(0,b) \mid b \in \min(x+y)\}$$

Demostración: Sea (a,b) un elemento minimal de A'. Si efectuamos con él el test de minimales al alemento (a,1+b) vamos a encontrarnos ante dos posibilidades (a,b)(a,1+b) es (0,0) o es (a,b). Pero por otra parte (a,b)(a,1+b) = (a,a). Se deduce entonces que o bien a=0 o bien a=b.

Veamos entonces que si el elemento minimal es de la forma (a,a), entonces a debe ser minimal en A: nuevamente se efectúa el test algebráico de minimales con (x,0), x arbi-

en A. Como (a,a)(x,0) = (ax,ax) y (a,a) se supuso minimal entonces ax=a o bien ax=0 lo cual entraña que en A, el elemento a, es minimal.

Pasemos a ver que si en A' el elemento (0,b) es minimal entonces b es minimal en A: tomemos x en A. Como (0,b)(0,x)=(0,bx) entonces hay dos casos posibles o bien bx=0 o bien bx=b. Es decir que b resulta minimal en A.

Afirmación: La función $A \longrightarrow A'$, $x \longrightarrow (x,0)$ es un homomorfismo unífero especial. La función $A \longrightarrow A'$, $x \longrightarrow (0,x)$ es un homomorfismo especial **no** unífero. La función $A \longrightarrow A'$, $x \longrightarrow (x,x)$ es un homomorfismo **no** unífero, **no** especial.

Afirmación:

1) Si M es un subconjunto de minimales en A y si allí existe a= sup M entonces en A' existe el extremo superior sup M', en donde M' denota el conjunto $\{(x,x)/x\varepsilon M\}$ y, además, Sup M' = (a,a);
2) También existe en A' el extremo superior sup({0}xM) y es igual a (0,a);
3) Si M y N son subconjuntos de minimales de A y se supone que sup M=a, sup N=b existen en A entonces, al escribir $M' = \{(x,x)\varepsilon A' \mid x\varepsilon M\}$ y N'= {0} x N, se tendrá que el extremo superior M'UN' existe en A' y es igual a (a,a+b).

Consecuencia: Si en A todo subconjunto no vacio de minimales admite extremo superior, lo mismo sucede en A'. Es decir si M_A es sobreyectiva (inyectiva) $M_{A'}$ es sobreyectiva (inyectiva).

Propiedad Universal de la Construcción A $\longrightarrow$A'

Sean A y B anillos booleanos. Se supone que A tiene elemento unidad. A un homomorfismo de anillos g:A $\longrightarrow$B y a un elemento b de B se hace corresponder el homomorfismo de anillos f = <g,b>: A' $\rightarrow$ B definido por $(a_1,a_2) \longrightarrow g(a_1) + g(a_2)b$.

Afirmación: La aplicación (g,b) $\longrightarrow$ <g,b> de [A,B]xB en [A',B] es biyectiva. Si además, g se supone especial, <g,b> resulta especial. Y viceversa.

Demostración: Si f: A' $\longrightarrow$ B es un homomorfismo de anillos, se le asocia < g,b> haciendo g(a) = f(a,0) y b= f(0,1)=.
Por otra parte supongamos g:A $\rightarrow$ B especial y veamos que $<g_1>$ es especial: Sea m un elemento minimal de B. Con respecto a b, hay dos posibilidades: mb=m o mb=0. Busquemos, por cuando g es especial, un elemento minimal de A, digamos a, tal que g(a)>m. Entonces (si mb=m) seleccionamos el elemento minimal (a,a) de A' y con él <g,b> (a,a)>m. Si por el contrario mb=0, consideramos (0,a) para el que se cumple <g,b>(0,a)>m. Luego

<g,b> es especial.

Nota: En la anterior afirmación se ha usado el símbolo [,] para denotar indistintamente homomorgismos de anillos o bien homomorfismos especiales.

La afirmación anterior puede traducirse así:

Consecuencia: El functor B ⟶[A,B]xB, de la categoría **Bo** en la de los conjuntos, es representable.

d) **Cociente de un Anillo Booleano**

Sea A un anillo del tipo [B]. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal. Es evidente que el anillo cociente A/$\mathfrak{a}$ es también del tipo [B].

Afirmación: Si $\mathfrak{a}$ es un ideal maximal de A, en donde A es un anillo del tipo [B] con elemento unidad, entonces A/$\mathfrak{a}$ es isomorfo a Z_2.

En efecto un elemento cualquiera del cociente [x] da lugar a la ecuación [x][x]=[xx]=[x]. Y a su turno esta se escribe [x]([x]-1)=0. Como $\mathfrak{a}$ es maximal, A/$\mathfrak{a}$ es un cuerpo y por consiguiente para todo [x] se cumple que o bien [x] = 0 o bien [x]-1=0.

Propiedad Universal: Si $\mathfrak{a}$ es un ideal maximal de A y $\mathfrak{a}$ un ideal de B, ambos A y B con elemento unidad y booleanos, todo homomorfismo de anillos α: $\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}'$ se prolon-

ga de una sola manera en un homomorfismo unífero de anillos $f:A \longrightarrow B$.

Demostración: Considerar el diagrama.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \boldsymbol{a} & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{j} & Z_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \boldsymbol{a} & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B/\boldsymbol{a} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

en donde $u(0)=0$ y $u(1)=1$. Se define $f:A \longrightarrow B$ así

1) Si $a \in A$ está en $\boldsymbol{a}$, entonces, $f(a)=i'\alpha(a)$;

2) Si a **no** está en $\boldsymbol{a}$, $f(a)=i'\alpha(a-1)+1$

Es frecuente eliminar en la notación las inclusiones iei' y escribir, por ejemplo, $f(a)= \alpha(a)$ en el caso (1)

Nótese que si $a \notin \boldsymbol{a}$ entonces $j(a) \neq 0$ es decir $j(a)=1$; así pues $j(a-1)=0$ y por esto $a-1 \in \boldsymbol{a}$. Se demuestra que f es un homomorfismo de anillos: se consideran tres casos: $a,a' \in \boldsymbol{a}$ $a \in \boldsymbol{a}$, $a' \notin \boldsymbol{a}$; ni a, ni a' están en $\boldsymbol{a}$. En el primer caso y en el último se debe a propiedades del homomorfismo α. En el segundo caso: $1+a' \in \boldsymbol{a}$ y así $f(a)+f(a')= \alpha(a'+1)+1= \alpha(a+(a'+1))+1=\alpha(s+a'+1)= f(a+a')$ por cuanto $a+a' \in \boldsymbol{a}$. De manera semejante se procede con la propiedad $f(aa')=f(a)f(a')$. Veamos por ejemplo el caso dos: a en $\boldsymbol{a}$ y $a' \notin \boldsymbol{a}$. $aa' \in \boldsymbol{a}$(ideal); $f(a)f(a')=\alpha(a)(\alpha(a'+1)+1) = \alpha(a)\alpha(a'+1)+\alpha(a) = \alpha(a(a'+1)+ \alpha(a) = \alpha(aa'+a) + \alpha(a) = \alpha(aa')+\alpha(a)+\alpha(a)$

$=\alpha(aa')=f(aa')$. En el tercer caso $a\varepsilon\mathcal{a}$ y $a'\varepsilon\mathcal{a}$ con lo cual $1+a$ y $1+a'$ están en $\mathcal{a}$. El producto aa' **no** está en $\mathcal{a}$: en efecto $j(aa')=j(a)j(a')= 1.1=1$. Por lo tanto $aa'+1 \varepsilon \mathcal{a}$. También $a+a'\varepsilon\mathcal{a}$ (probar con j).

Así $f(a)f(a') = (\alpha(a+1)+1)(\alpha(a'+1)+1) = \alpha(aa'+1+(a+a'))$ $+ \alpha(a+1)+ \alpha(a+1)+ (a'+1)+1 = \alpha(aa'+1) + \alpha(a+a')+$ $+ \alpha(a+1+a'+1)+1 = \alpha(aa'+1)+1 + \alpha(aa'+1)+1 = f(aa')$.

El cuidado que se debe tener en cada caso es que cuando se escriba $\alpha(x)$, x debe estar en $\mathcal{a}$. En cuanto a la unicidad de f basta observar que si $a\notin\mathcal{a}$, $1+a\varepsilon\mathcal{a}$ y si se supone que f debe ser un homomorfismo unífero, $f(1+a)=f(a)+f(1) = 1+f(a)$, es decir $f(a)=f(1+a)+1$ pero en $\mathcal{a}$ se supone que f marcha como α. Así pues $f(a)= i'\alpha(a)+1$. No queda otra salida.

Consecuencia: Si $\mathcal{a}$ es un ideal maximal en dos anillos A y B (unífe-ros y del tipo [B] entonces A y B son isomorfos (a través de un isomorfismo único que sea la identidad en $\mathcal{a}$).

Consecuencia: Si A es un anillo con elemento unidad del tipo [B] y si existe un conjunto X tal que PX es isomorfo- en tanto que anillos- a un ideal maximal $\mathcal{a}$ de A entonces A es isomorfo a un anillo P(Y).
En efecto tomar $B=P(X\cup\{w\}).\ w\notin X$ y aplicar la consecuencia anterior. Nótese que PX es maximal en B.

BIBLIOGRAFIA

[1] STONE M. The Theory of Representations for Boolean Algebras. Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 40 (1936) pg. 37-111

[2] STONE M. Application of the Theory of Boolean Algebras to General Topology. Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 41 (1937) p.p 375-481.

[3] RUIZ SALGUERO C. Topología o Convergencia. Cuaderno 1 Fascículo 1. Ediciones La Rana y el Aguila. U.P.T.C. 1975 Tunja.

[4] RUIZ SALGUERO C. y SUAREZ MARTINEZ M. Topología o Convergencia. Cuaderno 1 Fascículo 2. X Coloquio Colombiano de Matematicas. U.P.T.C. Tunja. 1980.