SOLUCIONES PERIODICAS CLASICAS DE LA ECUACION $L[u] \equiv b(1+\|\nabla_x u\|^2)$ Y SUS APLICACIONES

José Humberto Serrano D.

Resumen: Se demuestra la existencia y unicidad de soluciones periódicas clásicas de la ecuación

$$L[u] \equiv b(1+\|\nabla_x u\|^2) .$$

Utilizando este resultado, se determina una cota a priori de la solución de la ecuación

$$L[u] \equiv f(x,t,u,\nabla_x u),$$

donde f es una función de clase C^1, tal que

$$|f(x,t,u,y_1,y_2,\ldots,y_N)| \leqslant C(r)[1+\|(y_1,y_2,\ldots,y_N)\|^2].$$

Abstract: The existence and uniqueness of classic periodical solutions to the equation

$$L[u] \equiv b(1+\|\nabla_x u\|^2)$$

are shown. By making use of this result "a priori" bound to the solution for the equation

$$L[u] \equiv f(x,t,u,\nabla_x u)$$

is determined, in which f is a type C^1 function, such that

$$|f(x,t,u,y_1,y_2,\ldots,y_N)| \leqslant C(r)[1+\|(y_1,y_2,\ldots,y_N)\|^2].$$

INTRODUCCION. En este artículo se demuestra la existencia y unicidad de soluciones periódicas clásicas del problema:

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} L[u](x,t) = b(x,t)(1+\|\nabla_x u(x,t)\|^2) & \text{en } \Omega\times\mathbb{R}, \\ u(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega\times\mathbb{R}, \\ u(x,t+T) \equiv u(x,t) & \text{en } \bar{\Omega}\times\mathbb{R}, \quad T>0 \text{ (fijo)}. \end{cases}$$

donde

$$L[u] = \frac{\partial u}{\partial t} - \Big(\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu\Big)$$

es un operador uniformemente parabólico, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N > 1)$, es un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ de clase $C^{2+\alpha}$, $(0 < \alpha < 1)$ y $b \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$ es una función T-periódica en t, los coeficientes de L, a_{ij}, b_i, c pertenecen al espacio de Banach $\mathbb{F} = \{f \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}) \mid f \text{ es } T\text{-periódica en } t\}$, con $a_{ij} \equiv a_{ji}$ y $c \leq 0$ en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$. La solución del problema (I) pertenece al espacio de Banach $\mathbb{E} = \{u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}) \mid u \text{ es } T\text{-periódica en } t \text{ y } u \equiv 0 \text{ en } \partial\Omega\times\mathbb{R}\}$.

Los resultados sobre el problema (I) se utilizarán para obtener cotas de las posibles soluciones periódicas clásicas del problema:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} L[u](x,t) = f(x,t,u(x,t),\nabla_x u(x,t)) & \text{en } \Omega\times\mathbb{R}, \\ u(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega\times\mathbb{R}, \\ u(x,t+T) \equiv u(x,t) & \text{en } \bar{\Omega}\times\mathbb{R} \end{cases}$$

donde $f:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, es una función suficientemente suave, T-periódica en t y que satisface determinada condición.

J.L. Kazdan y R. Kramer [2], H. Amann y M. Grandall [1] estudiaron el problema (II) para el caso en el cual L es un operador diferencial lineal de segundo orden uniformemente elíptico. En [3] Ju.S. Kolesov publicó en 1966 un teorema de comparación sobre el problema (II) para el caso en el cual f satisface la siguiente condición:

$$|f(x,t,u,y_1,y_2,\ldots,y_N)| \leq C_1(r)+C_2(r)\sum_{i=1}^{N}|y_i|^{2-\varepsilon_i(r)}$$

para toda u, tal que $|u| < r$, donde $0 < \varepsilon_i(r) \leq 2$, $-\infty < t < \infty$ $\|u\|_\infty \leq r$, $i = 1,2,\ldots,N$.

En este artículo consideraremos la siguiente condición sobre f:

$$|f(x,t,u,y_1,y_2,\ldots,y_N)| \leq C_1(r)+C_2(r)\sum_{i=1}^{N} |y_i|^2.$$

Por el hecho que $0 < \varepsilon_i(r) \leq 2$, el problema (II) estudiado por Kolesov no incluye la condición inmediatamente anterior.

SECCION 1. El principal propósito de esta Sección es probar el siguiente resultado:

1.2. ***TEOREMA.*** *Para cada* $b \in \mathbf{F}$, *existe una única solución* $u \in \mathbf{E}$ *del problema (I). Ademas, existe una función* γ *creciente y contínua* $\gamma: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ *tal que si* $u \in \mathbf{E}$ *es solución de (I) para un* $b \in \mathbf{F}$ *entonces* $\|u\|_{2,p} \leq \gamma(\|b\|_\infty)$.

En la demostración de este teorema usaremos los siguientes lemas:

1.2. ***LEMA.*** *El problema (I) tiene a lo más una solución* $u \in \mathbf{E}$.

Los tres siguientes lemas se usan para demostrar la desigualdad más importante de este trabajo:

1.3. ***LEMA.*** *Si* $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}\times[0,T])$ *entonces existe una constante* $\bar{K} > 0$ *tal que* $\| \|\nabla_x u\|^2 \|_p^{\bar{\Omega}\times[0,T]} \leq \bar{K} \|u\|_\infty^{\bar{\Omega}\times[0,T]} \|u\|_{2,p}^{\bar{\Omega}\times[0,T]}$ *donde* $\bar{K} = \bar{K}(\bar{\Omega},p,N)$

1.4. ***LEMA.*** *Si* $\eta_i \in [0,1]$, $u_i \in \mathbf{E}$ *son tales que* $(L+1)[u_i] = b(\eta_i + \|\nabla_x u_i\|^2)$, $i = 1,2$, $V = u_2 - u_1$ *y* $M = |\eta_1 - \eta_2| \|b\|_\infty^{\bar{\Omega}\times[0,T]}$ *entonces* $-M \leq V \leq M$.

1.5. ***LEMA.*** *Si* $u \in \mathbf{E}$, *es solución del problema:* $L[u] \equiv f$ *en* $\bar{\Omega}\times[0,T]$, $u \equiv 0$ *en* $\partial\Omega\times[0,T]$, *entonces existe una constante* $c > 0$ *(independiente de* u *y* f*) tal que*

$$\|u\|_{2,p}^{Q_T} \leq c[\|u\|_p^{Q_T} + \|f\|^{Q_T}].$$

(Q_T *denota* $\bar{\Omega}\times[0,T]$).

1.6. ***LEMA.*** *Las hipótesis del Lema 1.4 implican* *la siguiente desigualdad:*

$$\|V\|_{2,p}^{Q_T} \leq \bar{K}_1(3\|b\|_\infty^{Q_T}(m(\Omega)\times T)^{1/p}) + K_1\|b\|_\infty^{Q_T}\|\,\|\nabla_x u_1\|^2\|_p^{Q_T}$$
$$+ K_3[\|b\|_\infty^{Q_T}]^2|\eta_1-\eta_2|\,\|V\|_{2,p}^{Q_T},$$

donde $m(\Omega)$ *denota la medida de* Ω, $\bar{K}_1, K_1, K_3$ *son constantes positivas.*

1.7. *COROLARIO. Si* $|\eta_1-\eta_2| < \dfrac{1}{2K_3[\|b\|_\infty^{Q_T}]^2}$ *entonces*

$$\|V\|_{2,p}^{Q_T} \leq \tilde{K}_1(3\|b\|_\infty^{Q_T}(m(\Omega)\times T)^{1/p} + \hat{K}_1\|b\|_\infty^{Q_T}[\|u_1\|_{2,p}^{Q_T}]^2 ,$$

donde $\tilde{K}_1$, $\hat{K}_1 > 0$.

Demostración del Teorema 1.1. Seleccionamos $0 = \eta_1<\eta_2< \ldots <\eta_n = 1$ en $[0,1]$ tales que $|\eta_{i+1}-\eta_i| < \dfrac{1}{2K_3\|b\|_\infty^2}$, $i = 1,2,\ldots,n-1$. Para $\eta_1 = 0$, es claro que $u_1 \equiv 0$ es solución de $(L+1)[u] = b(0+\|\nabla_x u\|^2)$. Para η_2, demostraremos que existe $u_2 \in \mathbb{E}$ solución de $(L+1)[u] = b(\eta_2+\|\nabla_x u\|^2)$; hacemos lo siguiente:

a) Obtenemos una cota a priori de la solución de este problema, es decir, supongamos que $\bar{u}_2 \in \mathbb{E}$ es solución del problema $(L+1)[u] = b(\eta_2+\|\nabla_x u\|^2)$. Reemplazando $u_1 \equiv 0$ en la desigualdad del Corolario 1.7 obtenemos:

$$\|\bar{u}_2-0\|_{2,p} = \|\bar{u}_2\|_{2,p} \leq \tilde{K}_1(3\|b\|_\infty(m(\Omega)\times T)^{1/p} = \gamma_2(\|b\|_\infty).$$

Por un resultado conocido (ver [4] pág.342) existe una constante $\bar{\bar{K}} > 0$ (independiente de u y f) tal que

$$\|\bar{u}_2\|_{1+\beta} < \bar{\bar{K}}\gamma_2(\|b\|_\infty) = R_2 .$$

b) Definimos un operador $\hat{T}_2$ en la siguiente forma:

$$\hat{T}_2[u] = iJ(L+1)^{-1}(\tilde{f}[u]) \quad \text{para toda } u \in C_T^{1+\beta}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}),$$

donde $\tilde{f}$ representa el operador $\tilde{f}:C^{1+\beta}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}) \to C_T^{\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$ definido por $\tilde{f}[u] = b(\eta_2+\|\nabla_x u\|^2)$, $(L+1)^{-1}:C_T^{\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}) \to \dot{C}_T^{2+\alpha}(\Omega\times\mathbb{R})$ es el operador inverso del operador $L+1$ que se mencionó en la introducción (para la existencia de $(L+1)^{-1}$ ver [5] pág. 242), J se presenta la inyección (la cual es continua) $J:\dot{C}_T^{2+\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}) \hookrightarrow C_T^{1+\rho}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$, $i:C_T^{1+\rho}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}) \hookrightarrow C_T^{1+\beta}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$ es la inyección.

Por ser i un operador compacto y $0 < \alpha < \beta < \rho < 1$ fácilmente se puede ver que $\hat{T}_2$ es un operador compacto.

(Nota: Aquí, escribimos $u \in C_T^{\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$ $(C_T^{1+\beta}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$, $C_T^{1+\rho}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$, $C_T^{1+\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$ respectivamente) si $u \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$, $(C^{1+\beta}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}))$, $(C^{1+\rho}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}))$, $(C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}))$ y u es T-periódica en t. Denotamos con $\dot{C}_T^{2+\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$ el espacio de Banach de todas las funciones $u \in C_T^{2+\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$ tales que $u(x,t) = 0$ para todo $(x,t) \in \partial\Omega\times\mathbb{R}$.

c) Demostraremos que el operador $\hat{T}_2$ tiene un punto fijo. Para lograr esto, consideremos la homotopía $H_t[u] = (I-t\hat{T}_2)[u]$, $t \in [0,1]$, $u \in \mathcal{D}_2$ donde

$$\mathcal{D}_2 = \{u \in C_T^{1+\beta}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}) / \|u\|_{1+\beta} < R_2 + 1\}$$

y R_2 es la cota que se mencionó en la parte (a).
$H_t[u] \neq 0$ para todo $u \in \partial\mathcal{D}_2$ y $0 \leqslant t \leqslant 1$. Porque si $(I-t\hat{T}_2)[u] = 0$ para algún $u \in \partial\mathcal{D}_2$ y algún $t_0 \in [0,1]$ entonces $u = t_0\hat{T}_2[u]$, $(L+1)[u] = t_0 b(\eta_2+\|\nabla_x u\|^2)$, por lo tanto, por la parte (a), $\|u\|_{1+\beta} < \bar{\bar{K}}\gamma(\|t_0 b\|_{\infty}) < R_2$, lo cual es absurdo.

Por ser $\hat{T}_2$ un operador compacto, $t\hat{T}_2$ es compacto para cada $t \in [0,1]$.

Lo anterior nos permite definir el grado de Leray-Shauder: $dg(I-t\hat{T}_2,0,\mathcal{D}_2)$. Por la propiedad de invariabilidad de las homotopías en la Teoría del grado (ver [6], pág.341, Teorema 13.3.6) tenemos que:

$$dg(I,0,\mathcal{D}_2) = dg(H_0,0,\mathcal{D}_2) = dg(H_1,0,\mathcal{D}_2) = dg(I-\hat{T}_2,0,\mathcal{D}_2).$$

Como $0 \in \mathcal{D}_2$, $dg(I,0,\mathcal{D}_2) = 1$; $dg(I-\hat{T}_2,0,\mathcal{D}_2) \neq 0$, por otra conocida propiedad (existencia de soluciones) del grado (ver [6] pág.341, Teorema 13.3.6), existe $u_2 \in \mathcal{D}_2$ tal que $(I-\hat{T}_2)[u_2] = 0$.

Suponiendo que hemos encontrado las soluciones $u_1,u_2, \dots,u_k \in \mathbb{E}$ del problema $(L+1)[u_i] = b(\eta_i+\|\nabla_x u_i\|^2)$ $i = 1,2, \dots,k$ y que existe una función creciente y continua $\gamma_k:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que $\|u\|_{2,p} \leq \gamma_k(\|b\|_\infty)$ para toda solución $u \in \mathbb{E}$ del problema $(L+1)[u] = b(\eta_k+\|\nabla_x u\|^2)$.

Recursivamente podemos encontrar una solución $U_{k+1} \in \mathbb{E}$ del problema $(L+1)[u] = b(\eta_{k+1}+\|\nabla_x u\|^2)$ procediendo de manera análoga como en el caso de η_2. Por lo tanto, existe una solución $u_n = u \in \mathbb{E}$ del problema $(L+1)[u] = b(\eta_n+\|\nabla_x u\|^2) = b(1+\|\nabla_x u\|^2)$ y una función creciente $\gamma_n = \gamma$ tal que $\|u\|_{2,p} \leq \gamma(\|b\|_\infty)$.

Demostración del Lema 1.2. Supongamos que $u_1,u_2 \in \mathbb{E}$ son dos soluciones del problema (I), denotemos con $z = u_1-u_2$, entonces $L[z] = b(\|\nabla_x u_1\|^2-\|\nabla_x u_2\|^2)$ en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$, $z \equiv 0$ en $\partial\Omega\times\mathbb{R}$.

Fácilmente se puede ver que $\|\nabla_x u_1\|^2-\|\nabla_x u_2\|^2 = \sum_{i=1}^{N} k_i \frac{\partial z}{\partial x_i}$, donde $k_i = \frac{\partial u_1}{\partial x_i}+\frac{\partial u_2}{\partial x_i}$. Por lo tanto: $\tilde{L}[z] = 0$ en

$\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$, $z \equiv 0$ en $\partial\Omega\times\mathbb{R}$, donde $\tilde{L}[z] = L[z] - b \sum_{i=1}^{N} k_i \frac{\partial x}{\partial x_i}$, el principio del máximo para ecuaciones diferenciales de tipo parabólico (ver [7], pág.34, Teorema 1) implica que $z \geqslant 0$ en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$, es decir, $u_1 \geqslant u_2$. En forma análoga se demuestra que $u_1 \leqslant u_2$. Luego $u_1 \equiv u_2$ en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$.

Demostración del Lema 1.3. Denotemos con $u^t(x) = u(x,t)$, para cada $t \in [0,T]$ fijo, $x \in \bar{\Omega}$. Usamos la desigualdad que aparece en el Teorema 10.1 pág. 27-29 (ver [8]). Tomamos p suficientemente grande $p > N$, $m = 2$, $r = p$, $j = 1$, $a = \frac{1}{2}$, $q = \infty$, $\hat{p} = 2p$ y obtenemos:

$$\left\|\frac{\partial u^t}{\partial x_i}\right\|_{2p}^{\bar{\Omega}} \leqslant C(\|u^t\|_{2,p}^{\bar{\Omega}})^{\frac{1}{2}}(\|u^t\|_{\infty}^{\bar{\Omega}})^{\frac{1}{2}} ,$$

para algún $i = 1,2,\ldots,N$, donde $C = C(\bar{\Omega},p,N)$. De aquí, se concluye que $\| |u_{x_i}|^2\|_p^{Q_T} \leqslant C^2\|u\|_{\infty}^{Q_T}\|u\|_{2,p}^{Q_T}$, por esta última desigualdad y la desigualdad triangular en L^p tenemos que

$$\left\|\sum_{i=1}^{N} |u_{x_i}|^2\right\|_p^{Q_T} \leqslant C_N^2\|u\|_{\infty}^{Q_T}\|u\|_{2,p}^{Q_T} .$$

Por lo tanto, $\| \|\nabla_x u\|^2\|_p^{Q_T} \leqslant \bar{K}\|u\|_{\infty}^{Q_T}\|u\|_{2,p}^{Q_T}$, donde $\bar{k} = C^2 N$.

Demostración del Lema 1.4. Tomamos $\tilde{c} = c-1$ en el operador L mencionado en la introducción y suponemos que $\eta_1 > \eta_2$.

$$(L+1)[M-V] = -\tilde{c}\,M - (L+1)[V] \geqslant |\eta_1-\eta_2|(\|b\|_{\infty} - |b|) - K\left[\sum_{i=1}^{N} k_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\right] ,$$

donde K es la cota de $|b(x,t)|$ en Q_T y k_i es la función mencionada en la demostración del Lema 1.2. Sea

$$\hat{L}[M-V] = (L+1)[M-V] - K\sum_{i=1}^{N} k_i \frac{\partial}{\partial x_i}(M-V) ,$$

entonces $\hat{L}[M-V] \geq 0$ en Q_T, $M-V \equiv M$ en $\partial\Omega\times[0,T]$ y por el principio del máximo podemos concluir que $M-V \geq 0$ en Q_T. En forma análoga se demuestra que $M+V \geq 0$ en Q_T.

Demostración del Lema 1.5. Existe una función $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\phi\in C^{\infty}(\mathbb{R})$, tal que **(i)** $\phi(t) = 0$ en $(\leftarrow,0)\cup(2T,\rightarrow)$, (ii) $\phi(t) = 1$ en $[T/2,\ 3T/2]$, **(iii)** $0 \leq \phi(t) \leq 1$ en $\mathbb{R}$.

Sea $V = \phi U$, entonces $L[V] = U\phi' + \phi f$ en $\bar{\Omega}\times[0,2T]$, por lo tanto, existe una constante $\bar{\bar{\bar{K}}} > 0$ (ver [4], pág. 342) tal que

$$\|V\|_{2,p}^{\bar{\Omega}\times[0,2T]} \leq \bar{\bar{\bar{K}}}\|\phi' u+\phi f\|_{p}^{\bar{\Omega}\times[0,2T]}$$

Ya que

$$\|V\|_{2,p}^{\bar{\Omega}\times[T/2,3T/2]} \leq \|V\|_{2,p}^{\bar{\Omega}\times[0,2T]}$$

y

$$\|V\|_{2,p}^{\bar{\Omega}\times[T/2,3T/2]} = \|u\|_{2,p}^{Q_T}, \qquad \text{se tiene que}$$

$$\|u\|_{2,p}^{Q_T} \leq \|V\|_{2,p}^{\bar{\Omega}\times[0,2T]}$$

Por lo tanto $\|u\|_{2,p}^{Q_T} \leq \bar{\bar{\bar{K}}}[\|\phi' u\|_{p}^{\bar{\Omega}\times[0,2T]} + \|\phi f\|_{p}^{\bar{\Omega}\times[0,2T]}]$ y de aquí, fácilmente se obtiene que

$$\|u\|_{2,p}^{Q_T} \leq c[\|u\|_{p}^{Q_T} + \|f\|_{p}^{Q_T}] \;,$$

donde $c = 2\bar{\bar{K}}m$, $m = \max\limits_{t\in[0,T]} \{\|\phi'\|_{\infty}\ \|\phi\|_{\infty}\}$.

Demostración del Lema 1.6. Puesto que

$$L[V] = b(\eta_2-\eta_1) + b(\|\nabla_x u_2\|^2 - \|\nabla_x u_1\|^2) - V \;,$$

se sigue que

$$\|L[V]\|_p \leqslant \|b\|_\infty |\eta_1-\eta_2|((m(\Omega)\times T)^{1/p} + \|b\|_\infty \| \|\nabla_x u_2\|^2$$
$$- \|\nabla_x u_1\|^2\|_p + \|V\|_p .$$

Ahora, por los Lemas 1.5 y 1.4 tenemos:

$$\|V\|_{2,p} \leqslant \bar{K}_1(\|V\|_p + \|L[V]\|_p) ,$$
$$\leqslant 3\bar{K}_1\|b\|_\infty|\eta_1-\eta_2|(m(\Omega)\times T)^{1/p}$$
$$+ \bar{K}_1\|b\|_\infty\| \|\nabla_x u_2\|^2 - \|\nabla_x u_1\|^2\|_p$$

Como $u_2 = V+u_1$, tenemos que

$$\|V\|_{2,p} \leqslant \bar{K}_1(3\|b\|_\infty(m(\Omega)\times T)^{1/p}$$
$$+ \bar{K}_1\|b\|_\infty\left[\| \|\nabla_x V+\nabla_x u_1\|^2\|_p + \| \|\nabla_x u_1\|^2\|_p\right]$$

Se puede probar que

$$\| \|\nabla_x V + \nabla_x u_1\|^2\|_p \leqslant 2(\| \|\nabla_x V\|^2\|_p + \| \|\nabla_x u_1\|^2\|_p).$$

Reemplazando esta última desigualadad en la desigualdad inmediatamente anterior tenemos:

$$\|V\|_{2,p} \leqslant \bar{K}_1(3\|b\|_\infty(m(\Omega)\times T)^{1/p}) + \bar{K}_1\|b\|_\infty\| \|\nabla_x u_1\|^2\|_p$$
$$+ 2\bar{K}_1\|b\|_\infty\| \|\nabla_x V\|^2\|_p + 2\bar{K}_1\|b\|_\infty\| \|\nabla_x u_1\|^2\|_p$$
$$\leqslant \bar{K}_1(3\|b\|_\infty(m(\Omega)\times T)^{1/p}) + K_1\|b\|_\infty\| \|\nabla_x u_1\|^2\|_p$$
$$+ K_2\|b\|_\infty\| \|\nabla_x V\|^2\|_p, \quad \text{donde} \quad K_1 = 3\bar{K}_1,\ K_2 = 2\bar{K}_1$$

Aplicamos las desigualdes de los Lemas 1.3 y 1.4 y obtenemos la desigualdad deseada.

Demostracion del Corolario 1.7. Por las desigualdades de los lemas 1.6 y 1.3 tenemos que

$$\|V\|_{2,p} \leq \bar{K}_1(3\|b\|_\infty(m(\Omega)\times T)^{1/p}) + K_1\bar{K}\|b\|_\infty\|u_1\|_\infty\|u_1\|_{2,p} + \frac{1}{2}\|V\|_{2,p}.$$

Ya que $\|u_1\|_\infty \leq C_1\|u_1\|_{2,p}$ obtenemos la desigualdad deseada, tomando $\tilde{K}_1 = 2\bar{K}_1$, $\hat{K}_1 = 2K_1\bar{K}C_1$.

SECCION 2. El propósito de esta sección, es obtener una cota a priori de la solución del Problema (II).

2.1. *TEOREMA. Si* $f:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *es una función T-periódica en t, de clase* C^1 *tal que*

$$|f(x,t,u,y_1,y_2,\ldots,y_N)| \leq C(r)\left[1+\|(y_1,y_2,\ldots,y_N)\|^2\right]$$

para toda u, tal que $|u| \leq r$ y $u \in \mathbb{E}$ es solución del problema (II), $\|u\|_\infty \leq r$ entonces $\|u\|_{2,p} \leq \Upsilon(C(r)+r)$, donde Υ es la misma función mencionada en el Teorema 1.1.

Demostración. Ya que u es solución del problema (II) entonces u satisface el problema:

$$\begin{cases} (L+1)[u] = f(x,t,u,\nabla_x u)+u & \text{en } \Omega\times\mathbb{R}, \\ u \equiv 0 \quad \text{en } \partial\Omega\times\mathbb{R}, \\ u \in \mathbb{E}. \end{cases}$$

Puesto que

$$f(x,t,u,\nabla_x u)+u = \frac{(f(x,t,u,\nabla_x u)+u)}{1+\|\nabla_x u\|^2}(1+\|\nabla_x u\|^2),$$

Tenemos que satisface el problema:

$$\begin{cases} (L+1)[u] = B[1+\|\nabla_\chi u\|^2] & \text{en } \Omega\times\mathbf{R}, \\ u \equiv 0 \quad \text{en } \partial\Omega\times\mathbf{R}, & \\ u \in \mathbf{E} \quad , & \end{cases}$$

donde

$$B = \frac{f(x,t,u,\nabla_\chi u)+u}{1+\|\nabla_\chi u\|^2} \in C^\alpha(\bar{\Omega}\times R), \quad \|B\|_\infty \leqslant C(r)+r .$$

Por el Teorema 1.1, $\|u\|_{2,p} \leqslant \gamma(\|B\|_\infty)$, es decir,

$\|u\|_{2,p} \leqslant \gamma(C(r)+r)$.

* *

[1] Amann, H. and Grandall., *On Some existence theorem for semilinear elliptic equations.* Indiana Univ. Math. J. 27 (1978) 777-790.

[2] Kazdan, J. and Kramer, R., *Invariant criteria for existence of solutions to second order quasilinear eelliptic equations.* Comm. Pure and Applied Math. Vol. XXXI (1978), 629-645.

[3] Kolesov, Ju.S., *A test for existence of periodic solutions to parabolic equations.* Soviet Math. Dokl. Vol. 7 (1966), Nº 5.

[4] Ladyzenskaja, O.A., Solonnikov, V.A. and Urulceva, N.N., *Linear an quasi-linear equations of parabolic type.* American Math. Soc. Rhode Island (traslated from the russian by S. Smith) (1968), 342.

[5] Ortega, L., *Sobre las soluciones periódicas del problema de Dirichlet para ecuaciones de tipo parabólico.* Revista Colombiana de Matemáticas, Vol. XIX (1985), 233-250.

[6] Hutson V. and Pym, J.S., *Applications of functional Analysis and Operator theory.* Academic Press (1980).

[7] Avner, Friedman, *Partial differential equations of parabolic type.* Prentice Hall, Inc., Englewood, cliffs, N.J., (1964).

[8] Avner, Friedman, *Partial differential equations*, Holt. Rinehart and Winston, Inc. (1969).