*Universitas Philosophica, Bogotá (Colombia) Vol. 2. No. 4, Junio 1985*

# LA NATURALEZA DE LA VERDAD MATEMATICA

Luis Eduardo Suárez Fonseca

## RESUMEN

*El presente trabajo —que pretende ser la continuación del publicado por el mismo autor, en el No. 2 de esta revista, bajo el título Filosofía-Lógica-Matemáticas—, plantea la pregunta por la naturaleza de la verdad matemática. Después de criticar algunas concepciones sobre la verdad de la Matemática, consideradas como insuficientes por el autor, el estudio se centra en la presentación de la tesis que considera las proposiciones matemáticas como proposiciones analíticas. Finalmente intenta mostrar que el carácter analítico —vacío de todo contenido empírico— que posee la Matemática no impide la aplicabilidad de este saber al ámbito de lo empírico. En este ámbito la Matemática se limita a explicitar —sin añadir nada nuevo— los contenidos empíricos no inmediatamente evidentes contenidos en las distintas teorías científicas.*

*El presente artículo no intenta superar el carácter introductorio a la Filosofía de la Matemática que se quiso imprimir al trabajo anterior.*

## 1. PROBLEMA

Que una proposición o teoría no puede aceptarse sin motivos adecuados, es un principio básico de la investigación científica. En la ciencia empírica, que comprende las ciencias naturales y las ciencias sociales (humanas), los motivos para la aceptación de una teoría estriban en la concordancia de las predicciones derivadas de dicha teoría, con la evidencia empírica, obtenida a través del experimento y la observación sistemática. Pero, ¿qué motivos autorizan la aceptabilidad de los enunciados y teorías de la Matemática? Este problema es el objeto de discusión en este trabajo.

## 2. LAS PROPOSICIONES MATEMATICAS COMO VERDADES AUTOEVIDENTES

Una de las respuestas ensayadas para la solución de nuestro problema considera que las verdades de la Matemática a diferencia de las hipótesis de la ciencia empírica no necesitan evidencia factual, ni de ningún otro tipo, pues son 'auto-evidentes'. Sin embargo, hay que decir inmediatamente, que esta manera de pensar, que relega la decisión sobre la verdad matemática a un sentimiento de autoevidencia, tiene varias dificultades. Existen muchos teoremas matemáticos de muy difícil justificación y que, aún para el especialista, resultan todo, menos autoevidentes. Además muchos de los resultados de mayor interés —teoría abstracta de conjuntos, topología, etc. . .— chocan con presunciones profundamente arraigadas y con el sentimiento de autoevidencia. Por otra parte, existen conjeturas matemáticas (1) cuyo contenido es elemental y que no son aún decidibles; lo que muestra claramente que no toda verdad matemática es autoevidente. Finalmente, aunque la evidencia sólo se atribuye a los axiomas/postulados básicos de la Matemática, aquellos de donde los demás enunciados matemáticos se derivan, no sobra recordar que los juicios sobre lo que se considera autoevidente son subjetivos. Lo que es evidente cambia de una persona a otra y en la misma persona cambia según las circunstancias: edad, formación intelectual, etc. y por lo tanto no puede fundamentarse la validez objetiva de la Matemática en una base tan deleznable.

## 3. LA MATEMATICA COMO LA CIENCIA EMPIRICA MAS GENERAL

Otra alternativa clásica, la ofrece John St. Mill. La Matemática es en sí misma una ciencia empírica pero difiere de las demás (Física, Química, Astronomía. . .), por la generalidad de su tema-objeto y porque sus proposiciones han sido contrastadas y confirmadas en una medida mucho mayor que las de la Física, Química etc. De hecho la medida en que las leyes matemáticas han sido verificadas por la pasada experiencia de la humanidad es tan abrumadora, que hemos llegado a creer que la verdad matemática es cualitativamente distinta de la de las demás ramas de la ciencia. Este hecho está en el origen de la distinción entre certeza y probabilidad con que respectivamente calificamos a los enunciados matemáticos y a los enunciados empíricos.

Pero esta opinión choca, igualmente, con serias dificultades. Una hipótesis de carácter empírico —ley de la gravitación— permite hacer predicciones que especifican que si se dan determinadas condiciones, entonces, se producirán tales fenómenos observables. La producción efectiva de esos fenómenos

(1) El teorema de Goldbach, que afirma que todo número par es la suma de dos números primos, es uno de esos enunciados que puede ser verdadero, pero tal vez, no derivable de los axiomas de la Aritmética; otro teorema de esta clase es el de 'dos cuadrados' de Fermat.

cuenta como evidencia confirmadora y su ausencia como evidencia desconfirmadora de dicha hipótesis. Se sigue de esto que una hipótesis empírica es teoréticamente desconfirmable, que es posible indicar un tipo de evidencia empírica que descalificaría la hipótesis, si llega a producirse. Pasemos ahora a una hipótesis matemática elemental: $7 + 5 = 12$. Si es una generalización empírica ¿qué tipo de evidencia podríamos imaginar que nos obligara a concluir que, a pesar de todo, la hipótesis ($7 + 5 = 12$) no es verdadera en general? Un ejemplo típico sería el siguiente: colóquemos en un portaobjetos unas bacterias, primero siete y luego cinco. Luego contamos, para comprobar si en este caso 7 y 5 sumados hacen 12. Supongamos que contamos 13 bacterias. ¿Desconfirma esto, la proposición? ¿Es una prueba de que la proposición no se aplica a bacterias? Obviamente no. Lo que suponemos es que o hemos contado mal o que las bacterias se han reproducido entre el primero y segundo conteos. En ningún caso supondríamos que el fenómeno descrito invalidará la proposición aritmética, que nada afirma sobre el comportamiento de las bacterias y que sólo afirma que todo conjunto que conste de $7 + 5$ objetos puede considerarse también como un conjunto que consta de 12 objetos. Esto es así porque los símbolos "7 + 5" y "12" denotan el mismo número, son sinónimos. Esta sinonimia se origina en que los símbolos "7", "5", "12" y "+" están definidos de tal modo que la identidad anteriormente expuesta se deriva como consecuencia de la significación atribuída a los conceptos que la expresan.

## 4. LAS PROPOSICIONES MATEMATICAS COMO ANALITICAS

La afirmación de que $7 + 5 = 12$ es, pues, verdadera por razones semejantes a las que hacen verdadera la afirmación de que ningún hombre casado es soltero. Estas afirmaciones son verdaderas simplemente en virtud de definiciones o estipulaciones análogas a las definiciones que determinan la significación de los términos claves usados en cada caso. Afirmaciones de esta clase tienen como características que su aceptación no requiere evidencia empírica y que pueden ser mostradas como verdaderas mediante el simple análisis de la significación atribuída a los términos utilizados en ellas. En el lenguaje de la lógica, sentencias de esta clase se llaman analíticas o verdaderas a priori, queriéndose significar que su verdad es lógicamente independiente de toda evidencia empírica o lógicamente anterior a ella. Esta independencia lógica frente a lo empírico permite establecer definitivamente, de una vez por todas, la verdad de cualquier afirmación analítica. Pero esta certeza teorética de las proposiciones analíticas se paga al precio de su vaciedad de contenido informativo: carecen de contenido empírico, de implicaciones prácticas. Precisamente por eso la afirmación matemática puede considerarse válida sin recurrir a evidencia empírica.

Ilustremos esta opinión con un ejemplo de verdad matemática (o más bien lógica): $(a = b) \wedge (b = c) \Longrightarrow (a = c)$. ¿Sobre qué base puede afirmar-se la transitividad de la identidad? ¿Será de naturaleza empírica y por lo tanto desconfirmable por la evidencia empírica? Supongamos que a, b y c son ciertas tonalidades de azul y que por lo que vemos $a = b$ y $b = c$ y que si $a \neq c$. ¿Constituye este hecho una evidencia empírica en contra de la verdad de nuestro enunciado en cuestión? Seguro que no. Diremos más bien que $a \neq c$, entonces no puede suceder a la vez que $a = b$ y que $b = c$; debe haber una diferencia en uno de los pares o en ambos aunque esa diferencia esté por debajo de la percepción. La experiencia no confirma ni desconfirma este tipo de enunciados. Por eso el principio en cuestión es verdadero a priori.

## 5. LA MATEMATICA COMO SISTEMA DEDUCTIVO AXIOMATICO

Hasta aquí he argüido que la validez de la Matemática no se funda ni en su carácter de autoevidente ni en una base empírica, sino que deriva de las estipulaciones que determinan la significación de los conceptos matemáticos. En suma, que las proposiciones matemáticas son esencialmente verdaderas por definición. Pero esto es simplificar enormemente las cosas; esto debe formularse de nuevo y justificarse con mayor cuidado.

En efecto, el desarrollo riguroso de una teoría matemática no procede exclusivamente de un conjunto de definiciones sino también de un conjunto de proposiciones no definitorias y no demostradas dentro de la teoría: los axiomas y/o los postulados de la teoría (Cfr. Tarski A.). Estas proposiciones se formulan en términos de ciertos conceptos básicos o primitivos no definidos en la teoría. A veces se afirma que los postulados representan 'definiciones implícitas' de los términos primitivos. Pero esto más bien conduce a confusiones. Pues, si bien los postulados limitan en su sentido específico las significaciones atribuibles a los términos primitivos, dichos términos primitivos admiten interpretaciones diferentes dentro del sistema. Se quiere un conjunto de definiciones en estricto sentido, para determinar las significaciones de los 'definienda' de modo unívoco.

Una vez establecidos los términos primitivos, los axiomas y/o postulados, está determinada la teoría, en un sentido bien preciso: todo término de la teoría es definible en términos de las proposiciones y toda proposición de la teoría es lógicamente deductible de los postulados. Para una precisión completa hay que decir, también, que se deben especificar los principios lógicos que se van a utilizar en la demostración de las proposiciones, es decir en la deducción a partir de los postulados. Estos principios se pueden formular de modo completamente explícito. Se clasifican en dos grupos: sentencias primitivas o postulados de la lógica (vgr.: $(p \wedge q) \longrightarrow p)$ y reglas de deducción o inferencia (modus ponens, reglas de sustitución. . .).

## 6. EL SISTEMA AXIOMATICO DE PEANO, COMO BASE DE LA MATEMATICA

Consideremos ahora un sistema de postulados del que es derivable toda la Aritmética de los números naturales. Su autor es G. Peano, matemático y lógico italiano (1858-1932).

Los términos primitivos son "o", "número" y "sucesor"; obviamente estos términos no se definen en la teoría.

Los postulados del sistema son:

$P_1$ : 0 es un número
$P_2$ : El sucesor de un número (n) cualquiera es un número $(n + 1)$ o $n'$
$P_3$ : Dos números diferentes no tienen el mismo sucesor
$P_4$ : 0 no es sucesor de ningún número
$P_5$ : Si P es una propiedad tal que:
0 tiene esa propiedad (P) y
si siempre que n tiene la propiedad P, su sucesor también tiene la propiedad P. Entonces: Todo número tiene la propiedad P

La construcción de la aritmética elemental sobre esta base empieza con la definición de los números naturales así:

$0 = (P_1)$
$1 = (n + 1), n = 0$
$2 = (n + 1), n = 1$
$3 = (n + 1), n = 2$

Por $P_2$ el proceso sigue indefinidamente; por $P_3$ y $P_5$ el proceso no conduce a un número ya definido, y por $P_4$ el proceso no es circular (no lleva a 0). Luego, debe establecerse la definición de la adición de un número natural a un número cualquiera dado como una adición repetida de 1. Esto es fácil mediante la relación de sucesor.

Def. 1: a). $n + 0 = n$
b). $n + k' = (n + k)'$

a). y b). de esta definición recursiva determina completamente la suma de dos enteros cualesquiera. Tomemos un ejemplo: $7 + 5$

Por definición de 5 y 4, tenemos que

$7 + 5 = 7 + 4' = 7 + (3')'$

Por Df. 1 (b): $7 + (3')' = 7 + (3')' = [(7 + 3)']'$

Pero por Df. 1 (a) y definición de los números 11 y 12: $[(7 + 3)']' = (11') = 12$

Esta demostración explicita lo que antes se dijo sobre la verdad de $7 + 5 = 12$; en la Aritmética de Peano la verdad de tal enunciado depende no sólo de las definiciones, sino de éstas y los postulados.

En nuestro ejemplo suponemos que $P_1$ y $P_2$ garantiza que 7, 3, 4, 5, 12 son números en el sistema de Peano; la demostración general de que Def. 1 determina la suma de los dos números cualesquiera se sirve de $P_5$.

Si llamamos a los postulados y definiciones 'Estipulaciones' entonces puede decirse que las verdades aritméticas son tales en virtud de las estipulaciones. En nuestra demostración hemos usado varias veces la transitividad de la identidad $(a = b) \wedge (b = c) \Longrightarrow (a = c)$ que aquí se asume como una de las reglas deductivas usadas en la demostración de cualquier teorema aritmético, pero que debería explicitarse también como constituyendo el sistema completo.

b). La multiplicación de números naturales se determina por la siguiente definición recursiva, que expresa rigurosamente la idea de que un producto n k de dos enteros puede considerarse como la suma de k términos cada uno igual a n:

Df. 2: a) $n.0 = 0$
b) $n.k' = (nk) + n$

El paso siguiente es la demostración de las leyes generales que regulan la adición y la multiplicación: asociativa, commutativa, distributiva:

$n + k = k + n$ $\quad$ $n + (k + l) = (n + k) + l$ $\quad$ $n(k + l) = (nk) + (nl)$

$nk = kn$ $\quad$ $n\ (kl) = (nk)\,l$

Luego se definen las operaciones inversas de substracción y división, pero como éstas no pueden realizarse siempre —e.d. la diferencia y el cociente no están definidos para todo par de números— puede suceder que cualquiera par por ej.: 7/10 y 8/7 no queden definidos. Este hecho sugiere la ampliación del sistema de los números introduciendo otros, como los negativos, los racionales, etc.

¿Cómo proceder a dicha ampliación?

Un método consistiría en 'suponer' o 'postular' de nuevo la existencia de las clases adicionales de números que deseamos, las propiedades que rellenen las lagunas de la sustracción y división. Este método tiene sus ventajas pero

B. Russell ha dicho que dichas ventajas son las que tiene el robo sobre el trabajo honrado. El otro método consiste en definirlas explícitamente (a los negativos y racionales) a partir de los términos primitivos de Peano, sin necesidad de nuevos postulados ni de hipótesis alguna. Todo entero positivo o negativo (los naturales no tienen signo) es definible como un cierto conjunto de pares ordenados de números naturales; por ejemplo: el entero positivo + 2 se define con el conjunto de los pares ordenados (m, n) de números naturales en los que m = n + 2; el entero negativo — 2 es el conjunto de todos los pares ordenados (m, n) de números naturales con n = m + 2

De modo análogo, los números racionales se definen como clases de pares ordenados de enteros. Entonces pueden definirse las varias operaciones aritméticas para los nuevos tipos de números y la validez de todas las leyes aritméticas que rigen las operaciones pueden probarse sin más recursos que los postulados de Peano y las definiciones de los distintos conceptos aritméticos supuestos.

El sistema, mucho más amplio, así obtenido sigue siendo incompleto en el sentido de que no todo número del mismo tiene una raíz cuadrada y, más en general, no toda ecuación algebraica cuyos coeficientes sean todos los números del sistema tiene una solución en el sistema. Esto sugiere una ulterior ampliación del sistema numérico mediante la introducción de los reales y los complejos. Pero esto puede hacerse según el método que hemos señalado por definiciones explícitas sin necesidad de postulados nuevos.

Sobre la base así obtenida pueden definirse las distintas operaciones aritméticas y algebraicas para los números del nuevo sistema; pueden introducirse los conceptos de función, límite, derivada, integral y demostrarse los teoremas relativos o sus conceptos, de modo que, al final, el gigantesco sistema de la Matemática descansa sobre la base estrecha del sistema de Peano; todo concepto de la Matemática puede definirse con los conceptos primitivos del sistema de Peano y toda proposición matemática puede derivarse de los cinco postulados más las definiciones de los términos no primitivos (2). Es-

(2) Como resultado de investigaciones de vasto alcance realizadas por K. Gödel, se sabe que la Aritmética y, a fortiori, la Matemática, es una teoría incompleta en el siguiente sentido: Mientras que toda proposición perteneciente a los sistemas clásicos de la Aritmética (el Algebra y el Análisis), puede efectivamente derivarse, en el sentido antes estipulado, de los postulados de Peano, hay otras proposiciones verdaderas que pueden expresarse en términos puramente aritméticos pero que sin embargo no son derivables del sistema de Peano. Más en general: para todo sistema de postulados de la Aritmética o de la Matemática que no sea autocontradictorio, existen proposiciones verdaderas, formulables en términos puramente aritméticos, pero no derivables del sistema de postulados.

De otro modo: «es imposible construir un sistema de postulados que no sea autocontradictorio y que contenga entre sus consecuencias todos las proposiciones verdaderas formulables de el lenguaje de la Aritmética. Pero este resultado no afecta lo antes dicho a saber: que la teoría clásica de la Aritmética, el Algebra y el Análisis son deducibles del sistema de Peano.

tas deducciones pueden realizarse en la mayoría de los casos por medio de los principios de la lógica formal exclusivamente; pero las demostraciones de algunos teoremas referentes a los números reales requieren una hipótesis que generalmente no se incluye entre los principios de la lógica formal. Se trata del axioma de elección, que afirma que, dada una clase de clases mutuamente excluyentes, ninguna de las cuales es vacía, existe por lo menos una clase que tiene exactamente un elemento común con cada una de las clases dadas. Con este principio y el sistema de Peano puede derivarse el contenido de toda la Matemática. Es este un éxito notable en la sistematización del contenido de la matemática y en la clarificación de los fundamentos de su validez.

## 7. INTERPRETACION DE LOS TERMINOS PRIMITIVOS DE PEANO

Como consecuencia del anterior resultado puede decidirse que el entero sistema de la Matemática es verdadero en virtud de meras definiciones (definiciones, esto es, de los términos matemáticos no primitivos), siempre que sean verdaderos los cinco postulados de Peano. Pero, hablando con propiedad, no podemos ya llegados a este punto, considerar los postulados de Peano como proposiciones que sean verdaderas o falsas, pues esos postulados contienen tres términos primitivos a los que no se les ha atribuído significación específica alguna. Lo que podemos decir por el momento es que cualquier interpretación concreta de los términos primitivos de Peano que satisfacen a los cinco postulados —que los haga verdaderos— satisfará también todos los teoremas deducidos de ellos. Así, podemos interpretar el "0" como el origen de una semirecta, "el sucesor de" un punto en esa línea, como el punto que se encuentra un centímetro después de él contando desde el origen y "número" como cualquier punto que sea el origen o pueda ser alcanzado a partir del origen por una sucesión finita de pasos, cada uno de los cuales lleve de un punto a su sucesor. Puede mostrarse, finalmente, que todos los postulados de Peano, junto con los teoremas que se siguen de ellos, se convierten por este medio en proposiciones verdaderas, aunque la interpretación dada a los términos primitivos no sea la que habitualmente se les daba. Más en general, puede mostrarse que a toda progresión de elementos cualesquiera se la puede considerar como una interpretación verdadera o 'modelo' del sistema de Peano.

Este ejemplo ilustra el que un sistema de postulados no pueda entenderse como un conjunto de definiciones implícitas de los términos primitivos. El sistema de Peano admite varias interpretaciones para los términos primitivos, en cambio los conceptos de la Aritmética en el lenguaje ordinario y en el lenguaje científico tienen una significación específica. Así, en el discurso cotidiano y en el discurso científico el concepto 2 se entiende de tal modo que, partiendo de la afirmación: "la Señora Martínez y la Señora Alvarez y nadie más, se encuentran en la tienda y la Señora Martínez no es la Señora Alvarez", se puede inferir válidamente la conclusión: "hay exactamente 2 personas en la tienda". Por el contrario, las estipulaciones establecidas en el sistema de Peano para los números naturales y para el número 2 en particular no nos permiten obtener esa conclusión; esas estipulaciones no determinan implícitamente la significación corriente del concepto 2 ni de los demás conceptos aritméticos. El matemático no puede obviar esta deficiencia diciéndose que él no se ocupa de la significación habitual de los conceptos matemáticos, pues al demostrar, por ejemplo, que todo número real positivo tiene exactamente dos raíces cuadradas reales, el matemático está usando el concepto 2 en su significación habitual y su teorema no puede demostrarse a menos que supongamos sobre el número 2 algo más que lo estipulado en el sistema de Peano.

Si, pues, la Matemática debe ser una teoría correcta de los conceptos matemáticos en la significación que deseamos, no es suficiente para hacerla válida mostrar que todo el sistema es derivable de los postulados de Peano, adicionándole ciertas definiciones adecuadas; hay que preguntarse, además, si los postulados de Peano son verdaderos cuando se los entiende en su significación habitual. Y esta cuestión como es natural, no puede resolverse sino después de haber definido claramente los términos "0", 'número natural', 'sucesor', según su significación habitual. A esto nos referimos a continuación.

## 8. DEFINICION DE LA SIGNIFICACION HABITUAL DE LOS CONCEPTOS DE LA ARITMETICA EN TERMINOS PURAMENTE LOGICOS

A primera vista puede parecer imposible intentar definir los conceptos básicos aritméticos sin presuponer otros términos de la Aritmética, lo que nos encerraría en un círculo vicioso. Lo cierto es que pueden formularse definiciones rigurosas del tipo deseado y puede también mostrarse que para los conceptos así definidos, todos los postulados de Peano se convierten en afirmaciones verdaderas. Este notable resultado se debe a las investigaciones de G. Frege y al detallado y sistemático trabajo ulterior de B. Russel y A. N. Whitehead. Vamos a considerar brevemente las ideas básicas subyacentes a esas definiciones.

Un número natural —un número en terminología de Peano—, en su significación habitual puede considerarse como característico de ciertas clases de objetos: la clase de los apóstoles tiene el número 12, las parejas el número 2, y así sucesivamente. Expresaremos con precisión el significado de la afirmación de que una cierta clase C tiene el número 2, o brevemente, $n(C) = 2$. Una breve reflexión nos mostrará que el definiens siguiente es adecuado en el sentido de la significación habitual del concepto 2: hay algún objeto X y algún objeto Y, tales que:

1o. $X \in C \wedge Y \in C$

2o. $X \neq Y$

3o. $(Z)\ Z \in C \qquad Z = X \vee Z = Y$

Se puede observar que sobre la base de esta definición es posible inferir la afirmación: "hay exactamente 2 personas en la tienda", partiendo de la afirmación: "la Señora Martínez y la Señora Alvarez y nadie más se encuentran en la tienda y la Señora Martínez no es la Señora Alvarez". C es aquí la clase de las personas que están en la tienda. Analógamente, el significado de la afirmación de que $n(C) = 1$ es:

| | |
|---|---|
| 1 $(\exists X)$: $X \in C$ <br> 2 $(Y)$ $Y \in C \qquad y = x$ | Transcríbase: hay un X tal que X es C y para cualquier Y, si Y es C, entonces Y = X |

y para $n(c) = 0$: $-(\exists X): X \in C$

El esquema de estas definiciones lleva claramente y por sí mismo a la definición de cualquier número natural. Es de notar que en estas definiciones el 'definiens' (expresión que define o expresión definitoria), no contiene término aritmético alguno, no contiene el "definiendo" (o expresión que se trata de definir) y sí solamente expresiones de la lógica formal, más los signos de identidad y diferencia ("=" "≠"). Hasta este momento sólo hemos definido la significación de frases como $(C) = 2$; no hemos definido 0, 1, 2. . . fuera de este contexto.

Esto puede lograrse si consideramos que 2 es la cualidad común a todos dos pares, es decir, a todas las clases que $n(C) = 2$. Esta propiedad común puede representarse conceptualmente por la clase de todas las clases que tienen en común esa propiedad. Así llegamos a la siguiente definición: 2 es la clase de todos los pares, es decir, la clase de todas las clases C para los que $n(C) = 2$. Esta definición no es, en modo alguno, circular, pues el concepto de par (dicho de otro modo: la significación de "$n(C) = 2$"), ha sido definido previamente sin referencia alguna al número 2. Analógamente, 1 es la clase de todas las clases unidad, esto es, la clase de las clases C para los que $n(C) = 1$. Por último 0 es la clase de las clases nulas que no tienen ningún elemento. Y como no hay más que una clase así, 0 es simplemente la clase cuyo único elemento es la clase nula. De este modo puede definirse claramente la significación habitual de cualquier número natural dado (3).

(3) La afirmación de que las definiciones que acabamos de dar expresan la significación habitual de los términos aritméticos definidos, no debe entenderse en el sentido *psicológico*. No se puede entender que las anteriores afirmaciones expresen 'lo que todo mundo piensa o imagina' cuando habla de números y operaciones con números. Dichas definiciones contienen una 'reconstrucción lógica' de los conceptos de la Aritmética en el sentido de que, si se aceptan las definiciones, las afirmaciones de la ciencia y del discurso cotidiano que contienen términos aritméticos pueden interpretarse coherente y sistemáticamente de tal modo que sean subceptibles de confirmación objetiva.

Para caracterizar la deseada interpretación de los términos primitivos de Peano, no necesitamos, realmente, todas las definiciones que hemos dado. Nos bastaría la del 0. Quedan por definir los términos 'sucesor' y 'entero'.

La definición de 'sucesor' —cuya formulación precisa exige muchos refinamientos técnicos que no vamos a presentar aquí—, es la expresión cuidadosa de una idea sencilla que podemos ilustrar del modo siguiente: Consideramos el número 5 o la clase de todas las clases de 5 cosas. Seleccionemos una cualquiera de esas clases, añadámosle un objeto que no sea uno de los miembros 5'; el sucesor de 5 puede, entonces, definirse como el número correspondiente al conjunto así obtenido (un conjunto de 6 objetos). Finalmente, es posible formular una definición de la significación habitual del concepto de número natural; esta definición, que tampoco vamos a dar aquí, expresa de modo riguroso la idea de que la clase de los números naturales consta del 0, su sucesor, el sucesor de este sucesor. . ., y así sucesivamente.

Si las definiciones aquí esbozadas se escriben cuidadosamente —para lo cual es indispensable el conocimiento de las técnicas de la lógica matemática— se aprecia que el 'definiens' contiene exclusivamente términos de la lógica pura. De hecho es posible formular la interpretación habitual de los términos primitivos de Peano y de cualquier concepto definible con ellos, —todo concepto de la Matemática— en términos de las siguientes siete expresiones:

'no', 'y', 'si-entonces', ( $\forall$ X), ( $\exists$ X) — — — "$\in$",(X )$\int^{\rho}$ X
(mas los variables como c, $\varnothing$. . .)

Incluso es posible reducir el vocabulario lógico a sólo cuatro términos, pues, los tres primeros son definibles en términos de **'ni-ni'** y el quinto ( ($\exists$ x) ) lo es en términos del cuarto y de **'ni-ni'**. Así, todos los conceptos de la Matemática resultan definibles en términos de cuatro conceptos de lógica pura.

## 9. LA VERDAD DE LOS POSTULADOS DE PEANO EN SU INTERPRETACION HABITUAL

Puede decirse que las definiciones caracterizadas hace un momento precisan y explicitan la significación habitual de los conceptos de la Aritmética. Además puede mostrarse que los postulados de Peano se convierten en proposiciones verdaderas si los términos primitivos se construyen de acuerdo con las definiciones que acabamos de considerar.

Así: $P_1$ ("el 0 es un número") es verdadero porque la clase de todos los números —e.d. números naturales— se definió como constituída por 0 y todos sus sucesores.

$P_2$ ("el sucesor de cualquier número es un número") es verdadero también por la misma definición. Lo mismo vale para $P_5$, el principio de la inducción matemática. Pero para probarlo tendríamos que basarnos en la definición precisa 'entero' y no en la descripción laxa de la definición anterior. $P_4$ ("0 no es sucesor de ningún número") es verdadera por lo siguiente: por la definición de sucesor, un número que sea superior de algún otro, ni puede ser, sino número de alguna clase, que contenga por lo menos un elemento; pero el número 0, por definición pertenece a una clase si y sólo sí esta es vacía. Mientras la verdad de $P_1$, $P_2$, $P_4$ y $P_5$ puede inferirse de las anteriores definiciones y los principios de la Lógica, la demostración de $P_3$ ("dos números distintos no tienen el mismo sucesor"), es más difícil. Como ya indicamos, la definición del sucesor de un número n, se basa en el proceso de añadir a una clase de n elementos un elemento no contenido en dicha clase. Pero si el número de cosas que existen es finito, entonces, ese proceso no puede continuarse indefinidamente, y $P_3$ —que con $P_1$ y $P_2$ implica que los enteros forman un conjunto infinito—, resultaría falso. Esta dificultad puede superarse con el 'axioma infinitud' que afirma la existencia de infinitos objetos y hace demostrable a $P_3$. Pero este axioma no es una ley lógica aunque admite una expresión puramente lógica y se lo considera como un postulado adicional, característico de la moderna teoría lógica.

## 10. LA MATEMATICA UNA RAMA DE LA LOGICA

Como se precisó antes, todos los teoremas de la Aritmética, el Algebra y Análisis pueden deducirse de los postulados de Peano y de las definiciones de los términos matemáticos no primitivos en el sistema de Peano. Esta deducción sólo requiere los principios de la Lógica y el axioma de elección (algunas veces). Combinado este resultado con lo dicho sobre el sistema de Peano llegamos a la siguiente conclusión general, conocida como tesis logística, sobre la naturaleza de la Matemática:

La Matemática es una rama de la Lógica que puede derivarse de ésta, en el siguiente sentido:

a) Todo concepto de la Matemática —Aritmética, Algebra, Análisis— puede definirse en términos de cuatro conceptos de la Lógica pura.

b) Todo teorema de la Matemática puede deducirse de esas definiciones por medio de los principios de la Lógica (más los axiomas de elección y de infinito).

En este sentido, puede decirse que las proposiciones del sistema de la Matemática son verdaderas en virtud de las definiciones de los conceptos de la Matemática que influyen o explicitan ciertas características de que hemos dotado, por definición, a nuestros conceptos matemáticos. Las proposiciones de la Matemática tienen, pues, la misma indiscutible certeza típica de proposiciones como "ningún soltero está casado", pero también participan del mismo total vacío, en cuanto a contenido empírico, que corresponde a esa certeza: las proposiciones de la Matemática carecen de todo contenido fáctico; no comunican información alguna acerca de ninguna materia empírica.

## 11. SOBRE LA APLICABILIDAD DE LA MATEMATICA A CUESTIONES EMPIRICAS

El resultado anterior parece irreconciliable con el hecho histórico de que la Matemática ha tenido siempre una altísima aplicabilidad en los asuntos empíricos y de que la mayor parte de la ciencia actual es un conocimiento conseguido precisamente gracias a la utilización de las Matemáticas. Aclaremos la aparente paradoja con unos ejemplos:

Supongamos que estamos examinando cierta masa de gas cuyo volumen (V), a cierta temperatura, es de 9 $dm^3$, y su presión (P) de 4 atmósferas. Supongamos, además, que el volumen del gas para la misma temperatura y P = 6 atm. está previsto por la ley de Boyle. Usando la Aritmética elemental razonamos del modo siguiente:

Para valores correspondientes de V y P, VP = C

V = 9 y P = 4 por lo tanto C = 36. Así pues, cuando P = 6, V = 6. Supongamos que esta predicción resulta confirmada por observaciones subsiguientes. ¿Demuestra ésto que la Matemática usada aquí, tiene por sí misma, poder de predicción, que sus proposiciones tienen implicaciones *empíricas?* Obviamente, no.

El poder predictivo aquí usado, el contenido empírico presente, procede de los datos iniciales y de la ley de Boyle, la que confirma que VP = C para todo par de valores de V y P; por tanto, también para V = 9 y P = 4 y el correspondiente valor de $\geqslant$.

La función de la Matemática aquí aplicada no es en absoluto predictiva; es más bien analítica o explicativa. La Matemática explicita algunos supuestos o afirmaciones implícitas en el contenido de las premisas de la argumentación (aquí, la ley de Boyle y los datos iniciales); el razonamiento matemático revela que esas premisas contienen una afirmación acerca de los casos aún no observados. Al aceptar nuestras premisas, —nos dice la Aritmética— hemos ya aceptado, sepámoslo o no, la implicación de que el valor de P es 6. El razonamiento matemático lo mismo que el lógico, es una técnica conceptual para explicitar lo que ésta implícitamente contenido en un conjunto de premisas (4). Las conclusiones a que dicha técnica conduce no afirma nada que sea teoréticamente nuevo, en el sentido de no estar ya contenido en las premisas. Pero sí pueden producir resultados o evidencias psicológicamente nuevos. Es posible que antes de usar las técnicas de la Lógica y la Matemática no nos diéramos cuenta de lo que estábamos aceptando al afirmar un determinado conjunto de supuestos o aserciones; la Matemática nos hace evidente lo implícito.

Un análisis análogo puede hacerse en todos los demás casos en que se utiliza la Matemática en asuntos empíricos, incluyendo aquellos en que se usa el cálculo infinitesimal. Sea, por ejemplo, el caso de un determinado objeto que se mueve en cierto campo eléctrico; estará sometido a una aceleración constante de 3 $m/sg^2$. Para someter dicha hipótesis a prueba podemos derivar, por dos integraciones sucesivas, la predicción de que si el cuerpo está en reposo al principio del proceso, la distancia recorrida por él en cualquier momento t, $3t^2/2$ m. Teóricamente aquí no hay nada nuevo. Pero psicológicamente si lo habrá para quien no esté habituado a este tipo de problemas. Y en este caso como en el anterior (gas), el que la predicción no resultara verdadera se consideraría prueba de la incorrección fáctica de, por lo menos una de las premisas (por ejemplo de la ley Boyle en la aplicación al gas) y no como señal de que los principios matemáticos y lógicos utilizados puedan ser inconsistentes. Así, pues, en el establecimiento del conocimiento empírico, la Matemática (y la Lógica) tiene la función de "exprimidor" (saca-jugos) teorético: las técnicas lógico-matemáticas no pueden producir más "zumo" de información fáctica que el que ya esté contenido en las premisas a que dichas técnicas se aplican; pero pueden obtener mucho más "zumo" del que, a primera vista podría suponerse contenido en las premisas.

Pero aunque la Matemática no aporta en ningún caso nada al contenido de nuestro conocimiento de temas empíricos es de todos modos, completamente imprescindible como instrumento para la verificación y la expresión lingüística de ese conocimiento pues la mayoría de las teorías más amplias de la ciencia empírica están formuladas con ayuda de conceptos matemáticos. Es permanente el uso que se hace del sistema numérico y de las relaciones funcionales entre variables para la formulación de dichas teorías. De modo similar el examen científico de las teorías, el establecimiento de predicciones por medio de ellas y su aplicación práctica requieren la deducción de consecuencias particulares a partir de la teoría general, deducción que sería completamente imposible sin las técnicas de la Lógica y la Matemática.

---

(4) Si las siguientes cuentan como premisas de un razonamiento

1) $(P \vee Q) \Longrightarrow (R \vee S)$

2) $(Q \vee R) \Longrightarrow T$

3) $-T \wedge P$

Entonces, sepámoslo o no, *S* cuenta como estando necesariamente implicado por (1) - (3).

Resulta, pues, claro a partir del análisis aquí esbozado que el sistema de la Matemática debe ser concebido como una vasta e ingeniosa estructura conceptual sin referencia a contenidos empíricos que, no obstante su vaciedad —y debido precisamente a ella— se constituye en un instrumento teorético poderoso e imprescindible para la comprensión científica y para el dominio práctico del mundo de nuestra experiencia.