

UNIVERSITAS —SCIENTIARUM—

Volumen 3 N° 1-2, julio - diciembre 1996

REVISTA DE LA FACULTAD
DE CIENCIAS



PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

FÍSICA**TEORÍA BOHMIANA Y REALIDAD CUÁNTICA****EDGAR GONZÁLEZ J.**

Facultad de Ciencias, Departamento de Física, Pontificia Universidad Javeriana. Santa Fe de Bogotá, D.C., Colombia (Suramérica).

Resumen

Se investiga el significado, ventajas y desventajas de la teoría cuántica Bohmiana no relativista, basada en la noción de partícula con trayectoria bien definida, afectada por un campo real objetivo que determina su comportamiento mecánico-cuántico. Este estudio se ilustra con el tratamiento formal para el movimiento de una partícula, descrita por un paquete de onda Gaussiano en los casos de movimiento libre y movimiento en presencia de un campo eléctrico uniforme.

Palabras clave: Cuántica Bohmiana, potencial cuántico, paquete Gaussiano, Bohm.

Abstract

Meaning, advantages, and disadvantages of nonrelativistic bohmian quantum theory is investigated, based on a well-defined particle-path notion, affected by a target real field determining its quantum-mechanical behavior. This study is show with formal treatment for the motion of a particle described by a Gaussian wave packet in the case of free motion and motion in the presence of an even electric field.

Key words: Bohmian quantum, quantum potential, Gaussian packet, , Bohm.

INTRODUCCIÓN

La teoría cuántica ha orientado en forma preferencial la interpretación de su formulación hacia la denominada línea estándar, consolidada por los aportes de N. Bohr, M. Born y W. Heisenberg entre otros, interpretación que se fundamenta en las nociones de complementariedad, correspon-

dencia y relaciones de incertidumbre, ejes centrales en torno a los cuales se construye una aproximación al estudio de los fenómenos cuánticos.

La existencia e indivisibilidad del cuanto de acción implica la imposibilidad de análisis de la interacción entre sistema e instrumento, imponiéndose con esto una unidad fun-

damental entre el sistema y el aparato experimental, unidad que conforma el fenómeno cuántico: "las enseñanzas obtenidas de un fenómeno no pueden interpretarse como una información acerca de las propiedades independientes de los objetos porque está ligada a una situación que afecta esencialmente a los aparatos de medida en interacción con los objetos" (Bohr, 1988). Desde esta perspectiva, "no hay mundo cuántico, hay solamente una descripción físico cuántica abstracta". La mecánica cuántica solamente proporciona predicciones de resultados para experimentos bien definidos, hecho que fundamenta la idea de un límite para el conocimiento que podemos tener del mundo físico.

La ciencia física, según Bohr, más que el estudio de una supuesta realidad que tendría que ser descubierta, está destinada principalmente a la tarea de coordinar la experiencia humana frente a los fenómenos naturales, actividad social que se concretiza a partir de un *lenguaje* que debe permitir una comunicación carente de ambigüedad.

El fenómeno como unidad de información comunicable y último nivel al que tenemos acceso, puede ser abordado: i) a partir de las leyes causales, y su descripción está gobernada por la racionalidad clásica, o ii) su tratamiento puede ser desarrollado dentro del contexto de la complementariedad, carente desde la perspectiva clásica de toda racionalidad. Ya que el lenguaje clásico es el único que permite la descripción de los tratamientos experimentales y sus resultados, ¿cómo evitar contradicciones entre la "irracionalidad" del postulado de indivisibilidad del cuanto de acción que gobierna los fenómenos microscópicos y la descripción de los mismos dentro de un lenguaje clásico? Bohr postula que las matemáticas, como refinamiento del lenguaje general, deben soportar toda descripción objetiva, y por lo tanto se hace posible trasladar el formalismo mecánico cuántico a dicho lenguaje, formalismo que proporciona una descripción completa y que por su misma consistencia excluye cualquier posibilidad de contradicción o incoherencia. La legalidad y consistencia del formalismo

matemático cuántico garantiza que *la mecánica cuántica sea una teoría completa de los fenómenos microscópicos* (la función de onda Ψ proporciona la más completa descripción del estado del sistema) y por lo tanto resulta injustificado cualquier intento para avanzar más allá de lo que permite la teoría. Desde esta postura se niega la existencia de *mundos subcuánticos* que permitirían postular la existencia de un nuevo conjunto de variables (ocultas). Estas variables describirían estados de entidades y sus leyes dentro de una teoría que recuperaría el carácter causal de la ciencia física a nivel microscópico.

Como característica relevante en la interpretación estándar, aparece la dificultad de definir el tránsito de una "partícula" entre dos puntos en el espacio. A diferencia de las teorías clásicas, en donde para un determinado observador se hace posible representar la existencia de una partícula a través de una sucesión continua de puntos en el espacio en el transcurso del tiempo, en la teoría cuántica, la existencia del cuanto de acción que conlleva a una especie de "dependencia" entre la localización espacio temporal de la partícula y su estado dinámico, limita drásticamente la precisión en la medición simultánea de la posición y el momentum, además al ser "en sí mismo (la existencia del cuanto de acción) y desde el punto de vista clásico un elemento irracional nos obliga inevitablemente a renunciar a una descripción causal en el espacio y en el tiempo" (Bohr, 1988). El concepto de trayectoria de la "partícula" carece de significado en esta interpretación.

Desde el punto de vista de la teoría de Bohm (inicialmente propuesta por de Broglie), contrario a la línea de pensamiento bohriana, se parte del supuesto que la teoría cuántica en su etapa presente de desarrollo no es lo suficientemente completa; además, el principio de incertidumbre no es considerado como una limitación *inherente* de la precisión con la cual puede concebirse en forma precisa la posición y el momento, sino por el contrario una *limitación práctica* de la precisión con la cual esas cantidades pueden

ser medidas simultáneamente. En esta propuesta, existe un *nivel subcuántico* en donde tienen lugar movimientos continuos y determinados causalmente, capaces de conducir a las leyes de la mecánica cuántica como una aproximación válida en el dominio atómico. Además, todos los fenómenos cuánticos (que pueden ser explorados en términos de procesos individuales) pueden ser explicados en función de movimientos reales y continuos (trayectorias) en el tiempo y en el espacio. La partícula posee propiedades bien definidas sin que esto signifique un reduccionismo a la física clásica; *se asume que cada partícula posee una posición y momento bien definidos* aunque en principio, sus valores podrían ser desconocidos. En cuanto a la distribución de probabilidad, esta tiene su origen en un potencial de naturaleza cuántica, el cual conduce a resultados que coinciden con los que se derivan de la interpretación estándar.

Con la intención de explorar el significado e implicaciones que presenta la interpretación de la mecánica cuántica a través de la teoría de Bohm, se hace uso de un caso que resulta altamente ilustrativo como lo es el movimiento de una partícula libre descrita por un paquete de onda Gaussiano, así como el movimiento de una partícula cargada en presencia de un campo eléctrico uniforme. Se calcula el potencial cuántico así como las trayectorias mecánico cuánticas asociadas, las cuales permiten interpretar desde un punto de vista causal el fenómeno microscópico correspondiente.

TEORÍA CUÁNTICA BOHMIANA

La teoría cuántica no relativista defendida por Bohm (Bohm, 1952), se fundamenta en la noción de función de onda con un significado físico directo (ente objetivo) en cada proceso individual. En segundo lugar se introduce el concepto de partícula como un ente que presenta trayectorias continuas en el tiempo y en el espacio. La onda se describe matemáticamente por una función que satisface la ecuación de Schrödinger que para el caso de una partícula en un campo

potencial $V(x)$ viene dada por

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = [-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V] \psi \tag{1}$$

Al sustituir la función de onda en forma polar $\psi = Re^{iS/\hbar}$, en la ecuación (1) separarla ecuación resultante en parte real e imaginaria respectivamente se obtienen las ecuaciones para S (fase de ψ) y R ($=|\psi|$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V + Q &= 0, \\ \frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\hbar^2 \nabla S}{m} \right) &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

en donde

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \tag{3}$$

corresponde al potencial mecánico cuántico.

El movimiento de la partícula se obtiene como solución de la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} \nabla S(x, t) \tag{4}$$

con condición inicial $x(t=0)=x_0$, que no está contenida en ψ . Un *ensemble* de los posibles movimientos generados por la misma función de onda se obtiene para los diferentes valores de x_0 .

PARTÍCULA LIBRE

Como primer caso de estudio, se considera el comportamiento de una partícula sometida a un potencial $V=cte$. Como función de onda se elige un paquete de onda plana modulada por una función de amplitud *Gaussiana* de mínima incertidumbre en $t_0=0$; el paquete se localiza con respecto al punto de máxima intensidad el cual para $t_0=0$

coincide con el origen del sistema de referencia respecto al cual se refiere su movimiento (Belifante, 1973)

$$\psi(x,0) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{4}} e^{ikx - \frac{x^2}{4\sigma_0^2}}, \quad (5)$$

con $k = \langle p \rangle / \hbar$ y $\sigma_0 = (\Delta x)$ ancho del paquete en $t_0 = 0$.

La ecuación de Schrödinger para el caso considerado

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

proporciona la solución

$$\psi(x,t) = \left[2\pi s_t^2 \right]^{-\frac{1}{4}} e^{ik(x-\frac{ut}{2}) - \frac{(x-ut)^2}{4\sigma_0 s_t}}, \quad (6)$$

en donde

$$s_t = \sigma_0 \left(1 + \frac{i\hbar t}{2m\sigma_0^2} \right) \text{ y } u = \hbar k / m = \langle p \rangle / m$$

que corresponde a la velocidad de grupo con la cual se traslada el paquete.

De la función de onda (6) se puede obtener la distribución R^2 que resulta igual a

$$R^2(x,t) = |\psi|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-ut)^2}{2\sigma^2}}, \quad (7)$$

con $\sigma = |S_t|$

Resulta pertinente aquí preguntar por el significado de la expresión (7) graficada en la curva de la Figura 1. Si $\Pi_0(x)$ corresponde a la distribución de probabilidad inicial de x característica del *ensemble* considerado, y $R^2_0(x)$ representa los valores iniciales del campo real representado por la función de onda ψ , a pesar que $R^2(x,t)$ y $\Pi(x,t)$ satisfacen las mismas ecuaciones de evolución, en

general no se cumple que estas dos cantidades sean iguales.

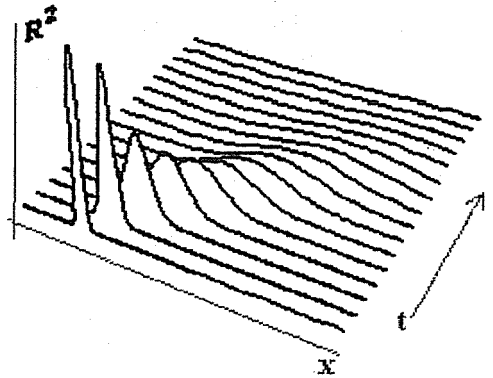


FIGURA 1 Evolución de la distribución $R^2(x,t)$ para $t \geq 0$

Para el caso en el cual $R^2(x,t) = \Pi(x,t)$, que ocurre cuando $R^2_0(x) = \Pi_0(x)$, surge una interpretación dual para R^2 : a) una distribución de probabilidad y b) un campo real presente en el sistema considerado.

En una teoría determinista, el tratamiento estadístico establece que la probabilidad inicial ($t=0$) es arbitraria, sin embargo, en la teoría de Bohm, la probabilidad inicial debe ser igual a $R^2_0(x) = |\psi_0(x)|^2$ para garantizar la compatibilidad de los movimientos del *ensemble* de partículas con los resultados de la mecánica cuántica usual (crítica hecha por Pauli). Se hace por lo tanto necesario formular un postulado fuerte que considera la probabilidad para que una partícula en el *ensemble* se encuentre entre los puntos x y $x+dx$ en el instante t como $R^2(x,t)d^3x$.

La Figura 1 muestra la propagación de la distribución R^2 para $t \geq 0$, que haciendo caso al postulado probabilístico corresponde a una distribución de probabilidad con un movimiento del centro del paquete correspondiente al de una partícula clásica con posición bien definida.

Este postulado permite seleccionar de todos los movimientos posibles que se producen

de la ecuación (4) aquellos que resultan compatibles con una distribución inicial $R_0^2(x)$.

Desde el punto de vista mecánico cuántico, el ancho del paquete está asociado con la medida de incertidumbre para la posición, y experimenta una dispersión s dependiente del tiempo con velocidad $d\sigma/dt$.

Para obtener el potencial cuántico, se hace uso de la función de onda (5) de donde resulta

$$R = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-(x-ut)^2/4\sigma^2}$$

que al sustituir en la ecuación (3) se deriva el potencial

$$Q = \frac{\hbar}{4m\sigma^2} \left[1 - \frac{(x-ut)^2}{2\sigma^2} \right] \tag{8}$$

Para el potencial cuántico, a pesar de que deriva de la función de onda no depende de su intensidad, esto es, si multiplicamos la intensidad por una constante real c el potencial permanece inalterado. De la expresión (3)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 (cR)}{cR}$$

resultado que establece que a pesar de modificar la amplitud de la función de onda, el potencial cuántico no se modifica, con lo cual si $\psi \rightarrow 0$ no implica necesariamente que Q sea débil o despreciable en esa región.

Para la fuerza mecánico-cuántica se aplica la relación $F = -\nabla Q$ que proporciona la cantidad

$$F = \frac{\hbar}{4m\sigma^2} (x - ut) \tag{8}$$

De los resultados precedentes surgen las siguientes consideraciones:

Para el estudio de una partícula libre con potencial $V = cte$, a diferencia de la mecánica clásica en donde $F_c = -\nabla V = ma = 0$, la existencia del potencial cuántico permite considerar la existencia de una fuerza de naturaleza cuántica $F_Q = -\nabla Q = ma \neq 0$ que impone diferencias drásticas con el movimiento clásico de una partícula libre. En las

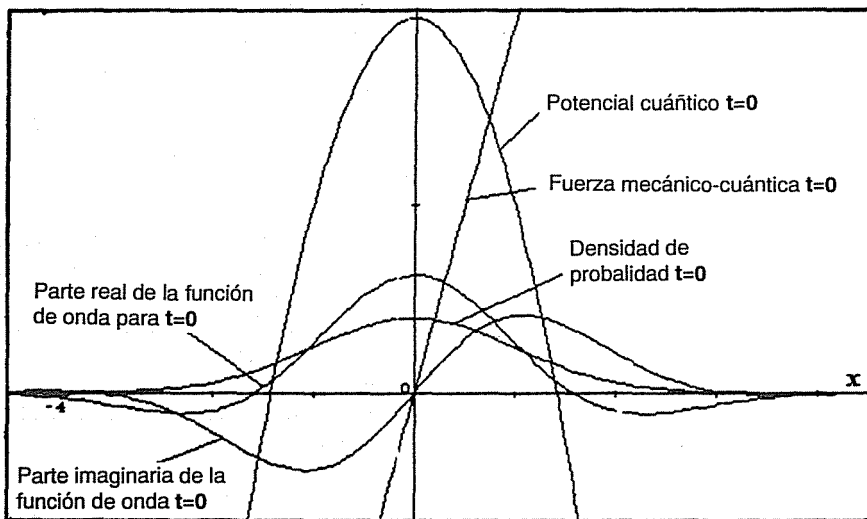


FIGURA 2 Potencial cuántico, distribución de probabilidad R^2 , parte real e imaginaria de la función de onda y fuerza cuántica para $t=0$

gráficas de la Figura 2 se muestra el potencial cuántico así como la correspondiente fuerza mecánico-cuántica. El potencial cuántico para valores cercanos a $t=0$ presenta en cada corte para $t=\text{cte}$ forma parabólica que impone un comportamiento $|Q| \rightarrow \infty$, para $x \rightarrow \infty$, mientras la magnitud de la función de onda ψ decrece (Figura 3). Para valores de $t \rightarrow \infty$, el potencial cuántico se hace constante y por supuesto la fuerza se hace nula.

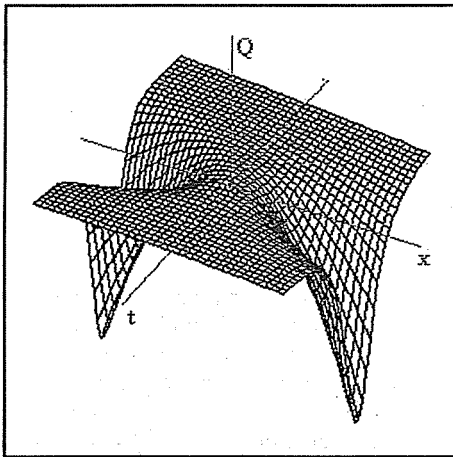


FIGURA 3 Potencial cuántico para paquete Gaussiano libre

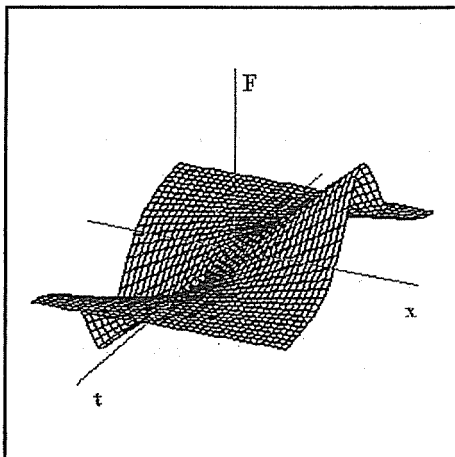


FIGURA 4 Fuerza mecánico-cuántica para paquete Gaussiano libre

Para un análisis en términos de las trayectorias para la partícula, se hace necesario obtener la correspondiente ecuación, la cual se determina con origen espacial en el centro del paquete en $t_0=0$ y ya que

$$S = \frac{\hbar}{2i} \ln\left(\frac{\psi}{\psi^*}\right) = \hbar\left[-3\tan^{-1}\left(\frac{\hbar t}{2m\sigma_0^2}\right) + k(x-ut) + (x-ut)^2 \frac{\hbar t}{8m\sigma^2\sigma_0^2}\right],$$

$$\nabla S = \hbar k + (x-ut) \frac{\hbar t}{4m\sigma^2\sigma_0^2} = m \frac{dx}{dt},$$

que al integrar resulta finalmente

$$x(t) = ut + x_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar t}{2m\sigma_0^2}\right)^2} \quad (9)$$

El término ut determina el desplazamiento del paquete como un todo, mientras que el segundo término determina la dispersión de la que ya se había hecho mención.

La Figura 5 muestra las posibles trayectorias para diferentes valores de x_0 para un electrón y un paquete de onda de ancho $\sigma_0 = 10^{-5}$ cm y velocidad $u = 10^4$ cm s^{-1} . Para $t \gg 0$ ($t \ll 0$) la partícula presenta movimiento con velocidad constante ya que el potencial cuántico para estos valores se hace constante y por lo tanto la fuerza se hace nula. Para valores de t cercanos a cero, aparece un movimiento acelerado originado por la presencia de una fuerza que aleja a la partícula del centro del paquete.

La evolución del movimiento de la partícula depende fundamentalmente de la posición inicial x_0 . Si para $t=0$, la partícula se encuentra en $x_0=0$, allí permanece en reposo con respecto al centro del paquete y velocidad igual a la de grupo del paquete, mientras que si $x_0 > 0$ la partícula se aleja del centro del paquete con aceleración

$$a = \frac{\hbar}{4m^2\sigma_0^2(1 + \hbar^2 t^2 / 4m^2\sigma_0^4)}(x-ut),$$

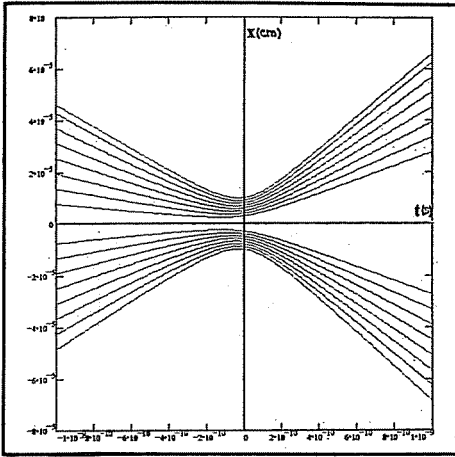


FIGURA 5 Trayectorias para el caso de de un paquete de onda Gaussiano libre

obtenida de la ecuación (8), la cual tiende asintóticamente a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Si en la expresión para la aceleración, se hace despreciable el valor de la constante de Planck, la aceleración se hace nula lo que está de acuerdo con el comportamiento clásico para una partícula libre.

Este tratamiento y resultados, distantes de la línea de pensamiento estándar de la mecánica cuántica reciben por parte de la teoría defendida por Bohm (Bohm,1987) la siguiente interpretación:

La función de onda y no corresponde a una simple cantidad matemática necesaria para el cálculo de densidades de probabilidad, se trata de una representación de *un campo real objetivo*, el cual se encuentra en un estado de fluctuación caótica muy rápida procedente de un *nivel subcuántico* más profundo, cuyo comportamiento medio queda determinado por la ecuación de Schrödinger. El campo y es interpretado como determinante del movimiento de la partícula y responsable de la existencia de un potencial cuántico del cual se deriva la fuerza mecánico-cuántico responsable del movimiento de la partícula que dentro de esta teoría está representada matemática-

mente por un juego de coordenadas y su variación bien definidas:

PARTÍCULA CARGADA EN PRESENCIA DE UN CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME

Se supone una partícula con carga q y masa m en presencia de un campo eléctrico uniforme E en dirección x con potencial $V(x)=qEx$. En $t=0$, se asume como en el caso anterior un paquete de onda Gaussiano de la forma dada por la ecuación (4). Para determinar la función de onda para cualquier instante posterior, se hace uso del procedimiento propuesto por de Broglie (De Broglie, 1930), en el cual se parte de la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + qEx\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

con ψ dada a partir de ψ_0 por la relación

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0) T(x, t, x_0) dx_0,$$

donde T es una función de transformación que debe satisfacer la ecuación de Schrödinger. Si se expresa T en forma polar $R' e^{iS'/\hbar}$ se lleva a la ecuación de Schrödinger se hace posible obtener ecuaciones simples para R' y S' . Luego del correspondiente tratamiento analítico, se obtiene la función

$$\psi(x, t) = (2\pi s_t^2)^{-1/4} e^{-\frac{(x-ut + \frac{qEt^2}{2m})^2}{4s_t^2}} e^{\frac{i\hbar}{\hbar} [(x - \frac{qEt}{m})(x - ut/2) - q^2 E^2 t^3 / 6m]}$$
(11)

que proporciona la densidad de probabilidad

$$|\psi|^2 = (2\pi s_t^2)^{-1/2} e^{-\frac{(x-ut + \frac{qEt^2}{2m})^2}{2s_t^2}}$$

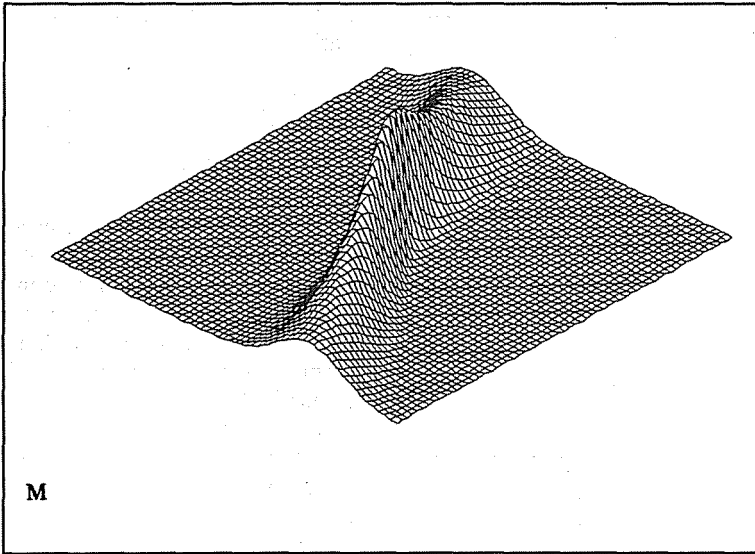


FIGURA 6 Evolución de la distribución de probabilidad para $E=0$

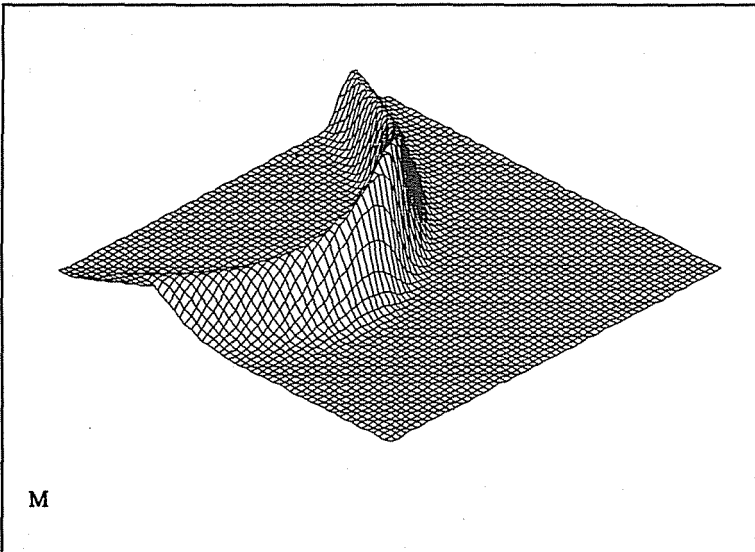


FIGURA 7 Evolución de la distribución de la probabilidad para $E=cte$

La Figura 7 muestra el efecto producido por el campo eléctrico sobre la distribución de probabilidad para $t \leq 0$ y $t > 0$. Se compara con la distribución de probabilidad para la partícula libre con $t \leq 0$ y $t > 0$.

De la función de onda (11) se obtiene el potencial cuántico el cual queda expresado como

$$Q(x,t) = \frac{\hbar}{4m\sigma^2} \left[1 - \left(x - ut + \frac{qEt^2}{2m} \right) / 2\sigma^2 \right]^2 \quad (12)$$

el cual se diferencia del obtenido para partícula libre por el término que contiene la magnitud del campo eléctrico. Para obtener la fuerza se calcula el gradiente del potencial cuántico en adición con el potencial V

$$F = -\nabla(V + Q) \quad (13)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4m\sigma^4} \left(x - ut + \frac{Eq t^2}{2m} \right) - Eq,$$

resultado que corresponde en el límite $\hbar \rightarrow 0$ a la fuerza clásica Eq .

La ecuación de las trayectorias toma la forma

$$x(t) = ut + x_0 \left[1 + \left(\frac{\hbar t}{2m\sigma_0^2} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{qEt^2}{2m} \quad (14)$$

la cual resulta similar a la ecuación para partícula libre salvo por un término aditivo que contiene los parámetros eléctricos.

La Figura 8 muestra las posibles trayectorias asociadas con el paquete de onda elegido, trayectorias calculadas para el caso de un electrón con un paquete de onda de dispersión inicial $\sigma_0 = 10^{-5}$ cm, $u = 10^4$ cm/s, $qE = 4.79 \cdot 10^{-14}$ dn. Se hace visible un movimiento con aceleración permanente.

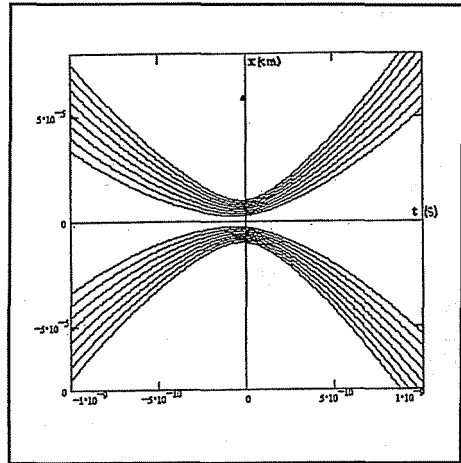


FIGURA 8 Trayectorias posibles para el caso de un electrón en presencia de un campo eléctrico constante

CONCLUSIONES

Ontológicamente onda y partícula en la cuántica Bohmiana adquieren el mismo estatus de existencia objetiva, en donde la partícula responde a la acción del campo ψ a través del potencial cuántico Q sin que exista una reacción de la partícula hacia el campo. Se invalida para esta situación la tercera ley de Newton.

Las posibles trayectorias que corresponden a una intensidad de onda inicial, no pueden experimentar cortes o atravesar regiones nodales en donde $\psi=0$, ya que para estos valores no se encuentra definido el gradiente de S del cual se deriva la ecuación de movimiento.

Si se incluye un potencial clásico, la partícula aparece afectada por la fuerza clásica $-VV$ y a su vez por una fuerza de tipo cuántico $-\nabla Q$, la cual no se hace nula para el caso de partícula libre. La fuerza de tipo cuántico depende del potencial V, lo cual explica el comportamiento no clásico que presentan las partículas en potenciales clásicos.

La teoría cuántica Bohmiana proporciona el mismo tipo de resultados de la interpretación usual; sin embargo, el tratamiento de los sistemas mecánico-cuánticos se hacen formalmente más complejos, aunque con la ventaja de contar con una herramienta que proporciona una interpretación física racionalmente accesible.

Son numerosos el tipo de problemas que en los últimos años se abordan con la teoría Bohmiana. Entre otros cabría mencionar los siguientes:

- Cálculos de tiempos de tunelamiento configuraciones de dispersión a través de barreras de potencial.
- Simulación del movimiento de una partícula cuántica a temperatura constante. Las trayectorias para el movimiento de la partícula de obtienen adaptando métodos de simulación de dinámica molecular clásica.
- Estudio del principio de acción y reacción dentro del contexto de la interpretación estocástica de la mecánica cuántica en Bohm.
- Estudio de los orígenes del azar cuántico desde la perspectiva de la mecánica Bohmiana. Se ha logrado mostrar que para configuración inicial típica de un universo gobernado por una mecánica Bohmiana se origina el azar con una distribución empírica que está en acuerdo con las predicciones del formalismo cuántico.
- Estudio de dinámica de campos escalares en cavidades cuánticas e interacción de campos con la materia.
- Extensión de la teoría de Bohm para el estudio del efecto Aharonov-Bohm.

REFERENCIAS

- BELIFANTE, F.** 1973. *A Survey of Hidden-Variables Theories*. Oxford. Pergamon Press. Pág. 194.
- BOHM, D. A.** *Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables*. I. *Phy. Rev.* **85** (2):166-179.
- BOHM D.** 1988. *La totalidad y el orden implicado*. Barcelona. Kairos. Pág. 104.
- BOHR N.** 1988. *La teoría atómica y la descripción de la naturaleza*. Barcelona. Alianza Universidad. Pág. 59.
- DE BROGLIE, L.** *Introduction a L'etude de la Mécanique Ondulatoire*. Paris. Librairie Scientifique Hermann. pág. 190.
- ROLDÁN, J. Y GONZÁLEZ, E.** 1995. *El Potencial Cuántico Base para una Interpretación Alternativa de la Mecánica Cuántica*. *Revista Colombiana de Física*. **27** (2) : 219-222.