VNIVERSITAS SCIENTIARIUM

Volumen 2 N°1 JUL. - DIC. 1994

REVISTA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

FISICA Y MATEMATICAS

SOLUCION DE LA ECUACION DEL CALOR EN DIMENSION 1

José H. Serrano-D
Departamento de matemáticas. Facultad de Ciencias. Pontificia Universidad Javeriana. Santafé de Bogotá-Colombia (Suramérica).

Resumen

En los textos usuales de matemáticas para ingeniería se resuelve la ecuación del calor en dimensión uno en forma incompleta, ya que no se tiene en cuenta la convergencia de la solución. El objetivo de este artículo es justificar en forma rigurosa todos los procesos de límite que intervienen, y demostrar que la ecuación del calor tiene una única solución, cuando $\Omega = ((0,L)\ L > 0$.

Abstract

In commonly used mathematics text-books for engineers the heat equation is solved in dimension one in an incomplete form because the convergency of the solution is not considered. The objective of this article is to justify in a precise form all the processes of limits that participate and to show that the heat equation has a unique solution when $\Omega = (0,L)\ L > 0$.

INTRODUCCION

La ecuación diferencial en derivadas parciales con valor en la frontera y con la condición inicial dada

$$(A)\quad \begin{cases} \text{i) } \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \text{ en } \Omega \times (0,\infty) \\ \text{ii) } u \equiv 0 \text{ en } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ \text{iii) } U(x,0) = f(x) \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

en donde Ω es un dominio en $\mathbb{R}^N$ con frontera $\partial\Omega$, y Δu es el Laplaciano de U, para todo $u \in c^2(\Omega)$ y $f \in c(\overline{\Omega})$. La ecuación (A) se llama ecuación del calor, pues modela la distribución de la temperatura $u(x,t)$ en Ω en el instante t. La ecuación del calor y sus variantes intervienen en numerosos fenómenos de difusión. El estudio de esta ecuación se originó en el siglo pasado y la primera investigación la hizo Fourier en 1822 en su obra "THEORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR".

La ecuación del calor es el ejemplo más sencillo de ecuación diferencial de tipo parabólico.

Para la solución de la ecuación (A) pueden verse las referencias [2] pág. 217 y [6] pág. 159 donde se prueba si $f \in L^2(\Omega)$, entonces existe una única función $u(x,t)$: $\bar{\Omega} \times [0,\infty) \to \mathbf{R}$ que verifica las condiciones i), ii) y iii) del problema (A).

En este artículo estudiaremos la ecuación particular del calor cuando $\Omega = (0.L)$; en la solución usaremos la técnica de Fourier.

El modelo matemático se presenta en el siguiente problema: para $f \in C([0.L])$, $L > 0$, $a \neq 0$, $f(0) = f(L) = 0$,

$$
(B) \quad \begin{cases} i)\ U_t(x,t) \equiv a^2 U_{xx}(x,t), \text{ para todo } 0<x<L,\ t>0 \\ ii)\ U(0,t) \equiv U(L,t) = 0,\ t>0 \\ iii)\ U(x,0)=f(x),\ \forall x,\ 0 \leq x \leq L,\ f(0)=f(L)=0 \\ \quad U,\ U_t,\ U_{xx} \text{ continuas en } [0,L] \times [0,\infty) \end{cases}
$$

Si suponemos que $U(x,t) = X(x)T(t)$, reemplazando en (i) del problema (B), obtenemos:

$$
\frac{T'(t)}{a^2\ T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda
$$

De esta igualdad obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$
(0.1) \quad \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(L) = 0, \\ T'(t) = -\lambda a^2 T(t) \end{cases}
$$

Multiplicando por $X(x)$ la primera igualdad e integrando entre 0 y L obtenemos:

$$
\lambda \int_0^L X(x)^2 dx = -\int_0^L X(x)\ X''(x) dx = \int_0^L X'(x)^2 dx
$$

$$\lambda = \frac{\int_0^L X'(x)^2 dx}{\int_0^L X(x)^2 dx} > 0$$

Por (0.1), obtenemos que:

$$X(x) = A_m \text{ Sen } \frac{m\pi}{L} x,$$

y

$$T(t) = e^{-\frac{a^2 m^2 \pi^2}{L^2} \cdot t}, \qquad m = 1,2,\ldots$$

Por lo tanto,

$$U_m(x,t) = A_m \text{Sen } \frac{m\pi}{L} x \cdot e^{-\frac{a^2 m^2 \pi^2}{L^2} \cdot t}, \tag{0.2}$$

Satisface las condiciones (i), (ii) del problema (I).

Denotemos por, $\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{L^2}$, $\psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \text{ Sen } (\frac{k\pi}{L}x)$,

$$\langle f, \psi_k \rangle = \int_0^L f(x)\psi_k(x)dx, \qquad k = 1,2,\ldots$$

$$T_t(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f,\psi_k \rangle \, \psi_k(x) \, e^{-a^2\lambda_k t}, \text{ para todo } t > 0.$$

Teorema 1. Si $f \in C^1([0,L])$ y

$$U(x,t) = \begin{cases} T_t(f)(x) & \text{si } t > 0 \\ f(x) & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

entonces $U(x,t)$ es solución de (B).

Demostración. Por definición

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

$$< f,\psi_k > = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L f(x) \text{ Sen } \frac{k\pi}{L} x \, dx = -\sqrt{\frac{2}{L}} f(x)\cos \frac{k\pi}{L} x . \frac{L}{k\pi}\Big|_{x=0}^{L}$$

$$+ \frac{L}{k\pi}\sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L f'(x) \cos \frac{k\pi}{L} x \, dx = \frac{L}{k\pi} < f', \phi_k >, \text{ donde}$$

$$\phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{k\pi}{L} x \quad \text{y} \quad < \phi_i,\phi_j > = \begin{cases} 1 & \text{si } \; i = j \\ 0 & \text{si } \; i \neq j \end{cases}$$

Lo anterior quiere decir que

$$(0.3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} < f,\psi_k >^2 \le \int_0^L \Big(f(x)\Big)^2 dx, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 <f,\psi_k>^2 \le \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^L \Big(f'(x)\Big)^2 dx.$$

Denotemos por:

$$S_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} < f,\psi_k > \psi_k(x) e^{-a^2\lambda_k t}$$

Demostraremos a continuación que las sucesiones de sumas parciales,

$$\Big\{S_n(x,t)\Big\}_{n=1}^{\infty}, \quad \Big\{\frac{\partial}{\partial t} S_n(x,t)\Big\}_{n=1}^{\infty}, \quad \Big\{\frac{\partial}{\partial x} Sn\,(x,t)\Big\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{y}$$

$$\Big\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} S_n(x,t)\Big\}_{n=1}^{\infty}, \text{ convergen uniformemente en } [0,L]\text{x}[0,\infty).$$

Calculemos:

$$S_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} < f,\psi_k > \psi_k(x)e^{-a^2\lambda_k t} = \sum_{k=1}^{n} < f,\psi_k > \psi_k(x)e^{-\frac{a^2k^2\pi^2}{L^2}t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} < f,\psi_k > \psi_k(x) \left(-\frac{a^2\pi^2k^2}{L^2}\right) e^{-a^2k^2\pi^2 t/L^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} S_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{\pi k}{L} <f,\psi_k > \cos(\frac{k\pi}{L}x) \; e^{-a^2\lambda_k t},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} S_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{\pi^2 k^2}{L^2} <f,\psi_k >.\left(-\text{sen}(\frac{k\pi}{L}x)\right) e^{-a^2\lambda_k t};$$

Ya que,

$$(0.4),\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{|< f,\ \psi_k >|}{k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} < f,\ \psi_k >^2} \leq$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}\ \left(\int_0^L f(x)^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}},$$ la serie, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|< f,\ \psi_k >|}{k}$ es convergente.

Fácilmente se puede observar que,

$$\lim_{k\to\infty} \left| -a^2\, \frac{\pi^2 k^3}{L^2}\, e^{-a^2k^2\pi^2t/L^2} \right| = 0,$$

por lo tanto, existe $C_1>0$ tal que:

$$\left| -a^2\, \frac{\pi^2 k^3}{L^2}\, e^{-a^2k^2\pi^2t/L^2} \right| < C_1$$

Por lo anterior y (0.4) obtenemos:

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} S_n(x,t) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} < f,\psi_k > \psi_k(x)\quad e^{-a^2k^2\pi^2t/L^2} \left(-\frac{a^2\pi^2k^2}{L^2}\right) \right| \leq$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|< f,\ \psi_k >|}{k}\, C_1, \qquad \left| \frac{\partial}{\partial x} S_n(x,t) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|<f,\psi_k>|}{k}\, C_1$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} S_n(x,t) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} < f,\psi_k > \psi_x \left(-\frac{\pi^2k^2}{L^2}\right) e^{-a^2k^2\pi^2t/L^2} \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|< f,\ \psi_k >|}{k} C_1$$

$$|S_n(x,t)| \leq \left| \sum_{k=1}^{n} < f,\psi_k > \psi_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} | < f,\psi_k >| =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|< f,\ \psi_k >|}{k} \cdot k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2 <f,\psi_k >^2} \leq$$

$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^L f'(x)^2 dx}$. Por lo anterior podemos concluir que

las sucesiones de sumas parciales $\left\{S_k(x,t)\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{\frac{\partial}{\partial t} S_k(x,t)\right\}_{k=1}^{\infty}$,

$\left\{\frac{\partial}{\partial x} S_k(x,t)\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} S_k(x,t)\right\}_{k=1}^{\infty}$ convergen uniformemente para todo

$(x,t) \in [0,L]x[t_o,\infty)$, $t_o > 0$, t_o arbitrario. Denotemos por,

$F(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} < f,\psi_k > \psi_k(x)$ y $h(x) = F(x)-f(x)$, $h(0) = h(L) = 0$.

Ya que, $\int_0^L h\ \psi_j\ dx = 0$, tenemos que $h \equiv 0$, esto es,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} < f,\psi_k > \psi_k(x)$$

por lo tanto, $U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} < f,\psi_k > \psi_k(x)\ e^{-a^2\lambda_k t}$

Converge uniformemente para $t \geq t_o > 0$, (t_o arbitrario) y

$$U_t(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} < f,\psi_k > \psi_k(x) \left(-\frac{a^2\pi^2k^2}{L^2}\right) e^{-a^2k^2\pi^2t/L^2},$$

$$U_{xx}(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} < f,\psi_k > \psi_k \left(-\frac{\pi^2k^2}{L^2}\right) e^{-a^2k^2\pi^2t/L^2},$$

$$U_t\ (x,t) \equiv a^2U_{xx}(x,t),\ U(x,0) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} < f,\psi_k > \psi_k\ (x) = f(x)$$

Nota:

Supongamos que $L > 0$ y $h \in C([0,L])$ tal que $h(0) = h(L) = 0$. Si

$\int_0^L h(x)$ sen $\frac{k\pi x}{L}\ dx = 0$, para todo entero $k \geq 0$, entonces $h(x) \equiv 0$ en $[0,L]$.

Demostración: Por hipótesis, para todo entero positivo k, se tiene que

$0 = \int_0^L h(x)\ \mathrm{sen}\frac{k\pi x}{L}dx = \frac{L}{\pi}\int_0^L h\left(\frac{L}{\pi}s\right)$ sen ksds, donde $s = \frac{\pi x}{L}$. Si denotamos por

$H(s) = h\left(\frac{L}{\pi}s\right)$, $H(0) = H(\pi) = 0$. Por la igualdad anterior obtenemos:

$$\int_0^\pi H(s)\mathrm{senks}ds = 0$$

Se extiende H continuamente a $(-\infty,+\infty)$ con las siguientes condiciones:

1) $H(x + 2\pi) \equiv H(x)$
2) $H(x) = -H(-x)$

Entonces $\int_{-\pi}^{\pi} H(x)\mathrm{senkx}dx = -\int_0^{\pi} H(x)\mathrm{senx}dx = 0$, $2\int_{-\pi}^{\pi} H(x)\cos kxdx = 0$, para todo entero $k \geq 0$, por lo tanto $H(x) \equiv 0$ y $h(x) = H\left(\frac{\pi x}{L}\right) = 0$, para todo $x \in [0,L]$.

Referente a la ecuación $a^2U_{xx} = U_t$, existe un principio del máximo muy semejante al principio del máximo para el Laplaciano; el siguiente teorema precisa este resultado.

Teorema 2.

Supongamos que $U \in C^1([0,L]\times[0,T])$, $L > 0$, $T > 0$ y existen las derivadas U_t, U_x, U_{xx}, y son continuas en $[0,L]\times[0,T]$. Denotemos por $R = [0,L]\times[0,T]$,

$$B = \{(x,0):\ 0 \leq x \leq L\}$$
$$S_1 = \{(0,t):\ 0 \leq t \leq T\}, \quad S_2 = \{(L,t):\ 0 \leq t \leq T\}$$

Si $a^2U_{xx} - U_t \geq 0$ en $(0,L)\times(0,T)$, entonces,

$$\max_{R} U(x,t) = \max_{B\cup S_1\cup S_2} U(x,t)$$

Demostración:

i) Primero demostraremos el resultado para el caso en el cual la función $U(x,t)$ satisface la igualdad estricta, esto es, $a^2U_{xx} - U_t > 0$, en

$(0,L)x(0,T)$. Supongamos que existe $(x_o, t_o) \in (0,L)x(0,T)$, tal que $U(x_o,t_o) \geq U(x,t)$ en $[0,L]x[0,T]$, en este caso, $U_{xx}(x_o,t_o) \leq 0$ y $U_t(x_o,t_o) = 0$, por lo tanto, $a^2U_{xx}(x_o,t_o) - U_t(x_o,t_o) \leq 0$. Esta contradicción muestra que el máximo de U no puede estar en $(0,L)x(0,T)$. Supongamos que, $0 < x_o < L$ y $U(x_o,T) = \max\limits_{R} U$. En este caso tendríamos que: $U_t(x_o,T) \geq 0$ y $U_{xx}(x_o,T) \leq 0$, nuevamente obtenemos una contradicción. Por lo anterior concluímos que,

$$\max_{R} U = \max_{BUS_1US_2} U$$

ii) Consideremos el caso general en el cual, $a^2U_{xx} - U_t \geq 0$ en $(0,L)x(0,T)$. Definamos $V_\epsilon(x,t) \equiv U(x,t) - \epsilon t$, para $\epsilon > 0$, $V_{\epsilon_{xx}} = U_{xx}$, $V_{\epsilon_t} = U_t - \epsilon$ y $a^2V_{\epsilon_{xx}} - V_{\epsilon_t} = a^2U_{xx} - U_t + \epsilon > 0$ en $(0,L)x(0,T)$, por esta desigualdad y la primera parte de esta demostración obtenemos:

$$(0.5), \qquad \max_{R} V_\epsilon = \max_{BUS_1US_2} V_\epsilon.$$

Supongamos que $(x_o,t_o) \in (0,L)x(0,T)$ y $U(x_o,t_o) \geq U(x,t)$ en $[0,L]x[0,T]$. Selecionemos $\epsilon > 0$ tal que

$$(0.6) \qquad \epsilon < \inf_{BUS_1US_2} \frac{[U(x_o,t_o) - U(\overline{x},\overline{t})]}{2T},$$

suponiendo que $U(x_o,t_o) > U(\overline{x},\overline{t})$, para todo $(\overline{x},\overline{t}) \in \overline{B}US_1US_2$

Por (0.5), existe $(x_1,t_1) \in BUS_1US_2$, tal que $V_\epsilon(x_1,t_1) > V_\epsilon(x,t)$ en $(0,L)x(0,T)$, por lo tanto $V_\epsilon(x_1,t_1) = U(x_1,t_1) - \epsilon t_1 > V_\epsilon(x_o,t_o) = U(x_o,t_o) - \epsilon t_o$, por lo tanto, $U(x_1,t_1) - U(x_o,t_o) > \epsilon\ (t_1 - t_o)$; ya que $U(x_o,t_o)$ es el máximo de $U(x,t)$ en $[0,L]x[0,T]$, la anterior desigualdad implica que $t_1 - t_o < 0$, por lo tanto,

$$\frac{U(x_1,t_1) - U(x_o,t_o)}{t_1 - t_o} < \epsilon. \text{ esto es,}$$

$$\frac{U(x_o,t_o) - U(x_1,t_1)}{t_o - t_1} < \epsilon, \text{ ya que } \frac{U(x_o,t_o) - U(x_1,t_1)}{2T} \leq \frac{U(x_o,t_o) - U(x_1,t_1)}{t_o - t_1} < \epsilon,$$

por (0.6) y esta última desigualdad obtenemos una contradicción.

Teorema 3.

Si $f \in C([0,L])$, $f(0) = f(L) = 0$, y $\epsilon>0$, entonces existe $\hat{f} \in C^1([0,L])$ tal que $\hat{f}(0) = \hat{f}(L) = 0$ y $\| \hat{f}-f\|_\infty < \epsilon$

Demostración.

Supongamos que n es un entero positivo. Se divide el intervalo $[0,L]$ en n partes iguales por los puntos $x_o = 0<x_1<\ldots<x_n = L$, $x_k - x_{k-1} = \frac{L}{n}$; para todo $k \geq 1$, se definen las siguientes funciones en $[0,L]$:

$$\gamma_o(x) = \begin{cases} (x-x_1)^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq x_1 \\ 0 & \text{si} \quad x > x_1 \end{cases}$$

$$\gamma_k(x) = \begin{cases} (x-x_{k-1})(x_{k+1}-x)^2 & \text{si } x_{k-1} \leq x \leq x_k \\ 0 & \text{si } x < x_{k-1}, \text{ o, } x > x_{k+1} \end{cases}$$

para todo $1 \leq k \leq n-1$.

$$\gamma_n(x) = \begin{cases} (x-x_{n-1})^2 & \text{si } x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ 0 & \text{si } x < x_{n-1} \end{cases}$$

Por definición $\gamma_i \in C^1([0,L])$, $i = 0, 1, \ldots, n$, y

$$\sum_{j=0}^{n} \gamma_j(x) \neq 0, \text{ para todo } x \in [0,L];$$

Se define,

$$\theta_k(x) = \frac{\gamma(x)}{\sum_{k=0}^{n} \gamma_k(x)}, \quad k = 1, \ldots, n$$

y se denota por

$$W_n = \operatorname*{Sup}_{\substack{|x'-x''| < \frac{L}{n} \\ x,\, x'' \in [0,L].}} |f(x')-f(x'')|,$$

$$\hat{f}_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \theta_j(x) f(x_j), \quad \text{para todo } x \in [0,L]$$

Ya que $f(x) = \sum_{j=0}^{n} \theta_j(x) f(x)$, tenemos que

$$\left| f(x)-\hat{f}_n(x)\right| = \left| \sum_{j=0}^{n} \theta_j(x)\ (f(x_j)-f(x))\right| \le \sum_{j=1}^{n} \theta_j(x) \left| f(x_j)-f(x)\right| \le W_n.$$

Ya que $\lim_{n\to\infty} W_n = 0$, existe un entero positivo N, tal que $\left| f(x)-\hat{f}_N(x)\right| \le \frac{\epsilon}{3}$, por lo tanto $|\hat{f}_N(0)| < \frac{\epsilon}{3}$, $|\hat{f}_N(L)| < \frac{\epsilon}{3}$.

Se denota por,

$$g(x) = \hat{f}(x) - \left(\hat{f}_N(0) + \frac{\hat{f}_N(L)-\hat{f}_N(0)}{L}x\right),$$

para todo $x \in [0,L]$.

$$\left| f(x)-g(x)\right| \le \left| f(x)-\hat{f}_N(x)\right| + \left| \hat{f}_N(0) + \frac{\hat{f}_N(L)-\hat{f}_N(0)}{L}x\right| < \frac{\epsilon}{3} + \left|\hat{f}_N(0)\right|$$

$$\left(1-\frac{x}{L}\right) + |f_N(L)|\frac{x}{L} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}\left[\left(1-\frac{x}{L}\right)+\frac{x}{L}\right] = \frac{2\epsilon}{3}.$$

Teorema 4.

Para todo $t > 0$, existe $C_1(t) > 0$ tal que, si $f, g \in C([0,L])$ y $f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0$, entonces

$$\| T_t(f)-T_t(g)\|_\infty \le C_1(t)\| f-g\|_\infty$$

Demostración:

$$T_t(f)(x)-T_t(g)(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\langle\psi_k, f-g\rangle}{k}\psi(x).k\ e^{-\frac{\pi^2k^2}{L^2}a^2t}, \quad |\psi_k(x)| \le \sqrt{\frac{2}{L}}.$$

Ya que $\lim_{k\to\infty} k\ e^{-\frac{\pi^2k^2}{L^2}a^2t} = 0$, existe $C_o(t)$ tal que $k\ e^{-\frac{\pi^2k^2}{L^2}a^2t} \le C_o(t)$, $k = 1,2,3,\ldots$

$$\left| T_t(f)(x)-T_t(g)(x)\right| \le C_o(t)\sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\langle\psi_k, f-g\rangle}{k}\right| \le C_o(t)\sqrt{\frac{2}{L}}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}.$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\langle\psi_k,\ f-g\rangle^2} \le C_o(t)\sqrt{\frac{2}{L}}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}\left(\int_0^L (f-g)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$= C_1(t)\sqrt{L} \parallel f-g\parallel_\infty$, donde $C_1(t) = C_o(t)\sqrt{\frac{2}{L}}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}\ \sqrt{L}$

Teorema 5

Si $f \in C([0,L])$, $f(0) = f(L) = 0$ y

$$T_t(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f,\psi_k\rangle\ \psi_k(x)\ e^{-\frac{\pi^2 k^2 a^2}{L^2}t},\quad T_t(f)(0) = T_t(f)(L) = 0,$$

entonces $\parallel T_t(f)\parallel \ \leq\ \parallel f\parallel_\infty$, para todo $t>0$.

Demostración:

Primero suponemos que $f \in C^1([0,L])$.

Sea $$U(x,t) = \begin{cases} T_t(f)(x) & t > 0 \\ f(x) & t = 0 \end{cases}$$

Entonces U es continua en $R = [0,L]x[0,\infty)$, $U_t \equiv a^2 U_{xx}$ en $(0,L)x(0,\infty)$, $U(0,t) = U(L,t) = 0$, $U(x,0) \equiv f(x)$. Para cualquier $t_o > 0$, se tiene que

$$\max_{[0,L]x[0,t_o]} U = \max_{S \cup B} U,$$

donde $S= \{(L,t):\ 0 \leq t \leq t_o\} \cup \{(0,t):\ u \leq t \leq t_o\}$, $B = \{(x,0):\ 0 \leq x \leq L\}$, por lo tanto,

$U(x,t) \ \leq \parallel f\parallel_\infty$, para todo $0 \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq t_o$. Si denotamos $V = -U$, tenemos que $V_t \equiv a^2 V_{xx}$ $V(0,t) = V(L,t) \equiv 0$, $V(x,0) = -f$. Por lo tanto $-U(x,t) \leq \parallel -f\parallel_\infty = \parallel f\parallel_\infty$, entonces $\parallel U(x,t)\parallel \ \leq \parallel f\parallel_\infty$, para todo $0 \leq t \leq t_o$. Ya que $f \in C([0,L])$, $f(0) = f(L) = 0$, por el teorema 3, existe una sucesión

$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $C^1([0,L])$ tal $f_n(0) = f_n(L) = 0$ y

$\lim\limits_{n\to\infty} \parallel f - f_n\parallel_\infty = 0$. Además

$0 \leq \parallel T_t(f) - T_t(f_n)\parallel_\infty \ \leq\ C_1(t)\parallel f - f_n\parallel_\infty$,

$0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \parallel T_t(f) - T_t(f_n)\parallel_\infty \ \leq\ 0$. Por lo tanto

$\lim\limits_{n\to\infty} \parallel T_t(f) - T_t(f_n)\parallel_\infty = 0$. Ya que

$\parallel T_t(f)\parallel_\infty \ \leq\ \parallel T_t(f_n)\parallel_\infty + \parallel T_t(f) - T_t(f_n)\parallel_\infty$, tenemos que

$$\| T_t(f)\|_\infty \leq \lim_{n\to\infty} \left(\|T_t(f_n)\|_\infty + \| T_t(f)-T_t(f_n)\|_\infty \right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|T_t(f_n)\|_\infty \leq \lim_{n\to\infty} \| f_n\|_\infty = \| f\|_\infty .\right.$$

Teorema 6

Si $f \in C([0,L])$, $f(0) = f(L) = 0$, entonces $\lim_{t\to 0^+} T_t(f)(x) = f(x)$, uniformemente

en $[0,L]$, esto es $\lim_{t\to 0^+} \| T_t(f)-f\|_\infty = 0$

Demostración:

Por el teorema 3, para $\epsilon > 0$, existe $\hat{f} \in C^1([0,L])$, tal que $\hat{f}(0) = \hat{f}(L) = 0$ y $\| \hat{f}-f\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$. Además por el teorema 1 $\lim_{t\to 0^+} \| \hat{f}-T_t(\hat{f})\|_\infty = 0$, por lo tanto

dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $0<t<\delta$, entonces

$$\| T_t(f)-f\|_\infty \leq \| T_t(f)-T_t(\hat{f})\|_\infty + \| T_t(\hat{f})-\hat{f}\|_\infty + \| \hat{f}-f\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{3} +$$

$\| T_t(f)-T_t(\hat{f})\|_\infty + \frac{\epsilon}{3} \leq \frac{2\epsilon}{3} + \| f-\hat{f}\|_\infty < \epsilon$, para todo $t \geq t_o > 0$ (t_o arbitrario).

Para $f \in C([0,L])$, la función

$$U(x,t) = \begin{cases} T_t(f)(x), & \text{si } t>0 \\ f(x), & \text{si } t = 0 \end{cases} \tag{0.7}$$

satisface las condiciones (i),(ii) del problema(B); este hecho se comprobó en la demostración del teorema 1. En el último teorema se demostró que esta función, (0.7) también satisface iii) del problema (B). Por lo tanto la función $U(x,t)$ definido por (0,7) satisface el problema (B).

REFERENCIAS

EPSTEIN, B. 1975. Partial differential equations. Robert E. Krieger Publishing Company.

FRIEDMAN, A. 1964. Partial differential equations of parabolic type. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J.

GUSTAFSON, K. 1980. Partial differential equations. Jhon Wiley and Sons.

HUTSON, V & PYM, J.S. 1980. Applications of funtional Analysis and operator theory. Academic Press.

LADYZENSKAJA, O.A; SOLONIKOV, V.A. & RUAL' CEVA, N.N. 1968. Linear and quasi-linear equations of parabolic type. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

LAZER, A. 1980. Notas sobre ecuaciones diferenciales parciales. Universidad de Cincinnati.

PROTER, M. & WEINBERGER, H. Maximun principles in differential equations. Prentice-Hall, Inc.