UNIVERSITAS PHILOSOPHICA 40-41, (pp. 117- 143)
junio-diciembre 2003, Bogotá, Colombia

GÖDEL Y WITTGENSTEIN: *ALGUNAS REFLEXIONES SUELTAS DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS*[1]

ALEJANDRO TOMASINI*

RESUMEN

Este artículo plantea y examina el problema de la relación existente entre las contribuciones de Gödel y de Wittgenstein a la filosofía de las matemáticas. Afirma el autor que Gödel no refuta a Wittgenstein, pues, lo que Wittgenstein sostiene no se aplica o no vale para el teorema de Gödel, cuyo resultado no es, estrictamente hablando, matemático, sino un resultado de otro nivel, en el cual se usan las matemáticas. Plantea que, por el contrario, puede afirmarse que de alguna manera, por exclusión quizá, Wittgenstein da cuenta de la labor de Gödel, y lo hace mejor inclusive que quienes se declaran sus partidarios; si lo que Wittgenstein afirma no se aplica al teorema de Gödel esto indica no una refutación de Wittgenstein, sino un límite en el desarrollo del pensamiento humano, que habría de ser superado por la filosofía post-wittgensteiniana de los nuevos formalismos, por una expansión de la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein, que permitiera dar cuenta de resultados como los de Gödel.

1. Agradezco a los Dres. José Antonio Robles (IIF) y Guillermo Morales Luna (CIVESTAV) las útiles observaciones que le hicieron a una primera versión de este trabajo. Naturalmente, ningún error que el ensayo contenga es adjudicable a ellos.
*UNAM, México.

UNIVERSITAS PHILOSOPHICA 40-41, (pp. 117- 143)
junio-diciembre 2003, Bogotá, Colombia

GÖDEL AND WITTGENSTEIN: *SOME REFLECTIONS ON THE PHILOSOPHY OF MATHEMATICS*

ALEJANDRO TOMASINI*

ABSTRACT

The purpose of this article is to examine some Wittgenstein's and Gödel's contributions to the philosophy of mathematics. The author holds Göedel doesn't criticize Wittgenstein because what the last one asserts doesn't apply to Göedel's Theorem, whose result is, strictly speaking, not mathematical but an application of them. On the contrary, Wittgenstein explains Gödel's work, perhaps by exclusion and in a better way than Gödel's partisans. So, there is no refutation of Gödel's Theorem; Wittgenstein just points towards a limit of human thought which would be superseded by new formalisms, new developments in Wittgenstein's philosophy of mathematics, and better accounts of Gödel's Theorem.

**UNAM, México.

LA AUTO-REFERENCIA ES UN FENÓMENO lingüístico a la vez común y nada fácil de explicar. Su carácter engañoso brota, entre otras cosas, del hecho de que de manera imperceptible se puede transitar de formas legítimas de auto-referencia, que son en última instancia comprensibles y explicables o justificables, a formas ilegítimas, que finalmente nos dejan en la perplejidad y en el misterio. La auto-referencia ilegítima está vinculada a las paradojas y se sabe cuán difícil es dar cuenta de éstas. De ahí que si no aprendemos a diferenciar entre auto-referencia paradójica y auto-referencia legítima no podremos evitar incomprensiones y enredos de diversa índole y estaremos tratando de aplicar a toda costa soluciones que valen para la auto-referencia paradójica a casos de auto-referencia que en el fondo no son problemáticos. Por otra parte, no sería aconsejable determinar de entrada que toda forma de auto-referencia es paradójica y, por ende, falaz. Si se acepta, aunque sea tentativamente, esta distinción, podremos aceptar que hay casos de auto-referencia legítima, como acontece (así piensan muchos) con el teorema de incompletitud de Gödel, y casos de auto-referencia falaz, para los cuales habrá que recurrir a los mecanismos usuales de bloqueo de formación de paradojas. Por mi parte, pienso que hay formas legítimas de auto-referencia, si bien muy probablemente éstas son, en última instancia, redundantes. Ahora bien, si fórmulas como la que aparece en el teorema de Gödel y que se refieren a sí mismas para, en cierto sentido, auto-descalificarse, caen bajo esta categoría de "dispensables" o no es algo sobre lo cual por el momento no me pronunciaré.

En lo que sigue, daré inicio a mi exposición ilustrando mediante ejemplos lo que son casos legítimos simples de auto-referencia, pero que precisamente por ser legítimos no son paradójicos y por ello son dispensables. De esta manera podremos desproveer al fenómeno lingüístico de la auto-referencia de toda aura de misterio y estaremos en mejor posición para comprender el logro de Gödel.

Pienso que, en principio, es en relación con dos "cosas" que podemos hablar de auto-referencia:

a) personas o hablantes

b) oraciones (o, eventualmente, proposiciones)

Consideremos primero a los hablantes. Normalmente, empleamos el lenguaje para hablar del mundo, sólo que el lenguaje se presta a usos que podríamos calificar si no de anómalos, por lo menos sí de especiales. La auto-referencia en este sentido es especial porque a primera vista parece ser un mecanismo lingüístico enteramente redundante. En efecto, si soy yo quien habla, mis interlocutores de manera natural se percatan de ello, pero entonces ¿para qué tengo que indicar que efectivamente soy yo quien habla? Ello no parece particularmente sensato. Y si, por otra parte, no estoy interesado en informar a nadie que soy yo quien habla: ¿tendría algún sentido que yo me proporcionara a mí mismo la información de que soy yo quien está hablando? Esto no es sólo insensato, sino francamente absurdo. A primera vista, por lo tanto, la auto-referencia personal es sencillamente redundante.

No obstante estas suspicacias, puede afirmarse que hay contextos lingüísticos en los que la auto-referencia está plenamente justificada. Daré un ejemplo. Supongamos que paso junto a un grupo de individuos que hablan de mí sin conocerme personalmente (digamos, "*by acquaintance*"). Imaginemos que alguien afirma de mí que soy italiano y que entonces yo intervengo y digo: 'No, Alejandro Tomasini no es italiano. Es mexicano'. Es éste un caso de auto-referencia perfectamente comprensible y justificada en la que ATB habla de ATB. Es debido a que es relativamente fácil construir ejemplos así que resulta inaceptable pretender descalificar *a priori* como un movimiento lingüístico ilegítimo **todo** acto de auto-referencia. De hecho, podemos afirmar que hay situaciones especiales en las que ese movimiento lingüístico está no sólo permitido, sino que es el apropiado. O sea, es una situación particular lo que lo justifica. En este caso, la auto-referencia se justifica por el hecho de que los hablantes no me conocen. De lo contrario yo diría simplemente algo como 'No, yo soy mexicano, no italiano' y el recurso a la auto-referencia sería innecesario. Nótese que igualmente absurdo que la descalificación total de la auto-referencia sería pensar que porque en una ocasión especial la auto-referencia personal es comprensible y está justificada, entonces lo está en todo momento y de manera descontextualizada.

Otro caso de situación en el que la auto-referencia resulta ser un movimiento lingüístico legítimo (si bien es debatible si lo es moralmente) es el siguiente: imaginemos que alguien se auto-dota de una importancia desmedida al grado de que empieza a hablar de sí mismo en tercera persona. Podría tratarse, *e.g.*, de un déspota, de un artista o de un farsante. Una persona así podría decir: 'LLL no dijo eso' o 'LLL opina que ...?, cuando 'LLL' es el nombre de la persona que habla. En casos así y precisamente por ser de alguna manera anómalos, la auto-referencia es comprensible (inclusive si constituye una forma de hablar un tanto ridícula o despreciable). Lo que empieza a quedar claro es simplemente que, salvo en situaciones excepcionales o raras, la auto-referencia no es la forma normal de hablar.

Otro ejemplo de auto-referencia nos lo proporciona el hablante deseoso de llamar la atención y de presentarse "de cierta manera". Es el caso de alguien que dice "Yo soy el mejor futbolista" o "yo soy la mejor actriz". A primera vista, nos las habemos aquí con casos perfectamente legítimos de auto-referencia: alguien efectivamente habla de sí mismo (o de sí misma). Empero, el mecanismo de auto-referencia en casos así si bien no es gratuito, tampoco es indispensable. Se recurre a él por alguna razón que, al hacerla explícita, aclara en qué consiste su utilidad. Por ejemplo, el hablante quiere o necesita presentarse ante sus interlocutores de cierta manera, bajo cierta luz de modo que su persona se vea favorecida. Es para no tener que explicar todo eso que la auto-referencia es un mecanismo útil. En realidad, una expresión como "yo soy el mejor alumno de mi clase" equivale a algo como "en la lista de los alumnos y desde el punto de vista de las calificaciones, ocupo el primer lugar" y esto último ciertamente no es un acto de auto-referencia. O sea, la auto-referencia, inclusive en casos en que es legítima e inocua, es en cierto sentido redundante. Es un mecanismo que facilita la comunicación, porque permite obviar partes del trasfondo de las "intenciones del hablante". Pero esto permite entrever algo importante, a saber, que lo sospechoso es el caso de la auto-referencia, por así llamarla "pura", esto es, los actos de auto-referencia por medio de los cuales no se cumple con ninguna función lingüística específica aparte del de la auto-referencia.

Hay otras formas de discurso legítimas y mucho más usuales que sólo aparentemente son de carácter auto-referencial, con las cuales sin embargo fácilmente se les puede confundir. Tengo en mente los casos de expresión (de dolor, de sentimientos, de emociones, de recuerdos, etc.). Me refiero, en general, a situaciones en las que lo que se emplean son verbos psicológicos y actitudes proposicionales. En efecto, a primera vista parecería que si digo, por ejemplo, 'tengo un dolor en el brazo' expreso lingüísticamente mi dolor y, tácita o abiertamente, me apunto a mí mismo. O si digo 'yo recuerdo que ...', da la impresión de que tanto expreso un recuerdo como hablo de mí, esto es, indico que soy quien lo "tiene". O sea, parecería que en una oración tan simple como 'yo pienso que ...' hago simultáneamente dos cosas: hago explícito un pensamiento y al mismo tiempo me refiero a mí mismo ("a mí"). Pero es evidente que la explicación de esos movimientos lingüísticos en términos de auto-referencia es totalmente errada: lo que a primera vista es un acto de auto-referencia en realidad es una forma de enfatizar algo, de recalcar algo y nada más. Es como cuando alguien exclama: "Sí, pero es a mí a quien le duele": lo que se quiere decir es algo como: "este dolor que está aquí es muy intenso", "el dolor está aquí" (y señala uno dónde le duele), "claro, no eres tú quien lo padece", etc. Por consiguiente, podemos aseverar con confianza que en los casos de verbos psicológicos y de actitudes proposicionales simplemente no se produce ningún acto de auto-referencia. Esto está conectado con otro punto de vital importancia, en relación con el cual haré unos cuantos recordatorios.

La ilusión de auto-referencia en los casos de verbos psicológicos y actitudes proposicionales brota del uso del pronombre personal 'yo' y sus derivados ('me', 'a mí', etc.). ¿Por qué, como dije, se trata de una ilusión? Wittgenstein aclaró el asunto: en estos casos nos las habemos con el uso de 'yo' como sujeto y una de las características de dicho uso es precisamente que no tiene carácter referencial. Como bien se nos dice en las *Investigaciones*, "Cuando digo 'tengo un dolor' no señalo a una persona que tiene el dolor, puesto que en cierto sentido no tengo idea de *quién* sea"[2]. La verdad es que no podemos ya seguir asumiendo que hay tal cosa como un "yo" que "tiene" sensaciones o pensamientos. El 'yo' en los casos en los que no es usado para referir al cuerpo sencillamente no refiere o no denota. Su función es otra. Esto es digno de ser tomado en cuenta puesto que entra en conflicto con una larga y ya no tan venerable tradición filosófica, la cual sostiene precisamente lo contrario, a saber, que 'yo' siempre tiene un uso referencial. No entraré aquí en esta discusión, entre otras razones porque ya la he considerado ampliamente en otros trabajos[3] y no tengo nada nuevo

2. WITTGENSTEIN, L., *Philosophical Investigations,* Basil Blackwell, Oxford:,1974, sec. 404.
3. Véase, por ejemplo, la sección sobre identidad personal en mi libro *Enigmas Filosóficos y Filosofía Wittgensteiniana,* Edere, México, 2002), pp. 343-54 y "Wittgenstein y la naturaleza

qué decir al respecto. Empero, me permitiré señalar rápidamente un par de rarezas asociadas con la convicción tradicional.

En lo primero que habría que reparar al considerar la supuesta referencia o denotación de 'yo' usado como sujeto es en la ociosidad y la futilidad de la empresa: ¿con qué objeto, para obtener qué estaría uno constantemente auto-identificándose, esto es, refiriéndose a sí mismo? ¿Qué ventaja para la comunicación ofrecería semejante proceder? Por otra parte ¿cómo dar cuenta de manera plausible del notorio fracaso en encontrar empíricamente la supuesta referencia? ¿Hay acaso algo más difícil que encontrarse a sí mismo, en el sentido de la metafísica tradicional? ¿Hay alguna tarea frente a la cual nos encontremos tan desorientados respecto a cómo proceder como la de buscarnos a nosotros mismos, cuando lo que buscamos es el sujeto de las experiencias? Y ¿no es increíble que no haya nada tan difícil como encontrarnos a nosotros mismos, cada quien en su propio caso, desde luego? Por otra parte, si nadie ha logrado realizar la proeza de auto-atraparse: ¿no se debe ello acaso a que se está buscando algo que era lógicamente imposible obtener? ¿No es obvio, una vez hechas las aclaraciones pertinentes, que no hay nada qué buscar, y por lo tanto nada que encontrar, al usar 'yo' como sujeto? ¿No es evidente que no puede haber actos de auto-referencia cuando no hay entidad alguna que esté en juego? Infiero de todo lo anterior que, en tanto que mecanismo lingüístico útil y justificado por situaciones especiales, la auto-referencia personal no tiene nada de fantástico o de inexplicable y que sólo cuando está involucrada una confusión filosófica, la auto-referencia personal se convierte en algo misterioso.

Consideremos ahora la auto-referencia semántica. Para evitarnos complicaciones innecesarias nos concentraremos en el caso de las oraciones. Diremos entonces que la idea es que, en lugar de versar sobre el mundo como la casi totalidad de ellas, ciertas oraciones, más bien inusuales, hablan de sí mismas, es decir, se toman a sí mismas como objetos de su propio discurso. A primera vista, ello es fantástico y la primera reacción es la de pensar que ello es o imposible u ocioso.

---

del 'yo'" en *Ensayos de Filosofía de la Psicología* Universidad de Guadalajara, Guadalajara, 2003, 2ª edición.

Consideremos, por ejemplo, la famosa paradoja del mentiroso: si un mentiroso asevera que lo que él dice son mentiras, entonces lo que afirma es verdad pero, dado que lo que un mentiroso enuncia tiene que ser falso, entonces efectivamente lo que dijo es falso, lo cual concuerda con lo que dijo y por lo tanto es verdad y así *ad infinitum*. De otro modo: si lo que el mentiroso dijo es verdadero entonces es falso, luego es verdadero, por consiguiente es falso, por lo tanto es verdadero, *ergo* es falso, y así sucesivamente. Aquí podemos establecer una primera conexión digna de ser consignada: la auto-referencia semántica está internamente conectada con las paradojas. Muchos sostendrían, sin embargo, que no es el único caso de auto-referencia semántica. Habría otros que serían igualmente legítimos y que no darían lugar a paradojas, sino a enunciados verdaderos. Esto, como veremos, es debatible. Examinemos el asunto un poco más en detalle.

Consideremos un ejemplo típico: 'La oración que acabo de escribir tiene nueve palabras' (f). Para empezar, aquí parecería que f es verdadera y que si lo es es precisamente porque se refiere a sí misma. Pero ¿es ello así? Lo que realmente parecería estar pasando es algo diferente, a saber, que algo está faltando, porque ¿cuál es esa oración que "acabo de escribir"? Sencillamente no hay tal oración. ¿Cómo entonces explicar la apariencia de auto-referencia semántica? Si no me equivoco, la auto-referencia semántica en un caso así se explica por una omisión que debido a una cierta redundancia se da por entendida.

Lo que en este ejemplo está presente sólo que tácitamente es la expresión (en negritas) 'La oración "..." tiene nueve palabras'. O sea, en realidad lo que tendríamos si hiciéramos explícito todo lo que está dicho y lo que está involucrado (como las nociones de lenguaje y meta-lenguaje y las técnicas de uso y mención de expresiones, *i.e.*, la técnica del entrecomillado) sería: 'La oración "La oración que acabo de escribir tiene nueve palabras" tiene nueve palabras'. Como en el fondo lo que estamos haciendo es repetir ciertas expresiones, entonces el lenguaje, por un mecanismo de economía, nos permite ahorrarnos la repetición y formar una sola oración, creando así la ilusión de auto-referencia. Pero entonces queda claro que no hay tal auto-referencia y que la idea de que una expresión puede referirse a sí misma resulta simplemente de una incomprensión. De hecho ni siquiera es la oración la que se refiere a sí misma, sino una parte de ella a toda la oración.

No vemos, en este caso típico al menos, tal cosa como auto-referencia semántica y en verdad no se entiende cómo podría producirse tan singular fenómeno. Apelamos a la auto-referencia semántica porque no sabemos detectar qué falta en una expresión dada o qué está implícito en ella. En verdad, lo más extraño que podría suceder es que algo creado para dar cuenta del mundo, como lo es el lenguaje, se transmutara en algo que se revierte sobre sí mismo y modificara así su *esencia* funcional. Desde esta perspectiva, lo menos indicado parecería ser la exaltación de la auto-referencia semántica. Ahora bien, puede pensarse que eso precisamente es lo que Gödel hace[4].

En resumen, los casos inobjetables de auto-referencia personal no tienen nada de misterioso y se explican por el carácter peculiar de las situaciones en las que se comunican los hablantes (para enfatizar, insistir, llamar la atención, etc.). La auto-referencia lingüística, por su parte, es más bien una ilusión y, si se le toma en serio, no puede más que dar lugar a paradojas, contradicciones, sorpresas, incomprensiones, rarezas y demás. Es muy importante tener en cuenta lo que hemos dicho, ya que habremos de utilizarlo cuando consideremos la fórmula de Gödel que, como se sabe, afirma de sí misma que no es demostrable. Antes, empero, debemos hacer algunos recordatorios concernientes al contexto histórico en el que se inscribe el famoso Teorema de Incompletitud de Gödel, de 1931.

II. El Logicismo y la Aritmetización de la Sintaxis

Es bien sabido que la gran aventura lógica del siglo XX, la cual culminó en la gran revolución computacional, de inmensas consecuencias e implicaciones para la humanidad en su conjunto y la vida en el planeta en general, se inició propiamente hablando con el esfuerzo por parte de Bertrand Russell por resolver el problema planteado por las paradojas. Russell ofreció tres teorías para dar cuenta de ellas, a saber, la teoría del zig-zag, la de la limitación del

---

4. Esto es cuestionable. Podría argumentarse que lo que con el teorema de Gödel acontece es más bien que se borra la distinción entre sintaxis y semántica, pero ¿no se borra con ello también la distinción original "lenguaje objeto-meta-lenguaje y no se altera con ello la noción misma de auto-referencia?

tamaño y la que finalmente él mismo favoreció, esto es, la que explica la gestación de las paradojas por un "círculo vicioso".

Tanto en *Principia Mathematica* como en "Mathematical Logic as based on the Theory of Types"[5], Russell explica la gestación de las paradojas con base en la idea de que en su formulación se comete una cierta falacia consistente en pecar en contra de lo que él denominó el 'principio del círculo vicioso'[6]. Del principio del círculo vicioso Russell da de hecho cinco formulaciones diferentes, todas ellas equivalentes pero destacando diferentes facetas del fenómeno al que alude. La idea es siempre la misma: las paradojas surgen porque al hablar de una totalidad se incluye a ésta dentro de sí misma como si fuera un elemento más. Así, la totalidad resulta ser simultáneamente tanto una totalidad como un elemento de dicha totalidad. Debido a ese doble juego, permitido por el simbolismo, surgen las paradojas. Naturalmente, cuando así procedemos lo que construimos no es una proposición, sino un sinsentido. Para bloquear la formación de paradojas, Russell apela a la idea de tipo lógico, que en el fondo no es sino la idea de una jerarquía lingüística, esto es, la distinción de lenguaje objeto, meta-lenguaje, meta-meta-lenguaje, y así *ad infinitum*. La respuesta acabada de Russell pasó a la historia como la 'Teoría de los Tipos Lógicos'. Es una teoría sumamente compleja y de ramificaciones insospechadas en diversas áreas del pensamiento.

Recordemos ahora rápidamente los lineamientos generales del programa de Russell. En su lucha en contra del idealismo prevaleciente en su época, al cual era central la idea de que el conocimiento humano es una mera ilusión, Russell intentó desarrollar una filosofía cognitivamente optimista. La doctrina de las relaciones externas lo llevó a defender la solidez del conocimiento matemático, al que intentó fundamentar en la lógica. Partiendo, pues, de la lógica de primer grado junto con la teoría de conjuntos, Russell ofreció una definición formalmente impecable y operativa de las diversas clases de números, de las operaciones matemáticas y, en general de las verdades

5. RUSSELL, B., "Mathematical Logic as based on the Theory of Types" en *Logic and Knowledge*, Allen and Unwin, London, 1971. pp. 59-102.
6. Aunque hay muchas, de las mejores presentaciones del tratamiento de las paradojas por parte de Russell es, sin duda, el capítulo "Russell's Solution to the Paradoxes", del excelente libro de CHIHARA, Ch. S., *Ontology and the Vicious-Circle Principle*, Cornell University Press, Ithaca/London,1973.

matemáticas. O sea, el programa de Russell era el de reconstruir el todo de las matemáticas recurriendo únicamente a nociones lógicas y conjuntistas. Y es al definir los números en términos de clases que se topa con el problema de las paradojas, lo cual va a crear dificultades inmensas en lo que era una nueva ciencia, a saber, la ciencia de los fundamentos de las matemáticas. Por el momento, quiero enfatizar dos cosas:

a) el proceder russelliano es de carácter constructivo: primero se definen los números naturales, luego los racionales, los irracionales, los complejos, etc.; se da cuenta primero de las operaciones elementales de la aritmética y de sus verdades más elementales y paulatinamente se abarcan todas las ramas de las matemáticas. El programa logicista de Russell lleva de la lógica a la aritmética;

b) el principio del círculo vicioso, central a la solución russelliana del problema de las paradojas, es básicamente un principio anti-auto-referencial, es decir, un principio que proscribe la auto-referencia semántica. Como ya indiqué, desde la perspectiva de Russell cuando dicho principio no se respeta lo que se construye es un sinsentido.

Es importante tener presente lo anterior, porque el teorema de Gödel, que sistemáticamente ha sido visto como una refutación o una aniquilación de proyectos como (*inter alia*) el programa logicista de Russell, es en cierto sentido inverso al de este último: en lugar de logicizar la aritmética, lo que Gödel hace es aritmetizar la sintaxis. O sea, Gödel no se plantea la cuestión de la caracterización del número: él simplemente los asume y trabaja con ellos[7].

Bien vistas las cosas, por lo tanto, los proyectos de Russell y Gödel parecen constituir o pertenecer a dos líneas de investigación completamente independientes y que, más que otra cosa, sólo se tocan en un punto. En otras palabras, parecería que Gödel habría podido construir su prueba sin saber

7. Podría, desde luego, objetarse que Gödel trabaja no con números, sino con numerales y es tentador ver en éstos elementos puramente sintácticos, al igual que sus fórmulas. Pero esto es cuestionable, puesto que por una parte Gödel realiza operaciones aritméticas con sus numerales y, por la otra, es obvio que él asume que sus signos tienen **algún** significado y ¿qué puede significar un numeral si no un número?

absolutamente nada del programa de Russell. Como argumentaré más abajo, hay un sentido en el que si el trabajo de Russell es meta-matemático, el de Gödel es más bien meta-meta-matemático. Lo que es importante determinar, por consiguiente, es cómo incide uno en el otro, tomando en cuenta lo que los dos sostienen. Porque si el fenómeno de la auto-referencia no es en el fondo más que una ilusión semántica, el hecho de que se utilice un aparato formal impresionante no le hace perder su carácter ilusorio o de espejismo semántico. Ahora bien, que la auto-referencia es crucial en el teorema de Gödel es más que evidente. Hofstadter lo ha enunciado como sigue: "A Gödel se le ocurrió la idea de utilizar el razonamiento matemático para explorar el razonamiento matemático"[8]. Y lo que es interesante notar es que si ello es en principio legítimo o no es algo que pocos han considerado que valía la pena discutir. Obsérvese, por ejemplo, que el grandioso resultado de Gödel, *viz.*, una fórmula que dice de sí misma que no puede ser demostrada en el sistema, representa una violación del principio del círculo vicioso. Pero si nadie ha rechazado el principio en cuestión, estamos aquí en un conflicto, un conflicto que todavía no se resuelve.

Cabe preguntar: si por toda una variedad de razones queremos zafarnos de las paradojas: ¿por qué entonces se acepta sin cuestionar la prueba de Gödel si ésta se contrapone a intuiciones tan básicas como la incorporada en el principio del círculo vicioso? La noción de Dios nos puede ser útil en este contexto: si efectivamente no puede haber pruebas *a priori* de la existencia de una entidad, sea la que sea, ¿podría el hecho de que alguien invente una "prueba" formalmente impresionante, en la que se usan los conceptos de infinito, pruebas recursivas, abstracciones, etc., hacerla válida? ¿Y acaso no es precisamente eso lo que sucede con el teorema gödeliano de incompletitud? Lo que habría que inferir es tal vez que Gödel demostró que hay casos especiales de auto-referencia que no son ni paradójicos ni dispensables, sino de una tercera categoría. En todo caso, ello es algo que se necesita hacer ver.

Quizá debamos hacer ahora algunas aclaraciones generales concernientes al teorema de Gödel. Nadie ha cuestionado y probablemente nadie cuestionará el formalismo gödeliano, esto es, sus definiciones, la introducción de sus

8. HOFSTADTER, G. R., *Gödel, Escher, Bach. Una Eterna Trenza Dorada,* CONACYT, México,1982. p. 19.

términos primitivos, sus reglas de inferencias y sus transiciones. No es la estructura formal misma lo que está en cuestión (por no decir "en juego"). Es su interpretación, su significado, sus implicaciones lo que es debatible y en relación con lo cual no hay todavía consensos claros y definitivos. Es lo que el teorema nos "dice" lo que no está claro todavía. Para movernos en la dirección de la aclaración, lo que hay que hacer es exhibir los supuestos implícitos en el trabajo de Gödel, sacar a la luz las nociones que usa pero que él mismo nunca esclarece, como las de proposición matemática, "decir", auto-referencia y demás. Es sólo cuando se tengan todos, o por lo menos muchos de los elementos del gran rompecabezas, el iceberg completo y no nada más la parte que sobresale, que podremos empezar a entender qué fue realmente lo que logró Gödel con su prueba.

Quisiera tratar de establecer un par de cosas en ese sentido, pero para ello habremos de retomar algunas ideas de Ludwig Wittgenstein en torno a la naturaleza de la verdad matemática y sin las cuales difícilmente podrá alguna reflexión en este sentido arrancar siquiera.

III. El Status de las Proposiciones Matemáticas

Sin duda alguna, el pensamiento del Wittgenstein de la madurez, esto es, el posterior a la discusión respecto a lo que es seguir una regla y el argumento del lenguaje privado, representa el punto culminante de una trayectoria pasmosa, única, pero puede sostenerse que el pensamiento del que quizá podríamos denominar el 'Wittgenstein intermedio', esto es, básicamente el Wittgenstein de *Ludwig Wittgenstein y el Círculo de Viena*,[9] las *Observaciones Filosóficas* [10] y la *Gramática Filosófica* [11], es un

---

9. *Ludwig Wittgenstein and the Vienna Circle*. Conversations recorded by Friederich *Waismann*. Edited by Brian McGuinness, Basil Blackwell, Oxford, 1979. Hay traducción al español de Manuel Arbolí: *Ludwig Wittgenstein y el Círculo de Viena,* Fondo de Cultura Económica, México,1973.

10. Wittgenstein, L., *Philosophical Remarks,* Basil Blackwell, Oxford, 1975. Hay traducción al español de Alejandro Tomasini Bassols: *Observaciones Filosóficas,* IIF/UNAM, México,1997.

11. Wittgenstein, L., *Philosophical Grammar,* University of California Press, Berkeley/Los Angeles, 1978. Hay traducción al español de Luis Felipe Segura Martínez: *Gramática Filosófica,* IIF/UNAM, México,1996.

pensamiento fresco, intrépido, excitante, audaz, novedoso. En particular, en las dos últimas obras citadas está plasmada una nueva filosofía del lenguaje y de las matemáticas, llena de intuiciones originales, de argumentaciones (en el estilo wittgensteiniano) contundentes y que hacen sentir que, página tras página, se hace progreso filosófico real. Para los objetivos de este trabajo me concentraré en especial en algo de lo mucho y muy valioso que Wittgenstein sostiene en las *Observaciones Filosóficas*. En particular, lo que deseo hacer son ciertos recordatorios concernientes a los puntos de vista de Wittgenstein en relación con la idea de demostración o prueba matemática. Esta breve labor de reconstrucción nos permitirá disponer de una plataforma desde la cual abordar y tratar de evaluar el valor filosófico del resultado de Gödel.

Es obvio, por otra parte, que algo así se tiene que hacer, pues de lo contrario lo que estaríamos haciendo sería enfrentar el teorema de Gödel desde la perspectiva del sentido común, en cuyo caso estaremos perdidos y no tendremos otra cosa que ofrecer que la aburrida lectura simplista de siempre, lo cual es algo que ciertamente queremos evitar.

Empecemos con algunas generalidades. Nuestro punto de partida pueden serlo dos ideas que, si se quiere, se les puede calificar de 'triviales' (aunque no lo sean), *viz.*, que en matemáticas nos las habemos con sistemas y que las matemáticas son por excelencia la ciencia de la demostración. Lo primero hace alusión al carácter integrado y orgánico de las matemáticas. La idea es que las proposiciones matemáticas están sistemáticamente conectadas unas con otras (no, desde luego, de manera arbitraria). No hay proposiciones matemáticas aisladas del resto. '2 + 2 = 4' presupone que 2 +1 = 3, que 3 + 1 = 4, que 3 + 2 = 5, etc. Considerada al margen o fuera de ese sistema proposicional, '2 + 2 = 4' no significa absolutamente nada.

Por otra parte, dejando de lado los puntos de partida, esto es, los axiomas, es claro que a cualquier proposición matemática (en el sentido de teorema, no meramente de fórmula bien formada) se llega y se llega a ella por medio de una demostración. No hay forma de que una proposición matemática "se cuele", por así decirlo, y se incruste dentro del sistema si carece de su respectiva prueba. En matemáticas no puede haber fraudes. La prueba o demostración representa la incorporación de una proposición matemática a su sistema y, por ende, su legitimación *qua* proposición matemática. Por consiguiente, el sentido de una proposición matemática es una función de su pertenencia al sistema y su pertenencia al sistema es precisamente lo que su demostración garantiza. Sin demostración no hay sentido y, por consiguiente, tampoco verdad. El sentido de una proposición matemática es su contribución a la expansión del sistema al que pertenece. "Lo que una proposición matemática dice es siempre lo que su prueba prueba. Es decir, nunca dice más de lo que su prueba prueba"[12]. Quizá podríamos ir un poco más lejos y afirmar que lo que la proposición matemática expresa se muestra en las proposiciones de las que se deriva y las proposiciones matemáticas que a su vez permite deducir. En los sistemas matemáticos no puede haber huecos, puesto que "Las matemáticas son un método lógico"[13] y lo que esto significa es que siempre hay una forma de construir un camino (una prueba constructiva) hacia una proposición matemática. Ese camino es su prueba. Un problema matemático presupone un método de prueba. Por eso distingue Wittgenstein entre problema y misterio, entre solución y revelación: "Esto es, donde sólo podemos esperar la solución gracias a alguna clase de revelación, ni siquiera hay un problema. A una revelación no corresponde ninguna pregunta"[14]. Wittgenstein no niega que haya conjeturas matemáticas, esto es, proposiciones que en un momento dado del desarrollo de las matemáticas son "indecidibles". Lo que al respecto afirma es simplemente que una proposición así es sencillamente una proposición "para cuya solución no poseemos **todavía** [énfasis mío] un sistema *escrito*"[15]. Lo que Gödel habría mostrado es que hay proposiciones verdaderas para las cuales en la aritmética de Peano nunca habrá un "sistema escrito".

El ver las matemáticas a la Wittgenstein, *i.e.*, como (en palabras de Hintikka) un "montón de cálculos"[16], ofrece algunas ventajas. Por ejemplo, de inmediato permite que se entiendan varias cosas. Para empezar, se nos aclara por qué las proposiciones matemáticas no **dicen** nada. No hay nada más erróneo que concebir las proposiciones matemáticas como proposiciones

---

12. WITTGENSTEIN, L., *Observaciones Filosóficas*, XIII, sec. 154.
13. WITTGENSTEIN, L., *Tractatus Logico-Philosophicus,* Routledge and Kegan Paul, London,1978, 6.2 (a).
14. WITTGENSTEIN, L., *Observaciones Filosóficas*, XIII, sec. 149.
15. *Ibídem.*, XIII, sec. 151.
16. *Hintikka*, J., "The Original *Sinn* of Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", en *Ludwig Wittgenstein: Half-Truths and One- and- a-Half-Truths,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London ,1996. p. 156.

en el sentido usual sólo que en lugar de venir, por así decirlo, vestidas en letras vienen vestidas en numerales[17]. Aquí sigue vigente el pensamiento del *Tractatus* de acuerdo con el cual "Las proposiciones de las matemáticas no expresan pensamientos"[18]. Por consiguiente y en segundo lugar, entendemos por qué en matemáticas no pueden darse (o trazarse) las jerarquías simbólicas que sí tenemos en el lenguaje. Dentro o al interior de las matemáticas no hay tal cosa como "meta-matemáticas". Si hay demostraciones meta-matemáticas genuinas, éstas representan la expansión del cálculo, no una reflexión sobre él. Las matemáticas no admiten ser expresadas "en prosa". Cuando ésta aparece, ya estamos fuera del mundo de las matemáticas, propiamente hablando. "Quiero decir, la proposición matemática no es la prosa, sino la expresión exacta"[19]. En matemáticas se trabaja con números, no se habla acerca de ellos.

A lo largo y ancho de su obra Wittgenstein abogó en favor de la idea de que el valor o la importancia de las matemáticas no es algo intrínseco a ellas, sino más bien algo externo, es decir, algo que les viene de su aplicación, de su utilidad. La utilidad de las matemáticas se expresa, por una parte, en la vida cotidiana, en toda clase de transacciones que los hombres realizan, desde las más simples hasta las más complejas, y, por la otra, en su incorporación y empleo en las teorías científicas. En el *Tractatus* Wittgenstein enunció su punto de vista de manera concisa y sin ambigüedades como sigue:

> En la vida no es nunca una proposición matemática lo que necesitamos. Más bien, empleamos proposiciones matemáticas *únicamente* para inferir de proposiciones que no pertenecen a las matemáticas otras que, igualmente, no pertenecen a las matemáticas[20].

Es claro que no puede haber proposiciones matemáticas vagas u ociosas. O sea, una proposición matemática, como cualquier otra, tiene que reportarnos alguna utilidad, pero eso es algo que puede hacer sólo en la

---

17. Se podría quizá querer señalar, a manera de contraejemplo, a las variables, que sirven para indicar generalidad, pero no debería olvidarse que, independientemente de ello, sus valores son siempre números.
18. WITTGENSTEIN, L., *Tractatus*, 6.21.
19. WITTGENSTEIN, L., *Observaciones Filosóficas*, XIII, sec. 155.
20. WITTGENSTEIN, L., *Tractatus*, 6.211 (a)

medida en que forme parte de un sistema, para lo cual su prueba es imprescindible, puesto que ésta es (por decirlo de alguna manera) su boleto de integración al sistema. Una proposición matemática inconexa e inútil es un contrasentido. Por lo tanto, hay una relación interna fundamental entre "matematicidad" y "aplicabilidad"[21].

Es importante entender la perspectiva wittgensteiniana para poder apreciar con justicia su crítica. Lo que Wittgenstein hace es describir la peculiar funcionalidad de las proposiciones matemáticas. De esta descripción emerge la aclaración de su modo de significación. Y lo que poco a poco Wittgenstein descubre es, como traté de hacer ver más arriba, que hay una conexión esencial entre una proposición matemática y su prueba o demostración. "La proposición matemática es el último eslabón en una cadena de prueba"[22].

Ahora bien, lo que hay que entender es que esta idea resulta de una descripción, no de una concepción *a priori*. No formaba parte de las intenciones de Wittgenstein desarrollar una teoría del significado al modo tradicional. Por lo tanto, la etiqueta "verificacionista", a la que tantas veces se ha recurrido para caracterizar su posición, no es la apropiada. Wittgenstein no fue nunca un verificacionista en el sentido de los empiristas lógicos (Schlick, Ayer, etc.). Su objetivo era dar cuenta de la racionalidad de las matemáticas, de su estructura y su *modus operandi*, y ello lo llevó a examinar el modo como adquieren sentido sus proposiciones.

Esta perspectiva le permitió hacer una serie asombrosa de pronunciamientos concernientes a toda una variedad de temas, rara vez abordados por otros: el carácter prescriptivo de las proposiciones matemáticas, las diferentes clases de pruebas que hay (directas, por inducción, por reducción al absurdo, etc.), la naturaleza de los números, el infinito, etc. Pero, más relevante para nuestros propósitos, le proporcionó una plataforma

---

21. Aquí asumo que la, por así llamarla, legitimación de las matemáticas es externa a éstas y que, por lo tanto, no puede aparecer más que en la "vida civil". Por razones obvias, no puedo en este ensayo abordar siquiera la espinosa cuestión de las relaciones entre las matemáticas y la experiencia, ya sea perceptual o teórica, puesto que eso me alejaría de mi tema y me llevaría por otros derroteros, además de tratarse de un tema que exige un tratamiento propio.
22. WITTGENSTEIN, L.,*Observaciones Filosóficas*, XIII, sec. 162.

desde la cual comprender mejor y discutir los resultados de los matemáticos. Veamos a dónde nos lleva esto en el caso de Gödel.

IV. La Prueba de Gödel

El célebre artículo de Gödel, como se sabe, fue publicado en 1931, si bien su impacto empezó realmente a hacerse sentir por lo menos después de que Tarski presentara su artículo sobre la verdad, esto es, en 1935. Ahora bien, las observaciones de Wittgenstein que hemos citado, y algunas otras que habremos de utilizar, datan de 1929 (¡!). Parecería, pues, que Wittgenstein de alguna manera "olfateaba" resultados como el que haría famoso a Gödel un par de años después. Lo interesante y asombroso del caso es que, independientemente de que resulten convincentes o no, sus pensamientos ciertamente son relevantes para la comprensión y la discusión seria del resultado de Gödel.

El trabajo de Gödel presupone todo el trabajo hasta entonces realizado en el terreno de los fundamentos de las matemáticas. Su punto de partida son las paradojas, en las cuales Gödel se inspira. Ahora bien, independientemente de que en última instancia fuera fallido, el programa logicista de Russell (y Whitehead) había inspirado a muchos otros matemáticos, de manera que se tenía una idea clara de qué era lo que se perseguía. El objetivo era demostrar la consistencia de las matemáticas (signifique eso lo que signifique) y el ideal para alcanzarlo era la axiomatización. Se suponía que se podían ofrecer pruebas de consistencia, de manera que quedara demostrado que, por ejemplo, en la aritmética no se puede deducir tanto j como ~j, para alguna fórmula j.

Lo que Gödel hizo fue construir un sistema formal en el que se asigna de cierta manera un número a cada uno de los signos primitivos (constantes, variables, paréntesis, cuantificadores, etc.). De esta manera, cualquier fórmula bien formada tiene una traducción al lenguaje numérico. Pero eso no es todo: todas las series de fórmulas bien formadas también la tienen, de manera que a cualquier demostración formal corresponde una demostración numérica. El número que le corresponde a cada expresión es su "número de Gödel". Esto es lo que se conoce como la aritmetización de la sintaxis. En este caso, es la aritmética la que "habla" de los enunciados del meta-lenguaje, en el sentido de que los refleja. En efecto, una vez establecidas las convenciones, Gödel pasa a hacer ver que "Cada enunciado meta-matemático está representado por una fórmula única dentro de la aritmética"[23]. O sea, todo lo que se afirme **sobre** el cálculo tendrá una representación o formulación numérica. En particular, afirmaciones como la de que algo es una prueba de una cierta proposición quedarán reflejadas en el simbolismo aritmético de determinada manera, es decir, como fórmulas bien formadas de la misma aritmética. Nagel y Newman lo exponen de este modo:

> "un enunciado meta-matemático que dice que una cierta secuencia de fórmulas es una demostración de una fórmula dada es verdadera si, y sólo si, el número de Gödel de la supuesta prueba está en la relación aritmética designada aquí por 'Dem' con el número de Gödel de la conclusión"[24].

Acto seguido, y aquí viene el gran truco formal, Gödel se las arregla para construir una fórmula *G* que es la representación aritmética del enunciado meta-matemático 'La fórmula *G* no es demostrable'. Quizá debamos aclarar con más detalle cómo aparece aquí el elemento de auto-referencia. Lo que sucede es que lo que la fórmula que Gödel construye hace al ser, por así decirlo, decodificada, es **afirmar de ella misma** que no es demostrable **en** el sistema construido. Gödel hizo ver, además, que si *G* fuera demostrable, entonces su negación también lo sería, con lo cual se habría hecho ver que la aritmética es inconsistente, puesto que permite deducir tanto una fórmula como su negación. Asumiendo, por lo tanto, que la aritmética **es** consistente, lo que se sigue es que la fórmula en cuestión es "indecidible", es decir, que ni ella ni su negación son demostrables. De particular importancia es señalar que no por ser indecidible deja la fórmula de ser verdadera. La verdad de la fórmula se demostró meta-matemáticamente. Está implicado, desde luego, que la aritmética es incompleta, es decir, que necesariamente contiene verdades que no son demostrables. El resultado atañe a la aritmética por la sencilla razón de que el lenguaje que se aritmetiza es el lenguaje de la lógica (de segundo orden), es decir, un lenguaje suficientemente fuerte como para contener la aritmética.

---

23. Nagel, E., Newman, J. R., *Gödel's Proof,* New York University Press, USA,1958. p. 77.
24. *Ibídem*, p. 79.

En síntesis: lo que Gödel logró fue construir una "prueba" de una "proposición numérica" que "se refiere a sí misma" para "decir de sí misma" que aunque "verdadera", es "indemostrable" en el sistema al que pertenece. Intuitivamente al menos, es obvio que aunque ni los detectemos ni sepamos explicarlos, se han operado aquí cambios semánticos importantes y el que no sepamos dar cuenta de ellos quiere decir que aún no se ha aprehendido cabalmente el significado del teorema de Gödel. Por otra parte, si el sistema de Gödel no fuera otra cosa que una pequeña maquinaria formal, su trabajo sería una curiosidad y nada más. Pero el sistema de Gödel es tal que da cabida o se aplica a las matemáticas (cuyos teoremas son recursivamente enumerables, esto es, cuyos teoremas se pueden ir enunciando) y, por consiguiente, su resultado se aplica a cualquier sistema que sea lo suficientemente fuerte como para contenerlas, esto es, que pueda ser puesto en relación con los números de una manera sistemática. El resultado es, pues, todo menos trivial.

En sus escritos de filosofía de las matemáticas, Wittgenstein enuncia diversas críticas al trabajo de Gödel, críticas que en su mayoría han sido minimizadas, vistas con desdén o, en el mejor de los casos, ignoradas. Importantes lógicos y filósofos de la ciencia han coincidido en opinar que simplemente Wittgenstein "no entendió" el teorema, o por lo menos no supo apreciar sus implicaciones formales[25]. Yo pienso que el asunto no es tan simple y que las críticas de Wittgenstein algo nos dicen de más interesante que lo que han sostenido quienes se han limitado a aplaudir el malabarismo formal de Gödel. De eso me ocuparé en la siguiente sección.

V. Presuposiciones Gödelianas

Wittgenstein ha sido citado en numerosas ocasiones por haber afirmado que su tarea "es no hablar acerca de (*e.g.*) la prueba de Gödel, sino

25. El artículo "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics" en *Truth and Other Enigmas,* Duckworth, London, 1978), pp. 166-185, de M. Dummett, y el ensayo "Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics", de G. Kreisel, "Wittgesntein's Remarks on the Foundations of Mathematics", en *British Journal for the Philosophy of Science*, IX (1958-9), pp. 135-158, ejemplifican muy bien esta posición un tanto desdeñosa y displicente en relación con el trabajo de Wittgenstein en el área de la filosofía de las matemáticas y, en especial, de sus reflexiones en torno al teorema de Gödel.

esquivarla"[26]. Esto ha sido interpretado por muchos como una declaración explícita de incapacidad por parte de Wittgenstein para dar cuenta del teorema de incompletitud. Para quien conoce, aunque sea mínimamente, la trayectoria de Wittgenstein, un juicio así resulta, aparte de torpe, injusto.

Para empezar, Wittgenstein conocía el teorema y estaba perfectamente consciente de lo que entrañaba. Lo que él estaba afirmando era precisamente que su función no consistía en intentar poner en cuestión una demostración particular, el trabajo formal del matemático. Su crítica no pretendía ser "técnica" (cosa que por otra parte, por lo menos hasta donde yo sé, nadie todavía ha intentado). Wittgenstein no pensaba que el trabajo de Gödel fuera formalmente cuestionable, es decir, que se pudieran encontrar fallas internas. Lo que Wittgenstein intuía era que dicho teorema acarreaba dificultades de comprensión, porque con él se había aportado algo nuevo, con lo cual se creaban nuevas perplejidades filosóficas. Esa era en general la actitud de Wittgenstein, lo cual queda además ampliamente confirmado con lo que dice inmediatamente antes de la oración citada. Allí mismo él dice, refiriéndose a la lógica de Russell, que su trabajo "no es atacar la lógica de Russell desde *dentro*, sino desde fuera".

Es decir: "no atacarla matemáticamente –de lo contrario sería yo un matemático– sino su posición, su función"[27]. O sea, no es *qua* técnico sino como filósofo que Wittgenstein se enfrenta tanto a la lógica de Russell como al teorema de Gödel. Su tarea consiste, por lo tanto, en ofrecer una dilucidación filosófica de un resultado que obviamente plantea nuevos retos intelectuales, retos que sus más fanáticos adherentes no ven y simplemente dejan pasar. De nuevo, Wittgenstein no está rechazando la prueba de Gödel como tal. Si ningún matemático cuestiona la prueba misma ¿cómo podría él pretender rechazarla? Wittgenstein, por lo tanto, acepta el resultado de Gödel y no tiene, por consiguiente, para qué hablar de la prueba misma. Ello parece más bien obvio. El punto importante, en cambio, es que dicho resultado es filosóficamente problemático, como puede serlo una definición de 'materia' en la física cuántica o de 'vida' en la biología molecular.

---

26. WITTGENSTEIN, L., *Remarks on the Foundations of Mathematics,* The M.I.T. Press, Cambridge/London, 1975), V, sec. 16.
27. *Ibídem.*, V, sec. 16.

¿Por qué es problemático el teorema de Gödel? Es evidente (o debería serlo) que no se trata de un teorema matemático más. Hay demostraciones matemáticas más complejas que no son filosóficamente interesantes. El teorema de Gödel sí lo es. ¿Por qué? Disponemos ya de algunos elementos que quizá nos permitan empezar a intentar responder a esta pregunta.

En primer lugar, Wittgenstein tiene suspicacias frente al teorema de Gödel porque la labor de éste representa el último eslabón en una cadena de trabajos que tienen su origen en el proyecto logicista russelliano y Wittgenstein, con no malas y no pocas razones, cuestiona dicho proyecto. Es, pues, normal que algo que emana de dicho programa le resulte, de entrada, sospechoso. Por otra parte, del proyecto de Russell surgió, como una respuesta a lo que parecía un programa fallido, el de Hilbert, *i.e.*, el proyecto de mostrar que la aritmética es consistente, un programa que a Wittgenstein también le resulta de hecho incomprensible. Una vez más, podrá pensarse lo que se quiera, pero lo único que no se puede afirmar es que su posición esté basada en argumentos desdeñables. ¡En lo más mínimo! Wittgenstein, por lo tanto, está justificado en sentirse en un primer acercamiento receloso frente al trabajo de Gödel.

Por si fuera poco, Gödel enturbia las aguas con un trabajo en el que menciona *Principia Mathematica* cuando su verdadero blanco es el programa de Hilbert, puesto que lo que ante todo Gödel muestra es que la aritmética es indecidible dentro de la misma aritmética y que su consistencia no puede ser probada por medio de su propia teoría. Pero Russell nunca se impuso a sí mismo de manera explícita la tarea de demostrar la consistencia de las matemáticas. Su labor consistía más bien en encontrar un mecanismo para resolver el problema que planteaban las paradojas y eso Gödel simplemente ni lo menciona, a más de que ni siquiera se propone lidiar con dicho tema. Es más: puede afirmarse que lo que él logra es más bien (por lo menos a primera vista) reivindicar las paradojas, al formalizar una nueva "paradoja" para la cual no hay una solución formal[28]. No es, pues, del todo errado afirmar que Gödel representa la venganza y el triunfo de las paradojas y de la auto-referencia, a las que con tanto trabajo se había logrado contener. En este sentido, el trabajo de Gödel es claramente anti-russelliano.

---

28. Digo "nueva paradoja", porque es claro que el resultado de Gödel no conduce a contradicciones, como las paradojas que a Russell preocupan.

No está de más preguntarse por la clase de problemas que Gödel se aboca a dejar resueltos en forma definitiva. Consideremos por un momento el lenguaje natural o el de cualquier ciencia empírica. De seguro que se pueden hacer en dichos lenguajes aseveraciones que nunca podrán ser confirmadas o desconfirmadas, pero que no obstante son significativas. Por ejemplo, podemos afirmar que hay en el centro del planeta de nuestro sistema solar más distante de la Tierra lombrices carnívoras. Podemos afirmar con relativa seguridad de que nadie estará en posición nunca de confirmar o de rechazar con base en evidencias empíricas semejante proposición. Para el lenguaje empírico es esa una proposición "indecidible".

No obstante, nadie se sorprende por ello ni considera que se trate de algo que revista alguna importancia especial. ¿Por qué entonces poner el grito en el cielo cuando alguien nos demuestra que lo mismo puede darse en el caso de las proposiciones matemáticas, esto es, que habrá siempre alguna proposición que quizá sea verdadera, pero que no podrá nunca ser demostrada en la teoría de los números o, más en general, en un sistema formal con determinadas características? ¡A más de uno podría resultarle inclusive hasta evidente! A lo que Wittgenstein apunta, por lo tanto, es a lo débil de la motivación gödeliana. Gödel está estableciendo un resultado que anula todo un proyecto de fundamentación que, entre otras cosas, era también semi-absurdo. Así, sería con un resultado fantástico que se anula un programa absurdo. Eso sí parece tener sentido. Si efectivamente el problema de la inconsistencia de la aritmética es un pseudo-problema ¿no tendrá por lo menos un *status* raro cualquier teorema que establezca algo decisivo en relación con él? Después de todo, una solución para un pseudo-problema tiene que ser algo extraño. Por lo menos un poco de suspicacia en este caso no parece del todo fuera de lugar.

En segundo lugar, es claro que con su teorema Gödel echa por tierra muchas distinciones útiles y que parecían definitivas y no deja de ser curioso que nadie proteste por ello, que todo mundo acepte ecuánimemente semejante proceder. En especial, en su teorema se borra, al parecer matemáticamente de manera justificada, la distinción "lenguaje objeto- meta-lenguaje".

Ahora bien, en lo que hay que insistir es en que no basta con un resultado para desechar una distinción que funciona muy bien en todas partes menos precisamente en la prueba en cuestión. Parecería que el mecanismo gödeliano está necesitado de alguna especie de aclaración, es decir, que debe venir acompañado de alguna explicación. El mero teorema (o la fórmula final) no basta para comprenderlo. Podríamos aquí suponer que el resultado de Gödel si bien es inobjetable sintácticamente es ambiguo en algún otro sentido. Por ejemplo, podría sugerirse (y es a mero título de sugerencia que aquí me pronuncio) que si consideramos al lenguaje de la aritmética como el lenguaje objeto y al lenguaje de la lógica como el meta-lenguaje, entonces el lenguaje en el que se lleva a cabo la aritmetización de la sintaxis equivale realmente no a borrar la distinción "lenguaje objeto- meta-lenguaje", sino a ampliarla, pues se trataría de una demostración que toma cuerpo en el "meta-meta-lenguaje". Ahora bien, el que ello fuera así implicaría que en el teorema de Gödel los numerales tienen otro significado, diferente en algún sentido del usual. Esto puede ser una idea totalmente descabellada, pero en todo caso surge de la inaplazable necesidad de una explicación de un resultado: tenemos derecho a saber por qué hemos de admitirlo si entra en conflicto con distinciones que todos aceptamos. Queremos saber cómo podemos mantener simultáneamente las dos cosas. Y la explicación, naturalmente, no puede consistir en apuntar una vez más al teorema.

Lo dicho más arriba nos lleva a un tercer punto que es también importante. El teorema de Gödel es desconcertante no sólo porque es una paradoja imposible de rebatir formalmente y porque anula distinciones establecidas y útiles, sino también porque pone en crisis una determinada concepción de las proposiciones matemáticas (y en general de las matemáticas), sin reemplazarla con nada. Nosotros partimos de la idea de que las matemáticas son la ciencia de la demostración y, por lo tanto, establecimos, en relación con las proposiciones matemáticas, una conexión interna o necesaria entre "sentido", "demostrabilidad" y "verdad". Pero el teorema de Gödel destruye esta concepción, puesto que lo que representa es un contra-ejemplo: por medio de él se demuestra precisamente que hay al menos una proposición matemática (y probablemente un número infinito de ellas) que es (son) verdadera(s) y por ende significativa(s), pero que no es (son) demostrable(s) dentro del marco de las teorías matemáticas consideradas. Pero, una vez más, tenemos que poner en la balanza lo que está en juego: ¿rechazamos una concepción bien fundada sólo por un teorema o hacemos un esfuerzo por interpretar el teorema de alguna manera que no eche por tierra dicha concepción? Yo creo que esa era la vía por la que Wittgenstein se había adentrado y que, desafortunadamente, no pudo recorrer hasta el final. No obstante, ciertamente marcó con claridad el camino: lo que necesitamos es hacer un esfuerzo de imaginación para dotar de sentido al teorema de Gödel de manera que resulte consistente con una concepción muy bien armada de las matemáticas en su conjunto. Con lo que obviamente no podemos quedarnos contentos es con un juego formal impecable, pero que sencillamente impide que tengamos una concepción explicativa y congruente de las matemáticas.

Por lo anterior, me inclino a pensar que lo que con Gödel se alcanza es más que una prueba un esquema de pruebas, una (por así decirlo) prueba de pruebas, la demostración de una nueva clase de pruebas. Él probó algo (*viz.*, una limitación) para todo formalismo que pueda ser puesto en relación sistemática con los números naturales y por ello probó algo más que un resultado meramente matemático (puesto que con la fórmula de Gödel no se demuestra nada concreto en matemáticas). Por ser tan abstracto, su resultado tiene implicaciones meta-matemáticas importantes, como por ejemplo que todo programa de "reducción" de las matemáticas es fútil.

Quizá un parangón aquí pueda ser útil para comprender la función del teorema de Gödel. Tomemos el campo de la economía. Hacer una inversión es hacer gastos, pagar sueldos, etc., para construir algo, digamos una fábrica. Pero considérese el capital financiero. Por medio de una computadora se mueven capitales que pasan de un banco en Hong-Kong a uno en Nueva York. También es una inversión, sólo que en papel, en libros. Si queremos hablar de inversiones, podemos, sólo que es claro que se trata de inversiones de una clase diferente. Lo mismo pasa con el "teorema" de Gödel y las matemáticas: si se quiere se le puede llamar a su teorema 'matemático', pero es claramente diferente de lo que normalmente es un teorema. Por ejemplo, con el teorema de Gödel no se calcula nada. Más que matemático, por lo tanto, el teorema de Gödel es un teorema formal en el que se usa la aritmética. La prueba de Gödel tiene quizá algo que ver con el absurdo matemático, sólo que ello es algo sumamente difícil de dilucidar (algo que probablemente ni Gödel mismo lo entendía, lo cual no tiene nada de sorprendente y sucede a menudo en ciencia). Por otra parte, puede defenderse la idea de que la comprensión cabal del resultado de Gödel exige que se le ponga en relación con otros resultados que le son de alguna manera afines. En verdad, parecería que para comprender el teorema de Gödel es menester comprender debidamente, *inter alia*, el trabajo de Turing y la teoría de la verdad de Tarski y ponerlos en conexión. Son resultados como esos lo que constituye el verdadero universo del teorema de Gödel y ellos no son, en el sentido más convencional, resultados matemáticos. En ellos se usan las matemáticas, pero parecerían pertenecer a un mundo formal superior.

De ahí que no podremos comprender cabalmente lo que el teorema de Gödel "dice" mientras no lo veamos de manera sistemática en conexión con otros resultados con los que está internamente vinculado. La imagen a la que ello da lugar es la de un universo más amplio que el de las matemáticas. Lo que en todo caso sí queda claro es que Wittgenstein tenía razón al pensar que había un sentido en el que el resultado de Gödel no formaba parte de las matemáticas clásicas.

VI. Observaciones Finales

Wittgenstein sostenía que una demostración matemática genuina es siempre una demostración de una proposición concreta. El teorema de Gödel no es eso. Wittgenstein pensaba que en matemáticas la prosa es irrelevante. La prueba de Gödel es una demostración de una proposición abstracta que de alguna manera se refiere al todo de las proposiciones matemáticas, dice algo acerca de ellas. En ese sentido es "prosa" y, en la misma medida, no forma parte del mismo universo. Desde el *Tractatus* Wittgenstein había defendido la idea de que la auto-referencia se produce cuando una función funge también como su propio argumento[29]. Gödel hace ver que hay juegos simbólicos en donde esta limitante no vale y que cuando se pasa del lenguaje objeto al meta-meta-lenguaje la auto-referencia es posible. ¿Refuta Gödel a Wittgenstein? Claro que no. Lo único que se puede inferir es que si lo que Wittgenstein sostiene no se aplica o no vale para el teorema de Gödel, entonces el de Gödel no es estrictamente hablando un resultado matemático, sino un resultado de (por así decirlo) otro nivel y en el cual se usan las matemáticas. Puede entonces afirmarse que de alguna manera, sólo indirectamente, por exclusión quizá, Wittgenstein da cuenta de la labor de Gödel, y lo hace mejor inclusive que quienes se declaran sus partidarios, los cuales las más de las veces no saben hacer otra cosa que ensalzar la hazaña formal de Gödel. Pero ciertamente ensalzar no es comprender ni es saber explicar. De lo que

29. Wittgenstein, L., *Tractatus*, 3.333.

estamos en espera, por consiguiente, es de la filosofía post-wittgensteiniana de los nuevos formalismos, esto es, de aquella filosofía que representaría un genuino avance, una expansión de la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein, y que permitiría dar cuenta de resultados como los de Gödel. Que lo que Wittgenstein afirma no se aplica al teorema de Gödel indica no una refutación de Wittgenstein, sino un límite en el desarrollo del pensamiento humano. Y en dónde está el genio que articulará para nosotros la nueva filosofía del formalismo es, sin embargo, algo tan enigmático e insondable como lo es aún en nuestros días el teorema que nos llevó a escribir estas líneas.