VNIVERSITAS
—SCIENTIARIUM—

Volumen 2 N°1 JUL. - DIC. 1994

REVISTA DE LA FACULTAD
DE CIENCIAS

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

SEMINARIO DE SISTEMAS DINAMICOS

CARLOS RUÍZ-SALGUERO; JOAQUÍN LUNA-TORRES & ALVARO DUQUE-HOYOS, S.J.

Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas. Pontificia Universidad Javeriana. Santafé de Bogotá, D.C., Colombia (Suramérica).

INTRODUCCION

El investigador en física plantea ciertos problemas que arrojan, en su estudio, un espacio fibrado conocido con el nombre de Espacio de Estado. Y también una ecuación diferencial cuya solución sería la ley que se busca establecer. La información del Espacio de Estado encuadra en el tema de los Espacios Fibrados (Vectoriales) y se presenta como una función **p: TM → M** en la que **M** es un espacio con estructura diferenciable (una variedad) y **TM** representa el espacio tangente.

Es natural esperar que se puedan dar más informaciones o respuestas si las ecuaciones resultantes son más sencillas. Es el caso por ejemplo de los sistemas dinámicos, en el que un problema puede ser interpretado de tres formas aparentemente diferentes: una ecuación diferencial — cuyas condiciones iniciales están en el Espacio de Estado—; una acción del grupo de Lie aditivo **R**, +, de los números reales, sobre la variedad **M**, incluída en el Espacio de Estado y, finalmente, una sección diferenciable del fibrado tangente **TM** (es decir una función diferenciable tal que p o s = identidad de **M**). La rama que estudia las acciones de un grupo sobre una variedad, es conocida con el nombre deTopología Dinámica. Los puntos de la variedad reemplazan en el modelo al espacio **M** y las clases de equivalencia propias de la acción, toman el lugar de las trayectorias de la ecuación diferencial. De tal modo que el modelo informa sobre la manera como —habiéndose fijado la ecuación diferencial— dichas trayectorias dependen de las condiciones iniciales. Es natural que uno de los problemas que se enfrente sea el de conocer las variaciones que se suceden en las trayectorias cuando se hagan ligeras variaciones en las condiciones iniciales. Este hecho obliga a buscar estructuras en el espacio de las trayectorias: topológicas (cuando se quiera establecer si la dependencia es contínua) diferenciables (cuando se quiera ir más lejos y se indague sobre si esa dependencia es «lisa»). Debido a características propias de los números reales las trayectoria de una acción **D: R x M → M** son espacios que solamente pueden ser de tres tipos: (La trayectoria de origen $\mathbf{m}_0$ de **D** es el subconjunto $\{\mathbf{D}(\mathbf{t}, \mathbf{m}_0)|\ \mathbf{t}\ \mathbf{variable}\}$) : **0** bien es un subespacio que es isomorfo a los números reales, o bien es isomorfo a una circunferencia, o es un subconjunto puntual de **M**. Y la teoría se puede encargar de estudiar el número de órbitas que hay de cada uno de los tipos y la forma como ellas están distribuídas en el espacio **M**. Por ejemplo la posibilidad de aproximarse a una órbita cerrada (o puntual) desplazándose sobre una órbita abierta.

Este punto de vista, en el estudio de los Sistemas Dinámicos, puede ser explotado: en lugar de considerar una acción **D: R x M →M** y de analizar las trayectorias que ella define, se pueden estudiar todas las posibles acciones **R x M →M** y establecer sobre ese conjunto de acciones estructuras que vienen a informar sobre el comportamiento «social» de los Sistemas Dinámicos (sobre la variedad **M**). El desarrollo de la teoría ha mostrado que se insiste en considerar (con éxito) una estructura de tipo topológico, que permite obtener información sobre Sistemas Dinámicos **R x M → M** que «no está lejos» de un Sistema Dinámico dado, cuyas características son conocidas.

En resumen hay dos etapas en el estudio de los Sistemas Dinámicos: Una primera que analizaría cada Sistema Dinámico «por dentro» tratando de clasificar sus órbitas y de resaltar las relaciones entre dichas órbitas. La otra que se interesaría por establecer más bien relaciones -de proximidad-sobre Sistemas Dinámicos diferentes (todas, claro está, sobre la misma variedad **M**).

Y, no queda excluída, una tercera que intente analizar la relación entre los resultados obtenidos, en la segunda etapa, sobre una variedad $\mathbf{M_1}$ y los obtenidos sobre otra, $\mathbf{M_2}$, cuando se conozcan relaciones entre $\mathbf{M_1}$ y $\mathbf{M_2}$. Dentro de este último deben establecerse condiciones cada vez menos onerosas sobre la función $\mathbf{f: M_1 \to M_2}$ pero quepermitan realizar las aspiraciones de relacionar con los conjuntos (¡espacios!) Sistemas Dinámicos ($\mathbf{M_1}$) y Sistemas Dinámicos ($\mathbf{M_2}$).

El Grupo de Sistemas Dinámicos de la Pontificia Universidad Javeriana se ha venido interesando en este aspecto dentro de la hipótesis de una función $\mathbf{f: M_1 \to M_2}$ que sea un «revestimiento diferenciable»: caso particular éste de funciones que son difeomorfismos locales. Y, dentro de esta línea de pensamiento, tratar de ir un poco más lejos, debilitando la hipótesis sobre las fibras de **f** de tal forma que, en vez de que sean espacios discretos (como sucede en los revestimientos) se toman por ejemplo, espacios totalmente disconexos.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

GOTTSCHALK, W.H. & HEDLUND, G.A. 1955. Topological dynamics. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 36, Providence.

HIRSCH, M.W. & SMALE, S. 1974. Differential equations, dynamical systems, and linear algebra. Academic Press. New York and London.

IRWIN, M.C. 1980. Smooth dynamical systems. Academic Press. New York and London.