ISSN 0120-8233

REVISTA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD JAVERIANA

CONTENIDO

Rev. Fac. Cien. UNIV. JAV.	Bogotá, D.E. Colombia	V. I	Nº 2	Pp. 1-164	Enero-Junio 1988	ISSN 0120-8233

ANILLOS DE BOOLE

(2a. Parte)

CARLOS RUIZ S. (2)

RESUMEN

Se analiza la función (y el funtor) Ac(t) de los abiertos-cerrados de un espacio (X,t). Primero fijando X, dentro del contexto de las funciones adjuntas y luego con X y t variables. Se construyen los adjuntos y se analizan los puntos fijos en el primer caso y los morfismos estructurales de la adjunción, en el segundo.

ABSTRACT

The Function (and the Functor) Ac(t) of the open closed subsets of a Topological space (x,t) were analysed. The analysis was made first when X is fixed, in the context of the adjoint functions, with the corresponding study of fixed points of the adjoint pair (T_X, Ac_X). When x is variable we replace the study in the context of the adjoint contravariant functors and analyse the sense of the adjoinction morphisms.

PALABRAS CLAVE

Funciones adjuntas - Pares adjuntos - Puntos fijos de pares adjuntos- Elementos mínimos - Espacio totalmente disconexo - Elementos minimales.

---

(1) Forma parte del Proyecto: Una visión algebráica de la Topología General.

(2) Profesor Titular Universidad Nacional de Colombia. Profesor Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Javeriana. Apartado Aéreo 56710 Bogotá - Colombia.

ANILLOS DE BOOLE II

En la primera parte de esta segunda entrega sobre el tema de los anillos de Boole presentamos un ejemplo típico, que nace de la topología. Se trata del sub-anillo $Ac_X(t)$ del anillo de las partes, formado por aquellos sub-conjuntos de un espacio topológico (X,t) que son a la vez abiertos y cerrados.

Con el fín de analizar esta construcción iniciamos con un estudio de los elementos minimales de $Ac_X(t)$. Aplicamos entonces los resultados obtenidos allí para mostrar ejemplos de anillos Booleanos sin elementos minimales.

Después de determinar convenientemente el codominio de la función Ac_X se demuestra que admite adjunto a izquierda T_X y se procede, como es costumbre en estos casos, a estudiar los puntos fijos de las funciones $T_X\, Ac_X$ y $Ac_X\, T_X$.

La segunda parte de este trabajo está dirigida a generalizar la primera dejando libre el conjunto X sobre el que se trabaja. Lo que nos lleva a considerar la definición de un funtor contravariante Ac y establecer la existencia de su adjunto T. El trabajo termina haciendo notar el lugar que ocupan los morfismos estructurales de esta adjunción funtorial, dentro del contexto de la representación de anillos de Boole.

ANILLOS DE BOOLE II

1. LAS CONSTRUCCIONES ADJUNTAS Ac(t) y T(A)

a) Definición de la función Ac

Fijamos, para iniciar, un conjunto X y sobre él consideramos una topología t. Denotamos por Ac(t) el conjunto de los conjuntos de X que son a la vez abiertos y cerrados para la topología t.

La suma A + B en el anillo P(X) de dos elementos A y B de Ac(t) está de nuevo en Ac(t): basta analizar la descripción $A + B = (A\cup B) - (A\cap B)$. De igual manera $A.B = A\cap B$ estará en Ac(t).

Ac(t) es un subanillo, con unidad, del anillo P(X). Es evidente que no se trata de un ideal.

Si Top(X) y $S_1P(X)$ denotan respectivamente el conjunto de topologías sobre X y el conjunto de subanillos del anillo P(X) que compartel el elemento unidad con P(X), habremos definido una aplicación.

$$Ac_X = Ac : Top(X) \longrightarrow S_1P(x)$$

b) Monotonía de Ac

Es claro que si dos topologías s y t están encajadas (s < t) también lo estarán sus abiertos-cerrados: Ac(s) c Ac(t). Puede ser, sin embargo, que dos topologías distintas tengan los mismos abiertos-cerrados. Es el caso de una topología de espacio conexo sobre X y la topología grosera.

El elemento máximo de Top(X) se transforma en el máximo de $S_1P(X)$ mediante la función Ac; el mínimo en el mínimo.

Evidentemente Ac transforma intersecciones en intersecciones (y no solamente en el caso de intersecciones finitas). No sucede lo mismo con los extremos superiores.

c) **Minimales de Ac(t)**

Recuérdese que se llama minimal en el anillo Ac(t) un elemento minimal, para el orden natural, en el conjunto constituído por los elementos no nulos de Ac(t).

<u>**Afirmación**</u>: 1) Para que un elemento M de Ac(t) sea minimal es condición necesaria y suficiente que el subespacio (M,t_M) sea un espacio topológico conexo, es decir que $Ac(t_M)$ sea isomorfo a Z_2.

2) Si para una topología t sobre un conjunto X las componentes conexas son subconjuntos abiertos (¡siempre son cerradas!) entonces ellas forman los elementos minimales del anillo de Boole Ac(t).

3) Si Ac(t) tiene suficientes minimales entonces estos elementos minimales representan las componentes conexas del espacio (X,t), que por estar en Ac(t) son a la vez abiertas y cerradas.

Proposición: Las condiciones siguientes son equivalentes para un subespacio no vacío V de un espacio (X,t):

1) V es abierto, cerrado y conexo;
2) V es una componente conexa abierta de (X,t);
3) V es un elemento minimal de Ac(t).

Demostración: 1) => 2) Si W contiene a V y W es conexo entonces V es un abierto y cerrado en W y en consecuencia W - V y así V es conexo maximal y es abierto por hipótesis.

2) => 1) Toda componente conexa es cerrada (evidente);

3) => 1) V es minimal en Ac(t) es abierto y cerrado en t, y además, si hubiera un subconjunto propio a la vez abierto y cerrado en X y entonces V no sería minimal en Ac(t).

Corolario: Ac(t) no tiene minimales si ninguna componente conexa de t es abierta.

Resumen: Para una topología t sobre un conjunto X, las condiciones son equivalentes:

1) Las componentes conexas de (X,t) son conjuntos abiertos;
2) El espacio topológico cociente (Y = X/T,s = t/R) de X por la relación de equivalencia "x Rz si x y z están en la misma componente conexa" es discreto;
3) La función θ *:P(Y) —> P(X) asociada a la aplicación canónica θ :X —>Y = X/R, por el procedimiento "imagen recíproca", se factoriza a través de Ac(t).

$$\begin{tikzcd} P(Y) \arrow[rr, "\Theta^*"] \arrow[dr] & & P(X) \\ & Ac(t) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

4) En el anillo Ac(t) hay suficientes minimales. Un caso particular que merece ser analizado es el de una topología t de **espacio totalmente disconexo**: es decir aquella en la que un subconjunto conexo no puede ser sino puntual o el conjunto vacío. En esos espacios los puntos son cerrados, pero no necesariamente abiertos.

Consecuencia: Si t es una topología de espacio totalmente disconexo, un elemento minimal de Ac(t) es necesariamente puntual.

$$\min(Ac(t)) = \{\{p\} \mid p \in X \text{ y} \{p\} \text{ es abierto}\}$$

d) **Ejemplos de anillos de Boole sin elementos minimales.**

De acuerdo con el resultado anterior si se desea tener un anillo de Boole **sin** elementos minimales habría que buscarlo, por ejemplo, entre los de la forma Ac(t) en donde t es una topología totalmente disconexa pero en la que los puntos **no** son subconjuntos abiertos.

Ejemplo: 1) Los números racionales Q con la topología usual.

2) El conjunto de Cantor.

3) Un poco más general que el ejemplo 2) es el de un pro-

ducto $\Pi_S X_\alpha$, espacio discretos, siempre y cuando el conjunto de índices S sea infinito;

4) Mas general es el caso de un producto con factores extraídos de los ejemplos anteriores.

5) También entran en consideración las sumas de espacios $(X_\alpha t_\alpha)$, sumas finitas o infinitas (aquí no importa), que cumplan la condición min $Ac(t_\alpha) = \phi$: en ese caso min $Ac(t) = \phi$ si t representa la topología suma de los t_α sobre el conjunto $\coprod X_\alpha$

6) Este último hecho deriva su validez de otro, eminentemente algebraico (como se comprueba al consultar la cita anterior): el producto de anillos de Boole sin elementos minimales no tiene elementos minimales. Hecho al que se agrega que las sumas, en topología, se transforma en productos por el operador Ac.

e) **Existencia de la Función Adjunta a Izquierda**

$T: S_1P(X) \longrightarrow Top(X)$ de la función $Ac: Top(X) \longrightarrow S_1P(X)$

Afirmación: Como la función $Ac: Top(X) \longrightarrow S_1P(X)$ conmuta con extremos inferiores y transforma el máximo en el máximo, y, como por otra parte, en Top(X) siempre existen los extremos inferiores, entonces la función Ac admite adjunto a izquierda denotado por T.

En un diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Top}(X) \arrow[r, "Ac"] \arrow[dr, bend right, "1"'] \arrow[dr, "TAc"] \arrow[dr, phantom, "\geq"] & S_1 P(X) \arrow[d] \arrow[dr, "AcT"'] \arrow[dr, bend left, "1"] \arrow[dr, phantom, "\geqq"] & \\
& \mathrm{Top}(X) \arrow[r, "Ac"] & S_1 P(X)
\end{tikzcd}$$

(1 representa la identidad). Recordemos que con esto se quiere decir que:

(.) Para cada topología t sobre X, $T.Ac(t) \leq t$, y

(..) Para cada sub-anillo unífero B de P(X), $Ac.T(B) \geq B$.

(2) El operador $T: S_1 P(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(X)$ está definido (de acuerdo con [4] 10. página 3) por la ecuación

$$T(B) = \inf\{t \mid Ac(t) \geq B\}$$

(3) La topología T(B) queda caracterizada como la engendrada por los conjuntos U, de X, que pertenecen a B: un conjunto será abierto en T(B) si es reunión de conjuntos U del anillo B.

f) Puntos fijos del operador T.Ac: Top(X)⟶Top (X).

Un conjunto será abierto para la topología T.Ac(t) si y solamente si se expresa como una reunión de conjuntos a la vez abiertos y cerrados para la topología t.

Debe observarse sin embargo que un tal conjunto, si bien es abierto en t, no necesariamente es cerrado.

Así pues t es un punto fijo del doble mecanismo T.Ac - es decir t = T.Ac(t) si y solamente si todo abierto de t es reunión de conjuntos a la vez abiertos y cerrados para la topología t. En otras palabras si los abiertos-cerrados de t forma una fase de t.

Afirmación: t es punto fijo de T.Ac si y solo si existe s en Top X tal que T.Ac(s) = t.

Esta es una característica corriente de las funciones adjuntas como se puede comprobar fácilmente (Cf.[3] y [4]).

Nota: Hay que cuidarse de esperar que los abiertos de T.Ac(t) sean cerrados: en una de estas topologías "punto fijo", puede haber abiertos que no son cerrados: se verá mejor la situación si se consulta el caso de los racionales con la topología usual: el intervalo (0,1) es abierto y no es cerrado, a pesar de que todo abierto es reunión de intervalos de centro racional y radio irracional. Estos últimos son, a la vez, abiertos y cerrados en Q.

f.1) La propiedad de ser punto fijo, es hereditaria.

Afirmación: Si t es un punto fijo de la aplicación $T_X Ac_X$: Top(X) —> Top(X) y A es un subconjunto cualquiera de X, entonces $t|_A$ es un punto fijo de $T_A\ Ac_A$: Top(A) —> Top(A).

Nota: Si A es un subconjunto denso del espacio X, para una topología t sobre X, tal que $t|_A$ sea punto fijo de $T_A Ac_A$, **no** necesariamente el espacio (X,t) es punto fijo de $T_X\ Ac_X$.

f.2) La propiedad del punto fijo de $T_X\ Ac_X$ es local.

Afirmación: Para una topología t sobre X las condiciones siguientes son equivalentes:

a) t es punto fijo de $T_X Ac_X$;

b) t es 0-dimensional, es decir, todo punto admite un sistema fundamental de vecindades que son conjuntos a la vez abiertos y cerrados de t.

f.3) Hausdorff para R Ac(t) y disconexidad total de t.

Afirmación: a) Si la topología T Ac(t) es de Hausdorff entonces t es totalmente disconexa;

b) Si t es una topología de espacio compacto Hausdorff, entonces: t es totalmente disconexa si y solo si T Ac(t) es de Hausdorff. [Cf.[5]: Willard, pág. 215 Ejercicio 29 D.].

f.4) Los puntos fijos de T Ac y las sumas.

Afirmación: Sea $\{(X_\lambda, t_\lambda)\}$ una familia de espacios topológicos. Sobre $X = \quad X_\lambda$ se considera la topología t suma de las t_λ. Si cada t_λ es punto fijo de $T_\lambda Ac_\lambda$: $Top(X_\lambda) \longrightarrow Top(X_\lambda)$ entonces t es punto fijo de $T\ Ac_X$.

Este hecho es consecuencia inmediata de que en la topología suma, todos y cada uno de los sumandos son a la vez abiertos y cerrados.

f.5) Imagen directa por monomorfismos de puntos fijos de T.Ac.

Sea $f:X \longrightarrow Y$ una aplicación inyectiva. Si t es una topología sobre X se denota por $f!(t) = s$ la topología imagen directa por f:B es abierto para s y solo si $f^{-1}(B)$ es abierto en X para t (igual afirmación vale para los cerrados). Se anota que, en consecuencia un conjunto B de Y-f(A) es a la vez abierto y cerrado para s. Por otra parte, como f se supuso inyectiva, si A es abierto (res. cerrado) para t, f(A) es abierto (resp. cerrado) para s: nótese que $f^{-1}f(A) = A$. Estas dos observaciones explican lo siguiente:

Afirmación: Si t es punto fijo para $T_X Ac_X$ entonces s es punto fijo de $T_Y Ac_Y$.

f.6) Puntos fijos que recubren un punto fijo

Afirmación: Si $\{A_\lambda\}$ es un recubrimiento a la vez abierto y cerrado de X y cada $(A_\lambda, t|_{A_\lambda})$ es un punto fijo de $T_{A_\lambda} Ac_{A_\lambda}$ entonces t es un punto fijo de T.Ac(f.4 anterior).

g) **Puntos fijos del Operador Ac.T:$S_1P(X) \longrightarrow S_1P(X)$**

Descripción de Ac T(B): Un subconjunto K de X que se puede escribir a la vez:

a) como reunión de elementos de B y b) como intersección de elementos de B forma parte del anillo Ac.T(B). Inversamente los subconjuntos de X que forman a Ac.T(B) se expresan de esta doble manera.

Consecuencia: B es un punto fijo de la función $Ac.T:S_1P(X) \longrightarrow S_1P(X)$ a la condición necesaria y suficiente que cumpla la siguiente condición de estabilidad: todo subconjunto K de X que se pueda expresar a la vez a) como una reunión de elementos de B, b) y como una intersección de elementos de B, está en B.

En particular: Si $B \in S_1P(X)$ es cerrado para extremos superiores (y, en consecuencia, para extremos inferiores por tener elemento unidad) entonces B es punto fijo de Ac.T.

Nota: No es cierto, sin embargo que un anillo punto fijo para la función Ac.T. sea cerrado para extremos superiores. Veamos un ejemplo: Sea $B = Ac.(t_Q)$ en tonde t_Q es la topología usual de los racionales. En primer lugar

$$B = Ac.(t_Q) \text{ es un punto fijo de T.Ac.}$$

En segundo lugar los intervalos racionales de centro racional y radio irracional que se encuentran en el intervalo racional (0,1) están todos en $Ac(t_Q)$ pero su reunión que es (0,1) no está.

En cuanto a la primera afirmación hagamos la siguiente precisión:

Afirmación: Si t es una topología sobre X, el anillo unífero

Ac.(t) = B es un punto fijo de Ac.T:

Ac.T(Ac.(t)) = Ac (t), $t \in$ Top(X).

<u>Demostración:</u> Repetimos el proceso de [3] (y de [4]): Por adjunción T.Ac(t) < t. Por cuanto Ac es monótona Ac T. Ac(t) < Ac(t). Es decir Ac T.(B) $\leq$ B. Pero por otra parte por adjunción B < Ac T.(B). De donde la conclusión.

2. LOS FUNTORES ADJUNTOS Ac y T

En el capítulo titulado **Las Funciones Adjuntas** Ac(t) y T(A) se había trabajado con funciones monótonas entre conjuntos ordenados: T_X: $S_1P(X) \longrightarrow Top(X)$ y $Ac_X:Top(X) \longrightarrow S_1P(X)$; se demostró que son adjuntas (T_X es adjunta a la izquierda de Ac_X).

En este consideramos categorías y extendemos las construcciones anteriores hasta describir dos funtores contravariantes que notaremos con letras **T** y **Ac**. Enunciamos la relación que los liga, la de adjunción. La demostramos y sacamos algunas consecuencias.

Si bien es así que, en cierto momento, recurrimos a las construcciones $T_X(A)$ y $Ac_X(t)$ hay apartes del nuevo trabajo que no se pueden prever dentro de este contexto y que son totalmente independientes del capítulo citado arriba. Por el contrario la representación $M_A:A \longrightarrow P(min(A))$ de un anillo de Boole en un anillo de partes, tratada en [6], es usada profusamente.

a) Descripción de la Categoría S_1Bo_1

Los objetos de $\mathbf{S_1Bo_1}$ son parejas (A,A_1) en donde A representa un anillo de Boole con elementos unidad (por eso utilizamos el símbolo $\mathbf{Bo_1}$) y A_1 representa un subanillo de A que tiene el mismo elemento unidad de A (por lo que empleamos las letras S_1 en la notación $\mathbf{S_1}Bo_1$).

Los morfismos $f:(A, A_1) \longrightarrow (B,B_1)$ son (a) Homomorfismos de anillos $f:A \longrightarrow B$ que conservan el elemento unidad (Ver observación después del literal d.2 de este capítulo); (b) que además transforman A_1 en B_1: $f(A_1) \subset B_1$; (c) y, en fín, son **especiales** (Cf [6] es decir que para cada elemento miniml b de B, existe un elemento minimal a de A tal que f(a) = b. (Como se demostró en (6) este elemento **a** está completamente determinado por b y por f).

La composición de morfismos se hace de manera natural.

b) Descripción del funtor Ac; Top $\longrightarrow$ S_1Bo_1

Si X = (X,t) representa un espacio topológico, **Ac**(X) es la pareja (P(X), Ac(t)), en donde P(X) representa el anillo de partes del conjunto X y Ac(t) el subanillo formado por los conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados en X para la topología t.

Si $f:\mathbf{X} = (X,t) \longrightarrow \mathbf{Y} = (Y,s)$ es una función contínua, $\mathbf{Ac}(f):\mathbf{Ac}(\mathbf{Y}) \longrightarrow \mathbf{Ac}(X)$ representa la función $P(F);P(Y) \longrightarrow P(X)$ que a $U \subset Y$ asocia $P(f)(U) = \{x \in X | f(x) \in U\}$: la función "imagen recíproca" por f. La continuidad de f hace que P(f) transforme abiertos-cerrados de **Y** en abiertos-cerrados de $\mathbf{X}$:$P(f):Ac(s) \longrightarrow Ac(t)$. Que P(f) sea especial y unífero es ya conocido.

c) Descripción del Funtor $T:S_1Bo_1 \longrightarrow Top$

Si $A = (A,A_1)$, definimos $\mathbf{T}(\mathbf{A})$ como el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es $\mathbf{M}(\mathbf{A})= \min(A)$, es decir el conjunto de minimales de A {0} (Cf.[6]). Sobre el que se considera la topología, denotada por $T(A_1)$, y generada por la colección $\{\min(a) | a \in A_1\}$:

$$\mathbf{T}(\mathbf{A}): = (\mathbf{M}(\mathbf{A}), T(\mathbf{A}_1))$$

Nota: No hay razón para esperar que los conjuntos min(a) recubran $\mathbf{M}(A)$ cuando a recorre A_1, si no se ha supuesto que la unidad de A_1 y la de A coincidan como se ha hecho.

Por otra parte la colección $\{\min(a)\}_{a \in A_1}$ satisface

$$\min(a) \cap \min(a') = \min(aa')$$

lo cual entraña que un abierto de $T(A_1)$ sea todo conjunto que se puede expresar como reunión de conjuntos de la forma min(a), $a \in A_1$.

Caractericemos ahora la función $\mathbf{T}(f); \mathbf{T}(B) \longrightarrow \mathbf{T}(\mathbf{A})$ asociada a un morfismo $f:\mathbf{A} = (A,A_1) \longrightarrow \mathbf{B} = (B,B_1)$: En [6] habíamos asociado a un homomorfismo especial de anillos $f{:}A \longrightarrow$ una aplicación conjuntista $\mathbf{M}(f) : \mathbf{M}(B) \longrightarrow \mathbf{M}(A)$ definida así:

$\mathbf{M}(f)(b) = a$, si y solo si, a es el único minimal de A que cumple $f(a) > b$.

Si se recuerda que se está trabajando únicamente con minimales podríamos resumir la definición de $\mathbf{M}(f)$ por la equivalencia.

$$\mathbf{M}(f)(b) = a, \text{ ss, } f(a) > b$$

o, si se prefiere por la relación $f(\mathbf{M}(f)(b)) > b$.

Afirmación: Si $f{:}A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos de Boole y a es elemento de A entonces

$$M(f)^{-1}\ (\min(a)) = \min(f(a)))$$

Demostración: a) Si un elemento b de $\min(B)$ está en $M(f)^{-1}(\min(a))$ es porque $x=M(f)(b)$ estará en $\min(a)$. Es decir que $f(x) > b$ y además $a > x$. Como f es monótona, por ser un homomorfismo de anillos, $f(a) > f(x) > b$. Es decir que $b \in \min\ (f(a))$.

b) Inversamente sea $b \in \min(f(a))$. Es decir que b es minimal de B y que $b.f(a)=b$. Veamos que el elemento x_1 de $\min(A)$ definido por la relación $f(x_1) > b$ está en $\min(a)$. Si $x_1.a$ fuese 0 entonces $f(x_1)f(a)$ sería 0. Pero como $f(x_1)$ y $f(a)$ superan a $b, 0 = f(x_1)f(a) > b.b = 0$. Lo que no puede ser porque b es minimal. Es decir $x_1.\ a$ no puede ser cero y debe ser x_1(si se aplica el test de minimales de [6]). En consecuencia $x_1<a$; es decir

que $x_1 \varepsilon$ min(a).

Consecuencia: Si f:**A** = (A,A_1) --->B = (B,B_1) es un morfismo de la categoría S_1Bo_1, la aplicación

$$\mathbf{M}(f) = \mathbf{M}(B) \longrightarrow M(A)$$

es contínua cuando sobre **M**(B) se considera la topología $T(B_1)$ generada por los conjuntos min(b), con $b \varepsilon B_1$ y, en **M**(A), la topología $T(A_1)$.
Definimos T(f) como la función **M**(f) agregando claro está la continuidad a ésta última; quizá esta consideración justifique el cambio de notación.

d) **La Adjunción de los Funtores Ac y T.**

Por la forma como han sido definidos

$$\mathbf{Ac}: \mathbf{Top} \longrightarrow S_1\mathbf{Bo}_1 \text{ y } T: S_1\mathbf{Bo}_1 \longrightarrow \mathbf{Top}$$

son funtores contravariantes. A este hecho podemos agregar

Afirmación: **Ac y T** son Adjuntos a la derecha: con esto queremos decir que existe un isomorfismo natural

$$\phi_{A,X} : [A,Ac(X)] \longrightarrow [X,T(A)]$$

Por la similitud existente se aconseja consultar el capítulo titulado El Funtor P Admite Adjunto de [6].

Los corchetes [U,V] sirven indiscriminadamente para denotar el conjunto de morfismos de fuente U y meta V en la categoría donde se encuentren los objeto U y V.

d-1) **Demostración:** Definición de $\phi_{A:X}$: Sea

$$f:\mathbf{A} = (A,A_1) \longrightarrow Ac(X)$$

un morfismo en la categoría $\mathbf{S_1Bo_1}$:**X** denota el espacio topológico (X,t). De acuerdo con las definiciones $f:A \longrightarrow \mathbf{P}(X)$ es un homomorfismo de anillos-unífero en este caso tal que $f(A_1) \subset Ac(t)$. Además se ha supuesto que f es especial. En consecuencia f da lugar a una función $\mathbf{M}(f)$ entre los minimales de P(X) y los de A, como se hizo en [6], capítulo 2.

$$\mathbf{M}(f) = M(\mathbf{P}(X)) \longrightarrow \mathbf{M}(A)$$

Si por otra parte $i_X:X \longrightarrow \mathbf{M}\mathbf{P}(X)$ denota la biyección natural evidente entonces $g = \mathbf{M}(f).i_X:X \longrightarrow \mathbf{M}(A)$ es la aplicación que vamos a considerar. Veamos que

$$g:X = (X,t) \longrightarrow (\mathbf{M}(A),T(A_1)) = T(A)$$

es una función contínua. Hecho lo cual definimeremos

$$\phi_{A;X}(f): = \mathbf{M}(f).i_X.$$

Que g es contínua resulta de la relación

$$g^{-1}(\min(a)) = i^{-1}(\mathbf{M}(f)^{-1}(a))=i^{-1}(\min(f(a))) \subset X$$

que, para valores de A_1, implica que, como $f(A_1) \subset Ac(t)$, entonces $i^{-1}\min(f(a))$ sea un subconjunto abierto y cerrado para t. Así que $g^{-1}(\min(a))$ es abierto de t si a está en A_1. Y como los min(a) con a en A_1, forman una base de abiertos para la estructura topológica $T(A_1)$, la función g resulta contínua).

d-2) $\phi_{A;X}$ es una biyección. En primer lugar ya había establecido en [6] Capítulo 2 que ϕ establece una biyección entre los homomorfismos de anillos $f:A \longrightarrow P(X)$ y las aplicaciones $g:X \longrightarrow \mathbf{M}(A)$. Hemos agregado que si $f(A_1) \subset Ac(t)$, entonces $g:(X,T) \longrightarrow (\mathbf{M}(A), T(A_1))$ resulta contínua.

Veamos ahora que si, inversamente, g es contínua la función f que le corresponde transforma elementos de A_1 en elementos de $Ac(t)$: la relación, ya utilizada varias veces, $g^{-1}(\min(a)) = \min(f(a))$,entraña que, si g es contínua, $\min(f(a))$será abierto para la topología t si $a \in A_1$. Aquí interviene el hecho de admitir el sub-anillo A_1 con elemento unidad y de la suposición suplementaria que coincida con el de A: en efecto 1+a estará entonces en A_1, cuando **a** esté en A_1. Además $\min(f(a))$ y $\min(f(a+1))$ van a ser complementarios en X y como ambos son abiertos se concluye que $\min(f(a))$ es abierto y cerrado en t. Con lo cual se deduce que $f(a)$ está en $Ac(t)$.

Nota: Obsérvese que si $g:X \longrightarrow \mathbf{M}(a)$ es una aplicación, el elemento $f(a)$ para un elemento a de A, es el subconjunto de X determinado por $g^{-1}(\min(a))$. Si en A hay elemento unidad 1 entonces $f(1)$ será $g^{-1}(\min(1)) = g^{-1}(\min A) = g^{-1}(\mathbf{M}(A)) = X$ es decir $f(1) = 1$. Por esta razón no estamos imponiendo condición suplementaria a las funciones al decir que son uníferas: De manera más precisa.

Observación: Si $f:A \longrightarrow B$ es un homomorfismo especial de anillos de Boole y en A y B hay elemento unidad, B con suficientes minimales, necesariamente $f(1) = 1$. De no ser así, $f(1) \neq 1$ y existitía un elemento minimal x tal que $x.f(1)=0$. Pero como se supone que f es especial hay un minimal a de A tal que $f(a) > x$. Con lo cual $f(1) > f(a) > x$ (porque f es monótona y $1 > a$). Es decir $0=f(1).x=x$. Contradiciendo el hecho de que x sea minimal.

e) Los morfismos estructurales de la Adjunción.

e-1) Si en la ley de adjunción, como fue descrita en el parágrafo d), se reemplaza **A** por **AcX** entonces la identidad de **Ac(X)** corresponde con un morfismo en **Top**:

$$\alpha_X: X \longrightarrow T\, \mathbf{Ac}(\mathbf{X})$$
$$: (X,t) \longrightarrow (X, T\, Ac(t))$$

que no es otro que la aplicación idéntica desde el punto de vista conjuntista y cuya continuidad nos dice de nuevo que $t > T\, Ac(t)$.

e-2) Si por el contrario, se reemplaza X por T(A), la función $\phi_{A,T(A)}$ transforma la identidad de **T(A)** en el otro morfismo de adjunción.

$$\beta_A: \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{AcT}(A)$$
$$\beta_{\mathbf{A}}: (A,A_1) \longrightarrow (PM(A),\, AcT(A_1))$$

A propósito de β_A digamos que representa por una parte el homomorfismo de representación de STONE revisado en [6] y que allí denotamos por M_A.

$$M_A : A \longrightarrow \mathbf{P}(\min(A))$$

Por otra parte $\beta_A(a_1) = \min\ (a_1)$ va a pertenecer a los conjuntos abiertos-cerrados de $T(A_1)$: En efecto $\beta_A(1 + a_1)$ es su complementario y los abiertos elementales de $T(A_1)$ son de la forma $\min(a_1) = \beta_A(a_1)$ con a_1 en el sub-anillo A_1.

BIBLIOGRAFIA

[1] STONE M. The theory of Representations for Boolean Algebras. Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 40 (1936) pg. 37-111.

[2] STONE M. Application of the Theory of Boolean Algebras to General Topology. Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 41 (1937) p.p. 375-481.

[3] RUIZ SALGUERO C. Topología o Convergencia. Cuaderno 1 Fascículo 1. Ediciones La Rana y el Aguila. U.P.T.C. 1975 Tunja.

[4] RUIZ SALGUERO C. y SUAREZ MARTINEZ M. Topología o Convergencia. Cuaderno 1 Fascículo 2. X Coloquio Colombiano de Matemáticas. U.P.T.C. Tunja. 1980.

[5] WILLARD , General Topology. Addison Wesley. 1970.